МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Ильин Вячеслав Иванович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	0	15	15

№1 $A = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \dots + \frac{97}{(48\cdot49)^2} + \frac{99}{(49\cdot50)^2}$

каждое из этих слагаемых можно представить в виде $\frac{2a+1}{a^2(a+1)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2} =$

$= \frac{(a+1)^2 - a^2}{a^2(a+1)^2} = \frac{2a+1}{a^2(a+1)^2}$ — правда

т.о. $A = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{48^2} - \frac{1}{49^2} + \frac{1}{49^2} - \frac{1}{50^2} = 1 - \left(\frac{1}{50}\right)^2 < 1.$

$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} =$

$= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$ т.о. $A < B$ Ответ: B больше.

№2 $92 \vdots 23$

Если первая цифра 9, то вторая либо 2, либо 5 $95 \vdots 19$

рассмотрим каждый из этих вариантов

1) 9238

23, 46, 69, 92

19, 38, 57, 76, 95

• ед. 2-значное число, начинающееся на 2 и делящееся либо на 23, либо на 19 это 23

=> 3-я цифра точно 3

• аналогично 4-ой цифрой может быть только 8, а подходящих 2-значных чисел начинающихся на 8 нет -> такой вариант не подходит

2) 95769

• 3-ья и 4-ая цифры подбираются однозначно, а пятая цифра однозначно 9

т.о. данная последовательность цифр будет идти и дальше

тогда 2020-ая цифра — 6, 2021-ая — 9, 2022-ая 5

Ответ: последняя цифра 5.

чистовик

$\boxed{№3}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

1) $f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-f^5(x)}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}} =$

$= \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}$

тогда

2) $f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{\sqrt{1-x^5}}{-x}\right)^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1-x^5}{-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5-1+x^5}{-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = x$

т.о. $\underbrace{f(f(f(f(\ldots\ldots f(x)}_{1303}\ldots)) = f(x)$

т.к $\underbrace{f(f(f(\ldots f(x)}_{1302}\ldots)) = x$ $(1302 \vdots 3)$

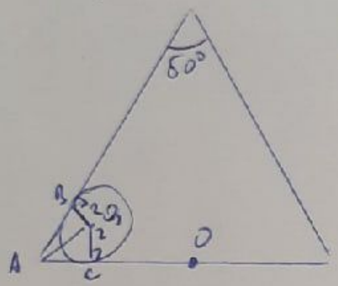
тогда нужно вычислить значение $f(2022) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

№4

• рассмотрим сечение конуса, проходящее через центр одного из шаров: данное сечение – равносторонний треугольник

1)



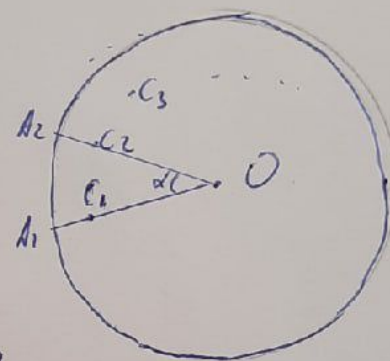
$|AO| = r$ – радиус основания конуса

$O_1\hat{A}C = 30^\circ$

$tg\, 30^\circ = \frac{|O_1C|}{|AC|} \Rightarrow |AC| = \frac{2}{tg\, 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}$

2) очевидно, что шары будут располагаться как-бы по кругу

рассмотрим плоскость основания конуса:

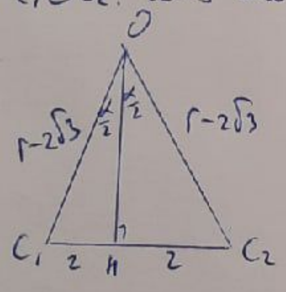


$\exists\ C_1, C_2, \ldots, C_{13}$ – точки касания шаров с этой пл-тью $\Rightarrow |C_1C_2| = |C_2C_3| = \ldots = |C_{13}C_1| = 4$

(расст.м. шари касаются друг друга)

$\alpha = C_1\hat{O}C_2 = C_2\hat{O}C_3 = \ldots = C_{13}\hat{O}C_1 = \frac{360^\circ}{13}$

$\measuredangle\ \triangle C_1OC_2$: $[OH]$ – высота, медиана $\Rightarrow |C_1H| = |C_2H| = 2$



$|OC_1| = |OC_2| = r - 2\sqrt{3} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{r - 2\sqrt{3}} = \sin\frac{180^\circ}{13}$

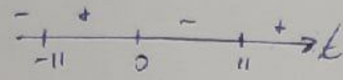
$\Leftrightarrow r - 2\sqrt{3} = \frac{2}{\sin\frac{180}{13}} \Leftrightarrow r = \frac{2}{\sin\frac{180}{13}} + 2\sqrt{3}$

т.о. $r = 2\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{13}} + \sqrt{3}\right)$

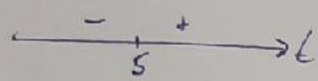
Ответ: $r = 2\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{13}} + \sqrt{3}\right)$

15

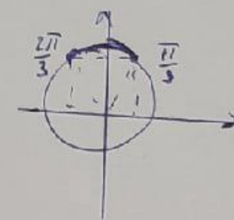
$a = t^3 - 121t = t(t-11)(t+11)$



$b = 2^t - 32$



$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$



$c \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \geq t \geq \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

16

$a\,ctg^3 x + (a^2-a-3)\,ctg^2 x + (3-3a-a^2)\,ctg\,x + 3a = 0$ $\Leftrightarrow$

$ctg\,x = t$

$a t^3 + (a^2-a-3)t^2 + (3-3a-a^2)t + 3a = 0 \Leftrightarrow \cancel{(t-1)(a(t^2+at-3)-3(t+1))=0}$

$\Leftrightarrow \cancel{(t-1)(at^2+(a^2-3)t-3a-3)=0}$

$\Leftrightarrow a(t-1)(t^2+at-3) - 3(t^2-t) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(at^2+a^2t-3a-3t) = 0 \Leftrightarrow$

$(t-1)(at^2+(a^2-3)t-3a) = 0$ $\quad a \neq 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t-\frac{3}{a})(t+a) = 0$

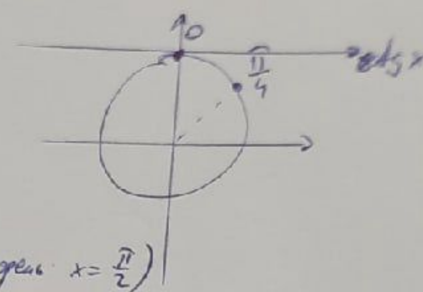
$a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=0 \end{array}\right.$

т.о. $\left\{\begin{array}{l} a=0 \\ \left[\begin{array}{l} ctg\,x=1 \\ ctg\,x=0 \end{array}\right. \end{array}\right.$ $\quad \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} ctg\,x=1 \\ ctg\,x=\frac{3}{a} \\ ctg\,x=-a \end{array}\right. \end{array}\right.$

чистовик

т.о. один корень фиксирован (на отрезке $(0;\pi)$)

$\underline{ctg\,x=1}$



начертим ось $ctg\,x$.

1) при $a=0$ расстояние между корнями $\frac{\pi}{4}$ (второй корень $x=\frac{\pi}{2}$)

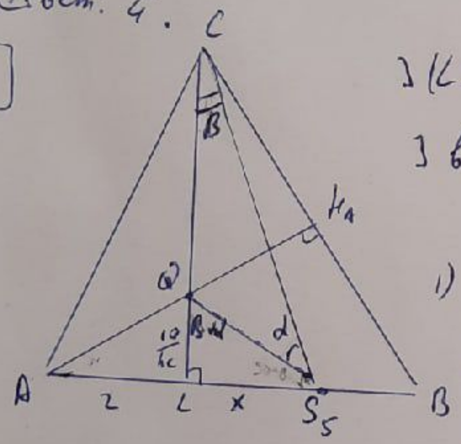
2) при $a\neq 0$ есть 2 корня с разными знаками: $\left[\begin{array}{l} ctg\,x=-a \\ ctg\,x=\frac{3}{a}\end{array}\right.$

=> один из них гарантированно отрицательный и тогда расстояние от него до корня $\frac{\pi}{4}$ будет больше $\frac{\pi}{4}$.

т.е $\underline{a=0}$ в этом случае расстояние $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

$\boxed{№7}$



$\exists\ |LS|=x \Rightarrow |SB|=5-x$

$\exists$ высоты проведенные из $\angle C$, $\angle A$ имеют соотв длины h_c, h_A

1) $|CB|=\sqrt{h_c^2+25}$ $\quad |CB|\cdot h_A=|AB|\cdot h_c \Rightarrow h_A=\frac{7h_c}{\sqrt{h_c^2+25}}$

2) $\triangle ALQ \sim \triangle AH_AB \Leftrightarrow \frac{|AL|}{h_A}=\frac{|AQ|}{|AB|} \Rightarrow |AQ|=\frac{7\cdot 2}{h_A}=$

$=\frac{14}{7h_c}\cdot\sqrt{h_c^2+25}=2\frac{\sqrt{h_c^2+25}}{h_c}$

$\Rightarrow |QL|^2=|AQ|^2-|AL|^2=\frac{4(h_c^2+25)}{h_c^2}-\frac{4h_c^2}{h_c^2}=\frac{100}{h_c^2}\Rightarrow |QL|=\frac{10}{h_c}$

$\Rightarrow |QS|=\sqrt{x^2+\frac{100}{h_c^2}}$

$|SC|=\sqrt{x^2+h_c^2}$

3) $\exists\ L\hat{C}S=\beta;\ Q\hat{S}C=\alpha \Rightarrow L\hat{Q}S=\beta+\alpha$

тогда $tg\,\beta=\frac{x}{h_c}$ $\quad tg(\beta+\alpha)=\frac{x}{10}\cdot h_c=\frac{tg\beta+tg\alpha}{1-tg\beta\, tg\alpha}$

$$\begin{cases} \frac{xh_c}{10}=\frac{\frac{x}{h_c}+tg\alpha}{1-\frac{x}{h_c}tg\alpha} \Leftrightarrow xh_c-\frac{x\,tg\alpha}{h_c}\cdot xh_c=\frac{10x}{h_c}+10tg\alpha \Leftrightarrow 10tg\alpha+tg\alpha\cdot x^2=xh_c-\frac{10x}{h_c} \\ tg\,\beta=\frac{x}{h_c}\end{cases}$$

$\Rightarrow tg\alpha=\frac{xh_c-\frac{10x}{h_c}}{10+x^2}$ чем больше α, тем больше $tg\alpha$

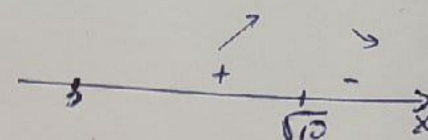
исследуем функцию $f(x)=\frac{xh_c-\frac{10x}{h_c}}{10+x^2}$

чистовик

$$f(x) = \frac{x\left(h_c - \frac{10}{h_c}\right)}{10+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left(h_c - \frac{10}{h_c}\right)(10+x^2) - 2x \cdot x\left(h_c - \frac{10}{h_c}\right)}{(10+x^2)^2} = \frac{x^2\left(h_c - \frac{10}{h_c}\right) + \left(h_c - \frac{10}{h_c}\right)\cdot 10 - 2x^2\left(h_c - \frac{10}{h_c}\right)}{(10+x^2)^2} =$$

$$= \frac{10\left(h_c - \frac{10}{h_c}\right) - x^2\left(h_c - \frac{10}{h_c}\right)}{(10+x^2)^2} = \frac{\left(h_c - \frac{10}{h_c}\right)(10-x^2)}{(10+x^2)^2}$$



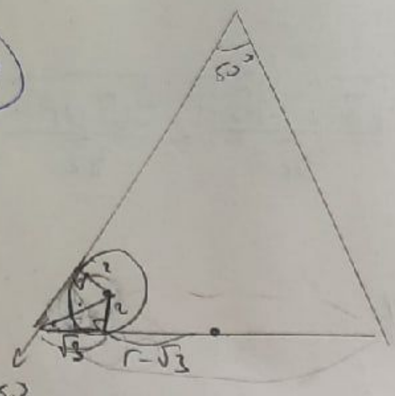
- $0 \leq x \leq 5$ (очевидно, что $LS \in [LB]$, т.к. $|LB| > |AL|$)

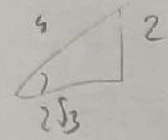
Т.о. максимум функции $f(x)$ на участке $[0;5]$ достигается при $x=\sqrt{10}$
при $x=\sqrt{10}$ $tg\alpha$ - max $\Rightarrow \alpha$ - max.

Ответ: $|LS| = \sqrt{10}$

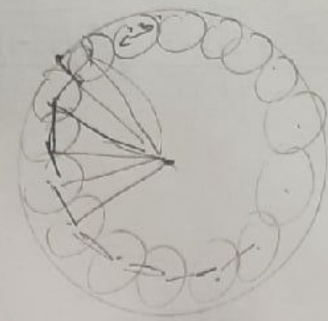
чистовик

№4





4 + 43



$\frac{360}{13}$

$\frac{180-\frac{180}{13}}{2}=90-\frac{180}{13}$

$\cos\alpha=\frac{2}{r-2}$

$\cos(90-\frac{180}{13})=\frac{2}{r-\sqrt{3}}=$

$\sin\frac{180}{13}=\frac{2}{r-2}\Leftrightarrow r-2=\frac{2}{\sin\frac{180}{13}}\Leftrightarrow \boxed{r=\frac{2}{\sin\frac{180}{13}}+\sqrt{3}}$

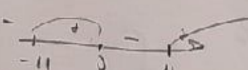
$90(1-\frac{2}{13})$

№5

$x_1\in x_2\in x_3$

$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$

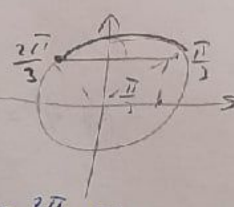
$a=t^3-121t=t(t-11)(t+11)$



$b=2^t-32=2^t-2^5$ $\boxed{t>5}$

$c=\sin t-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin t-\sin\frac{\pi}{3}=$

$=2\sin\frac{t-\frac{\pi}{3}}{2}\cdot\cos\frac{t+\frac{\pi}{3}}{2}$



$\frac{\pi}{3}+2\pi k\le t\le\frac{2\pi}{3}+2\pi k$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\underbrace{\alpha+\beta}_{x})-\sin(\underbrace{\alpha-\beta}_{y})=\sin\beta\cos\alpha\cdot 2$

$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{cases}\Rightarrow \alpha=\frac{x+y}{2}$

$\beta=\frac{x-y}{2}$

$\frac{x+y}{2}-\beta=\frac{2x}{2}$

$\beta=\frac{x-y}{2}$

№8 $a\,ctg^3x+(a^2-a-3)ctg^2x+(3-3a-a^2)ctgx+3a=0$ $ctgx=t$

$at^3+(a^2-a-3)t^2+(3-3a-a^2)t+3a=0$

$a=0,\ -3t^2=0\Leftrightarrow\boxed{t=0}$

$at^3+(a^2a)t^2-(a^2+3a)t-3t^2+3t+3a=0$

$a(t^3+(a-1)t^2-(a+3)t+3)-3(t^2-t)=0$

$a(t-1)(t^2+at-3)-3(t-1)(t+1)=0$

$$\begin{array}{l|l} t^3+(a-1)t^2-(a+3)t+3 & t-1 \\ \hline t^3-t^2 & t^2+at-3 \\ at^2-(a+3)t+3 & \\ at^2-at & \\ -3t+3 & \end{array}$$

черновик

5.1

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{36} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}$$

$$\frac{a+b}{(ab)^2} = \frac{x}{(ab)^2} - \frac{y}{(ab)^2} = \frac{xab - yab}{ab} \quad \frac{x}{b^2} - \frac{y}{a^2}$$

$$xab - yab = a+b \qquad xa^2 - yb^2 = a+b$$

$$x - y = (a+b)ab$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{b^2-a^2}{a^2b^2} = \frac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2}$$

2022 | 3, 674

$$2022 = 1011 \cdot 2 = 674 \cdot 3 = 3 \cdot 337 \cdot 2$$

$$A = 1 - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{9}} + \cancel{\frac{1}{9}} - \cancel{\frac{1}{16}} + \dots + \frac{1}{49^2} - \frac{1}{50^2} < 1$$

5.2

9238

957695

Ответ: 5

9

$19 \cdot 3 = 57$

$19 \cdot 4 = 76$

$19 \cdot 5 = 95$ $\quad 19 \cdot 4 = 76$

$23 \cdot 3 = 69$

$23 \cdot 4 = 92$

$19 \cdot 3 = 57$

$2022 : \frac{4}{4} = 2$

$150 - 143 = 43$

$2^5 = 32$

$3^5 = 81 \cdot 3 = 243$

$4^5 = 2^{10} = 1024 \quad 2022 = 2^5$

$2048 - 26$

5.3 $$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}} = \frac{\sqrt[5]{1+x+x^2+x^3+x^4}}{1-x^5}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-f^5(x)}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5}} =$$

$$(1-x^5) = (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

$$1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \cancel{x^4} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \cancel{x^4} - x^5$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}} = \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1-x^5}{-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{x^5-1}{x^5}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{x^5-x^5+1}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = x$$

$$\boxed{f(f(f(x))) = x}$$

$1303 \cdot 3$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$$

$$\underbrace{f(f\dots f(x)}_{1303} = f(x)$$

$$(1-2022^5) = (1-2022)(1+2022+2022^2+2022^3+2022^4)$$

-2021

черновик

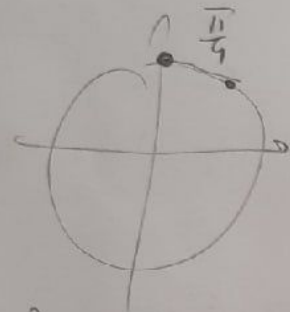
8

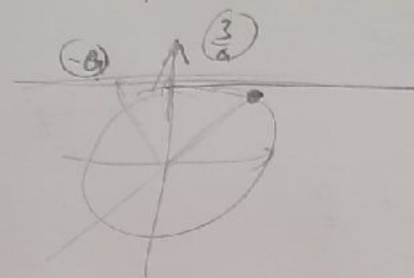
$at^2 + (a^2-3)t - 3a = 0$

$D = (a^2-3)^2 + 4 \cdot 3a \cdot a = (a^2+3)^2$

$t = \frac{3-a^2 \pm a^2+3}{2a}$ $\left[\begin{array}{l} t = \frac{3-a^2+a^2+3}{2a} = \frac{6}{2a} = \frac{3}{a} \\ t = \frac{3-a^2-a^2-3}{2a} = \frac{-2a^2}{2a} = -a \end{array}\right.$

$a \neq 0$





$\frac{3}{a} = 1$

$-a = 1$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) =$

$= a^5 + \cancel{a^4b} + \cancel{a^3b^2} + \cancel{a^2b^3} + \cancel{ab^4} - \cancel{a^4b} - \cancel{a^3b^2} - \cancel{a^2b^3} - \cancel{ab^4} - b^5$

$\frac{3}{a} = -a \Leftrightarrow 3 = a^2$

?!?

$2x^5 - 1 = t^5$ $\quad (2x - t)(\quad \ldots \quad) = 1$

$2x^5 - t^5 = 1$

$(2x - t)($

$\frac{9}{a} + (a^2-3)\frac{3}{a} - 3a$

$\frac{9}{a} + \cancel{3a} - \frac{9}{a} \cdot \cancel{3a}$

чернови (9)

$$t = \frac{20hc^2 \pm 6hc\sqrt{10hc^2-100}}{-2hc^2} = \frac{10hc \pm 3\sqrt{10hc^2-100}}{hc}$$

$$\frac{10hc+3\sqrt{10hc^2-100}}{hc} \qquad + \qquad \frac{10hc-3\sqrt{10hc^2-100}}{hc} \qquad -$$

$$x^2 = -\frac{10hc+3\sqrt{10hc^2-100}}{hc}$$

$-11 \quad 0 \quad 4$

$d<5$

$2^t - 32 \cdot t^3 - 121t \cdot \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2^t - 32 \cdot$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < t < -\frac{5\pi}{3} + 2\pi k$

$1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2^t - 2^5 = 2^{\frac{1}{2}}$

$at^3 + (a^2-a-3)t^2 + (3-3a-a^2)t + 3a = 0$

$at^3 + (a^2-a)t^2 - (a^2+3a)t + 3a - 3t^2 + 3t = 0$

$a(t^3 + (a-1)t^2 - (a+3)t + 3) - 3t^2 + 3t = 0$

$a((t-1)(t^2+at-3)) - 3(t^2-t) = 0$

$t \neq 1$

$(t-1)(t^2+at-3) = t^3 + at^2 - 3t - t^2 - at + 3 = t^3 + t^2(a-1) - t(a+3) + 3$

черновик (10)

№5 (продолж.)

$(t-1)(a(t^2+at-3)-3(t+1))=0$

$(t-1)(at^2+a^2t-3a-3t-3)=0$

$at^2+t(a^2-3)-3a-3=0$

$(a^2-3)^2+4a(3a+3)=a^4-6a^2+9+12a^2-12a=(a^2+3)^2-12a>0$

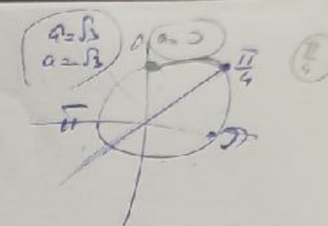
$a=0 \quad t=0 \quad \boxed{\frac{\pi}{4}}$

$(a^2+3-2\sqrt{3}a)(a^2+3+2\sqrt{3}a)>0$

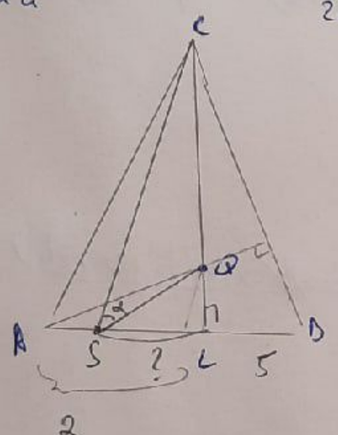
$(a-\sqrt{3})^2(a+\sqrt{3})^2>0$

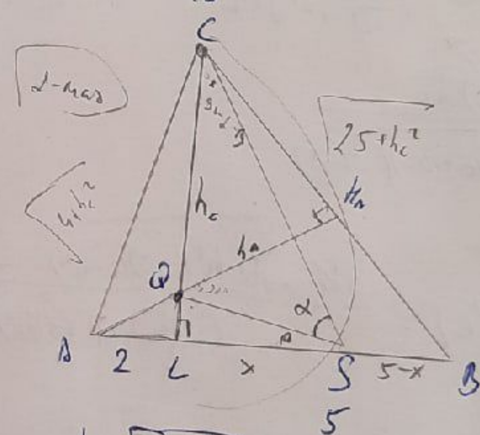
$t=\frac{3-a^2\pm\sqrt{(a^2+3)^2-12a^2}}{2a}=$

$=\frac{3-a^2\pm\sqrt{(a-\sqrt{3})^2(a+\sqrt{3})^2}}{2a}=\frac{3-a^2\pm(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}{2a}=\frac{3-a^2\pm(a^2-3)}{2a}$



№4





$\triangle AQL \sim \triangle ABH_A$

$\frac{AL}{h_A}=\frac{AQ}{7}\Rightarrow AQ=\frac{7\cdot 2}{h_c\cdot 7}\sqrt{25+h_c^2}$

$h_a\cdot\sqrt{25+h_c^2}=h_c\cdot 7$

$h_A=\frac{h_c\cdot 7}{\sqrt{25+h_c^2}}$

$\Rightarrow QL=\sqrt{AQ^2-4}=\sqrt{\frac{4(25+h_c^2)}{h_c^2}-\frac{4h_c^2}{h_c^2}}=\sqrt{\frac{25\cdot 4}{h_c^2}}=\frac{5\cdot 2}{h_c}=\boxed{\frac{10}{h_c}}$

$|CQ|=\boxed{h_c-\frac{10}{h_c}}$

в $\triangle CSQ$: $|CQ|^2=|QS|^2+|CS|^2-2QS\cdot CS\cdot\cos\angle C$

$|SQ|=\sqrt{\frac{100}{h_c^2}+x^2}$

$\cos\alpha=\frac{|QS|^2+|CS|^2-CQ^2}{2QS\cdot CS}$

$|CS|=\sqrt{x^2+h_c^2}$

$\cos\alpha=$

$tg B=\frac{x}{h_c}$ черновик (12)

$tg(B+\alpha)=\frac{x\,h_c}{10}=\frac{tg B+tg\alpha}{1-tg B\,tg\alpha}$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{100}{h_c^2} + x^2 + x^2 + h_c^2 - \left(h_c - \frac{10}{h_c}\right)^2}{2\cdot\sqrt{\frac{100}{h_c^2}+x^2}\,\sqrt{x^2+h_c^2}} = \qquad x \in (0;5)$$

$$= \frac{\cancel{\frac{100}{h_c^2}} + x^2 + x^2 + \cancel{h_c^2} - \cancel{h_c^2} + 20 - \cancel{\frac{100}{h_c^2}}}{2\sqrt{\left(\frac{100}{h_c^2}+x^2\right)\left(x^2+h_c^2\right)}} = \frac{2x^2+20}{2\sqrt{\left(\frac{100}{h_c^2}+x^2\right)\left(x^2+h_c^2\right)}} = \frac{x^2+10}{\sqrt{\frac{100x^2}{h_c^2}+x^4+100+x^2h_c^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot\sqrt{\frac{100x^2}{h_c^2}+x^4+100+h_c^2x^2} - (x^2+10)}{}$$

$$\cos\alpha = \frac{x^2+10}{\sqrt{\frac{100}{h_c^2}+x^2}\sqrt{x^2+h_c^2}} = \sqrt{\frac{(x^2+10)^2}{\frac{100+x^2h_c^2}{h_c^2}(x^2+h_c^2)}} = \sqrt{\frac{(x^2+10)^2\cdot h_c^2}{(x^2h_c^2+100)(x^2+h_c^2)}}$$

$$\frac{(x^2+10)h_c}{\sqrt{(x^2h_c^2+100)(x^2+h_c^2)}}$$

$$f'(x) = \frac{2x\cancel{h_c}\cdot\sqrt{(x^2h_c^2+100)(x^2+h_c^2)} - (x^2+10)\cancel{h_c}\cdot x(4x^2h_c^2+200+2h_c^4)\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x^2h_c^2+100)(x^2+h_c^2)}}}{(x^2h_c^2+100)(x^2+h_c^2)} =$$

$$\left(x^4h_c^2+100x^2+x^2h_c^4+100h_c^2\right)' = 4x^3h_c^2+200x+2xh_c^4$$

$$= \frac{\cancel{2x} - \frac{(x^2+10)\cancel{x}(4x^2h_c^2+200+2h_c^4)}{2\,\cancel{(x^2h_c^2+100)}(x^2+h_c^2)}}{\cancel{(x^2h_c^2+100)(x^2+h_c^2)}} = 2(x^2h_c^2+100)(x^2+h_c^2) - (x^2+10)(4x^2h_c^2+200+2h_c^4) =$$

$$= 2\left(x^4h_c^2+100x^2+x^2h_c^4+100h_c^2\right) - \left(4x^4h_c^2+200x^2+2h_c^4x^2+40x^2h_c^2+2000+20h_c^4\right) =$$

$(x>0)$

$$= 2x^4h_c^2 + \cancel{200x^2} + \cancel{2x^2h_c^4} + 200h_c^2 - 4x^4h_c^2 - \cancel{200x^2} - \cancel{2h_c^4x^2} - 40x^2h_c^2 - 2000 - 20h_c^4$$

$$= -2x^4h_c^2 - 40x^2h_c^2 + 180h_c^2 - 2000 = -2t^2h_c^2 - 40th_c^2 + 180h_c^2 - 2000$$

$$-t^2h_c^2 - 20th_c^2 + 90h_c^2 - 1000$$

$$D = 400h_c^2 + 4h_c^2(90h_c^2 - 1000) = h_c^2(400 + 360h_c^2 - 4000) = h_c^2(360h_c^2 - 3600) = \boxed{360h_c^2(h_c^2-10)}$$

черновик (12)