МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Ильин Иван Владимирович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	5	10

Черновик

1

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-f(x)^5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}}=\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}=-\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x}$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 13 \\ -26 & 2 \\ 100 & \end{array}$$

$\cancel{f(f(}$ $\quad -\frac{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}{\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}}=-\frac{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}}{\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}}=x$

$f(f(f(x)))=x$ $\quad \frac{13\pi}{3}>12 \Leftrightarrow \pi>\frac{36}{13}$

$f(f(f(f(f(f(x))))))=f(f(f(x)))=x$

$$\underbrace{f\ldots f}_{1303}(2022))=\underbrace{f\ldots f}_{1302}(2022))=f(2022)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$$

50^2-49^2

№1 $\quad 4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$

$$\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=1$$

$$\frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}=\cancel{\frac{1}{(i+1)^2}-\frac{1}{i^2}}\ \frac{1}{i^2}-\frac{1}{(i+1)^2}=$$

$$=\frac{(i+1)^2-i^2}{i^2(i+1)^2}=\frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}$$

$$A=\sum_{i=1}^{49}\left(\frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}\right)=\sum_{i=1}^{49}\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(i+1)^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{49^2}-\frac{1}{50^2}=$$

$\pi>\frac{36}{10}$ $\quad \begin{array}{r|l} 36 & 11 \\ -33 & 3{,}2 \\ 30 & \end{array}$

$-\frac{10\pi}{3}<-12$

$=1-\frac{1}{50^2}$ CB

$-\frac{11\pi}{3}\cancel{>}-12$ $\quad \frac{11\pi}{3}\cancel{<}12$ $\quad \pi\cancel{<}\frac{36}{11}$

$-\frac{16\pi}{3}<-12$ $\quad \frac{16\pi}{3}>12$ $\quad \pi>\frac{36}{16}$

Чистовик
№3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-f(x)^5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}}=$$

$$=-\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x}$$

$$f(f(f(x)))=-\frac{\sqrt[5]{1-f(x)^5}}{f(x)}=-\frac{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}{\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}}=-\frac{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}}{\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}}=x$$

Таким образом $f(f(f(x)))=x$. Значит

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{1303}(2022)))\ldots)=\cancel{f(2)}\, f(2022)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

№1

$$B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\left[|\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}-1\right]=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=1$$

Заметим, что $\frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}=\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(i+1)^2}$. Действительно $\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(i+1)^2}=$

$$=\frac{(i+1)^2-i^2}{(i+1)^2\cdot i^2}=\frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}$$

$$A=\sum_{i=1}^{49}\frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}=\sum_{i=1}^{49}\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(i+1)^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{50^2}<1=B$$

Ответ: B больше

Черновик

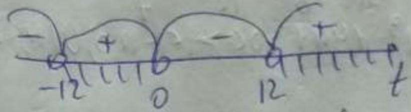
~~Ложно~~

Среднее положительно если ~~~~

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t^3-144t>0 \\ 2^t-256>0 \end{cases} \\ \begin{cases} t^3-144t>0 \\ \sin t>\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 2^t-256>0 \\ \sin t>\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}\end{array}\right.$$

$t(t^2-144)>0$

$t(t-12)(t+12)>0$



$t^3-144t>0 \Leftrightarrow t\in(-12;0)\cup(12;+\infty)$

$2^t-256>0 \qquad 2^t>2^8 \Leftrightarrow t>8$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 7 \\ \hline -21 & 3,4 \\ 30 & \end{array}$$

$2 \to 4 \to \cancel{16}\, 8 \to 16 \to 32 \to 64 \to 128 \to 256$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad \frac{24}{7}$

$\sin t>\frac{\sqrt{3}}{2}$

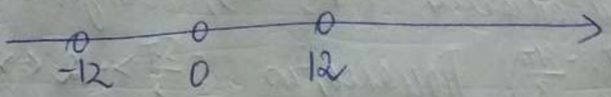
$t\in\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$

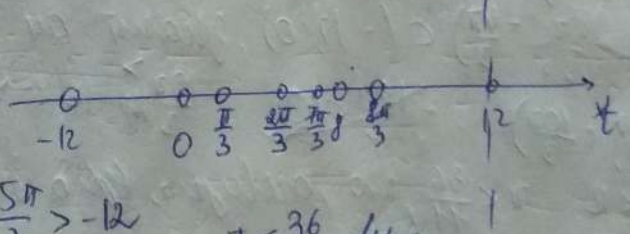
$\frac{2\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}n \qquad 7<\frac{7\pi}{3}<8 \qquad \pi>3$

$\frac{8\pi}{3}>8$

$\left[\ t>12\right.$

$\cancel{8\pi}\ \frac{8\pi}{3} \qquad \frac{13\pi}{3}>13$





$\left(-\frac{5\pi}{3}\quad -\frac{4\pi}{3}\right)$ $\qquad -\frac{5\pi}{3}>-12 \qquad 7<\frac{36}{5}$ верно

$\left(-\frac{11\pi}{3};\ -\frac{10\pi}{3}\right)$ $\qquad \frac{2\pi}{3}<12 \qquad 10\pi>36$

$-\frac{10\pi}{3} < -12 \qquad \pi>3,6$

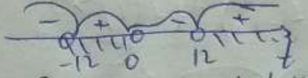
Черновик
№5

Заметим, что условие, что среднее положительно равносильно

$$(*)\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t^3-144t>0\\ 2^t-256>0\end{cases}(1)\\ \begin{cases}t^3-144t>0\\ \sin t>\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}(2)\\ \begin{cases}2^t-256>0\\ \sin t>\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}(3)\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$t^3-144t>0$

$t(t-12)(t+12)>0$



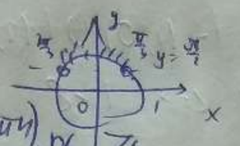
$t^3-144t>0 \Leftrightarrow t\in(-12;0)\cup(12;+\infty)$

$2^t-256>0$

$2^t>256$

$t>8$

$\sin t>\frac{\sqrt{3}}{2}$



$t\in\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$

Решением системы (1) является промежуток $(12;+\infty)$

Т.к. (*) совокупность, то осталось рассмотреть такие t, что $t\in(-\infty;12)$ и по крайней мере одно из условий $t^3-144t>0$, $2^t-256>0$ выполнено

т.е. на промежутках $(-12;0)$ и $(8;12)$ (**)

Заметим, что $\left(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)\subset(0;12)$, т.к. $\frac{\pi}{3}>0$ и $\frac{2\pi}{3}<12$

Рассмотрим промеж. $\left(\frac{7\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right)$ $\frac{7\pi}{3}<8 \Leftrightarrow \pi<\frac{24}{7}$, что очевидно верно, т.к. $\frac{24}{7}>3,4$

$\frac{8\pi}{3}>8$, т.к. $\pi>3$, значит промежуток от $\left(8;\frac{8\pi}{3}\right)$ удовл. (*)

Рассмотрим промежуток $\left(\frac{13\pi}{3};\frac{14\pi}{3}\right)$ $\frac{13\pi}{3}>12 \Leftrightarrow \pi>\frac{36}{13}$, что очевидно верно, т.к. $3>\frac{36}{13}$. Заметим, что промежутки вида $\left(\frac{13\pi}{3}+2\pi n;\frac{14\pi}{3}+2\pi n\right), n\in\mathbb{N}_0$ будут подмножеством $(12;+\infty)$, который мы уже рассмотрели

Рассмотрим $\left(-\frac{5\pi}{3};-\frac{4\pi}{3}\right)$ Заметим, что $-\frac{5\pi}{3}>-12 \Leftrightarrow \pi<\frac{36}{5}$, что верно

$-\frac{4\pi}{3}<0$, значит $\left(-\frac{5\pi}{3};-\frac{4\pi}{3}\right)\subset(-12;0)$, значит он удовл. (*)

Рассмотрим $\left(-\frac{11\pi}{3};-\frac{10\pi}{3}\right)$ $\cancel{-\frac{10\pi}{3}<10}$ $-\frac{10\pi}{3}>-12 \Leftrightarrow \pi<3,6$, что верно

$-\frac{11\pi}{3}>-12 \Leftrightarrow \frac{11\pi}{3}<12$ $\pi<\frac{36}{11}$, что, очевидно, верно. значит $\left(-\frac{11\pi}{3};-\frac{10\pi}{3}\right)$ удовл.

(*)

Рассмотрим $\left(-\frac{17\pi}{3};-\frac{16\pi}{3}\right)$ $-\frac{16\pi}{3}<-12 \Leftrightarrow \pi>\frac{36}{16}$ очевидно верно, т.к. $\frac{36}{16}<3$, значит, заметим, что все промежутки вида $\left(-\frac{17\pi}{3}-2\pi n;-\frac{16\pi}{3}-2\pi n\right)$ $n\in\mathbb{N}_0$ будут подмножеством $(-\infty;-12)$, который не удовл. ни одному из (**)

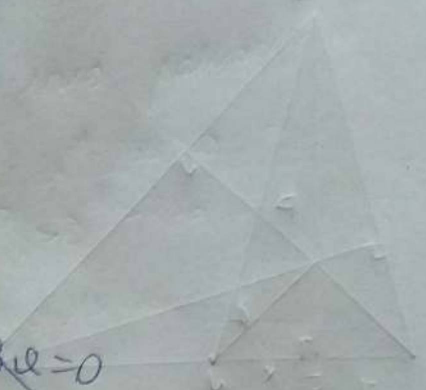
Ответ: $(12;+\infty)\cup\left(8;\frac{8\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{5\pi}{3};-\frac{4\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{11\pi}{3};-\frac{10\pi}{3}\right)$

19; 38; 57, 76, 95 Черновик

$$\begin{array}{r} 38 \\ +19 \\ \hline 57 \\ +19 \\ \hline 76 \\ +19 \\ \hline 95 \end{array} \qquad 23 \to 46 \to 69 \to 92 \qquad \begin{array}{r} 69 \\ +23 \\ \hline 92 \end{array}$$

1957695769

19238 ?



$$\cancel{a + a^2 - a - 3 + 3 - 3a - a^2 + 3a = 0}$$

$\operatorname{ctg} x = 1$ – корень

$$a t^3 + (a^2 - a - 3)t^2 + (3 - 3a - a^2)\operatorname{ctg} t + 3a = 0$$

$$\begin{array}{l|l} a t^3 + (a^2 - a - 3)t^2 + (3 - 3a - a^2)t + 3a & t - 1 \\ \cline{2-2} -\ a t^3 - a t^2 & a t^2 + (a^2 - 3)t - 3a \\ \hline \quad (a^2 - 3)t^2 + (3 - 3a - a^2)t + 3a & \\ \quad -\ (a^2 - 3)t - a^2 t + 3t & \\ \hline \qquad -3at + 3a & \end{array}$$

$$a t^2 + (a^2 - 3)t - 3a$$

$$D = (a^2 - 3)^2 + 4 \cdot 3a \cdot a = a^4 - 6a^2 + 9 + 12a^2 = a^4 + 6a^2 + 9 =$$

$$= (a^2 + 3)^2$$

корни: $\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arcctg} \frac{3}{a}$;

$$t_1 = \frac{-a^2 + 3 + a^2 + 3}{2a} = \frac{3}{a}$$

~~arcctga~~

$\operatorname{arcctg}(-a)$

$$t_2 = \frac{-a^2 + 3 - a^2 - 3}{2a} = \frac{-2a^2}{2a} = -a$$

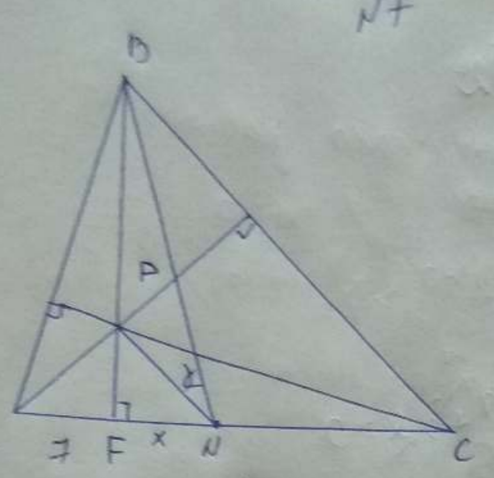
$$\frac{3}{a} \geq -3 \mid \cdot a$$

$$3 \leq -3a$$

$$1 \leq -a$$

Чистовик

№7



$NF = x$

$\angle BNP = \gamma < \angle BNF <$ [т.к. $\angle BNF$ принадлежит прямоугольному треугольнику BNF] $< 90°$

Если $\angle BNP$ - максимальный, то и следовательно тогда $\sin(\angle BNP)$ должен быть максимальным. S - площадь $\triangle BNP$

$$S_{BNP} = \frac{1}{2} NF \cdot BP = \frac{1}{2} \sin\gamma \, PN \cdot BN$$

$$x \cdot BP = \sin\gamma \cdot PN \cdot BN$$

$PN = \sqrt{PF^2 + x^2}$ по т. Пифагора $\triangle PNF$ и $\triangle BNF$

$BN = \sqrt{BF^2 + x^2}$

$$\sin\gamma = \frac{x \cdot BP}{\sqrt{PF^2+x^2} \cdot \sqrt{BF^2+x^2}} = \begin{bmatrix} x>0 \\ BP>0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{x^2 \cdot BP^2}{(PF^2+x^2)(BF^2+x^2)}}$$

Пусть $BP^2 = a > 0$ $PF^2 = b > 0$ $BF^2 = c > 0$

$\sin\gamma$ принимает максимальное значение, значит и $\frac{x^2 \cdot a^2}{x^4+(b+c)x^2+bc}$ принимает мах. значение, значит $\frac{x^4+(b+c)x^2+bc}{x^2a^2}$ принимает min значение

$$\frac{x^4+(b+c)x^2+bc}{x^2a^2} = \frac{x^4+bc}{x^2a^2} + \frac{b+c}{a^2}$$

значит (*) $\frac{x^4+bc}{x^2a^2}$ (*) принимает min значение, но по нер-ву Коши $x^4+bc \geq 2x^2\sqrt{bc}$ т.к. $(*) = \frac{x^4+bc}{x^2a^2} \geq \frac{2x^2\sqrt{bc}}{x^2a^2} = \frac{2\sqrt{bc}}{a^2}$.

Оно должно принимать min значение, знач $(*) = \frac{2\sqrt{bc}}{a^2}$. Оно достигается

$\iff x^4 = bc \Rightarrow x = \sqrt[4]{bc} = \sqrt{PF \cdot BF}$

Чистовик

$\triangle APF \sim \triangle BFC \Rightarrow \frac{AF}{PF} = \frac{BF}{FC}$ $14 = BF \cdot PF$, значит $x = \sqrt{14} = FN$

Ответ: $\sqrt{14}$

№2

Распишем все двузначные числа, которые : 19 или : 23

19; 38; 57; 76; 95; 23; 46; 69; 92. (*)

Число начинается с 1, значит после него следует 9

19, дальше может следовать 5 или 2. Будем показывать

$a \to b$ если число b получается из числа a единственным способом так, что у b число цифр на 1 больше, чем у a и b удовлетворяет условию задачи (Любые 2 соседние цифры : 19 или : 23)

$1 \to 19$ → 195 → 1957 → 19576 → 195769

→ 192 → 1923 → 19238

Если после 9 следует 2, то получается после нескольких операций число, заканчивающееся 8, но в (*) нет чисел, которые начинаются на 8, значит до тех пор, пока a не будет иметь (2021−4) знака после 9 двойке стоять не может. Т.е. получим

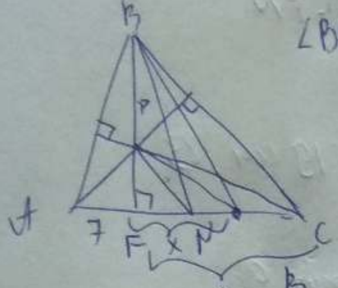
$a = 1\underbrace{9576\,9576 \ldots 9576}_{2016}$ → $\overline{a9} \to \overline{a92} \to \overline{a923} \to \overline{a9238}$

→ $\overline{a9} \to \overline{a95} \to \overline{a957} \to \overline{a9576}$

Таким образом, число загаданное может заканчиваться 8 или 6

Ответ: 8, 6.

Черновик

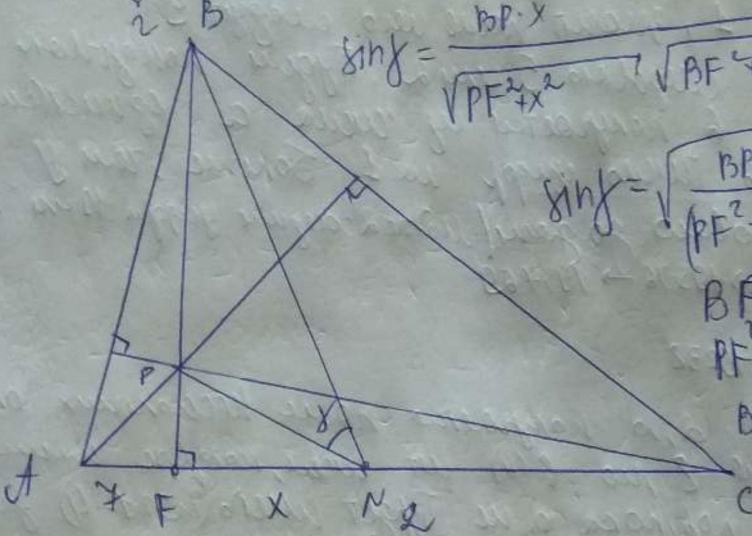


$\angle BNP \to max$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} BP\cdot x = \cancel{\tfrac{1}{2}} \sin\angle BPN\cdot PN\cdot BN$$

$$BP\cdot x = \sin\gamma\cdot\sqrt{PF^2+x^2}\cdot\sqrt{BF^2+x^2}$$

$$\sin\gamma = \frac{BP\cdot x}{\sqrt{PF^2+x^2}\sqrt{BF^2+x^2}}$$



$$\sin\gamma = \sqrt{\frac{BP^2\cdot x^2}{(PF^2+x^2)(BF^2+x^2)}}$$

$BP^2=a$

$PF^2=b$

$BF^2=c$

$\angle BNP$-острый

Если $\angle BNP$-тупой $\angle BNP<\angle BNF$ ~~max~~ $<90^\circ$

$$\frac{BP^2\cdot x^2}{\quad} \qquad \frac{a^2\cdot x^2}{\quad} \qquad \frac{AF}{BF}=\frac{PF}{2}$$

$$\frac{a\cdot x^2}{(b+x^2)(c+x^2)} = \frac{ax^2}{x^4+x^2(b+c)+bc}\to max$$

$$\frac{x^4+x^2(b+c)+bc}{ax^2}\to min \qquad \frac{b+c}{a}+\frac{x^4+bc}{ax^2}\to min$$

$$x^4+bc\ge 2\sqrt{x^4\cdot bc}=2x^2\cdot\sqrt{bc}$$

$$\frac{x^4+bc}{ax^2}\to min \qquad x^4=bc$$

$$x=\sqrt[4]{bc}=\sqrt{PF\cdot BF}$$

$$\frac{x^4+bc}{ax^2}\ge\frac{2x^2\sqrt{bc}}{ax^2}=\frac{2\sqrt{bc}}{a}$$

$BP\cdot PF=AP\cdot$

Черновик

19; 38; 57; 76; 95

23; 46; 69; 92

$$\begin{array}{r} 2020 \\ -\ \ 4 \\ \hline 2016 \end{array}$$

19238

195769

Если $a>0$, то $-a<0$ $\quad \frac{3}{a}>0$

значит $\operatorname{arcctg}\left(+\frac{3}{a}\right) \in \mathrm{I}$

а $\operatorname{arcctg}(-a) \in \mathrm{II}$

Есть 2 возможных случая $\quad \operatorname{arcctg}\left(\frac{3}{a}\right) \geq \frac{\pi}{4}$

~~каких~~ $\quad \operatorname{arcctg}(-a) - \frac{\pi}{4} \to \max \quad \cancel{\operatorname{arcctg}(-a)} \quad -a \geq -3$

а $\operatorname{arcctg}\frac{3}{a} \geq \operatorname{arcctg} 1 \quad \frac{3}{a} \leq 1 \quad a>0 \quad 3 \leq a \quad \operatorname{arcctg}(-a) \leq \operatorname{arcctg} 3$

Рассмотрим $a=0$

$\operatorname{arcctg}(-a) - \frac{\pi}{4}$ принимает max значение при

$a \geq 3 \quad -a \leq -3 \quad$ arcctg ф-ия убывающая

$\operatorname{arcctg}(-a) \geq \operatorname{arcctg}(-3)$

1) $\operatorname{arcctg}\left(\frac{3}{a}\right) \geq \overset{\operatorname{arcctg}}{\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \operatorname{arcctg}\left(\frac{3}{a}\right) \geq \operatorname{arcctg} 1 \Leftrightarrow \frac{3}{a} \leq 1 \Leftrightarrow 3 \leq a$

$\operatorname{arcctg}(-a) - \frac{\pi}{4} \geq \operatorname{arcctg}(-3) - \frac{\pi}{4}$ при $a=3$

2) $\operatorname{arcctg}\left(\frac{3}{a}\right) \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \cancel{3 \leq a} \quad a \leq 3$

$\operatorname{arcctg}(-a) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{3}{a}\right)$

Числовые

Пусть $a<0$, тогда $\frac{3}{a}<0 \Rightarrow \operatorname{arcctg}\frac{3}{a}\in \mathrm{II}$, а $-a>0 \Rightarrow$
$\operatorname{arcctg}(-a)\in \cancel{\mathrm{II}}\ \mathrm{I}$

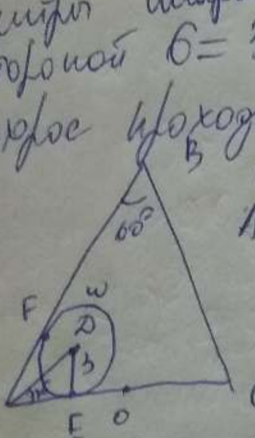
Если $\frac{\pi}{4}\le \operatorname{arcctg}(-a)$, то т.к. $y=\operatorname{arcctg}x \downarrow$, то $1\ge -a \Rightarrow$
$\Rightarrow a\le -1$, тогда корни с наибольшим расстоянием — это
$\operatorname{arcctg}\frac{3}{a}$ и $\frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arcctg}\left(\frac{3}{a}\right)-\frac{\pi}{4}$ - расстояние

Если $\frac{\pi}{4}\ge \operatorname{arcctg}(-a)$, то $a\ge -1$ и тогда
наиб расстояние между корнями равно
$\operatorname{arcctg}\left(\frac{3}{a}\right)-\operatorname{arcctg}(-a)$

№4

Т.к. шары одинаковых радиусов и касаются основания в одном полупространстве, то их центры лежат в одной плоскости. ~~Они касаются~~ Один шар (с центром A_1) касается двух других (A_2 и A_3), поэтому центры A_1, A_2 и точка касания шаров (с центрами A_1 и A_2) лежат на одной прямой. Значит центры шаров образуют правильный 19-угольник со стороной $6=3+3$. Рассмотрим осевое сечение конуса, которое проходит через центр одного из шаров



окружность ω (с центром D) касается $\angle BAC$ в точках F и E $\Rightarrow$ AD - биссектриса $\angle BAC$. ΔBAC - равносторонний $\Rightarrow$ $\angle DAE=\frac{\angle BAC}{2}=30°$. DE - радиус шара и он равен 3. Значит $AE=3\operatorname{ctg}30°=3\sqrt{3}$. Если перпендикулярно спроецировать 19-угольник, получающийся из центров шаров, ~~и его центр~~, на основание конуса, то центр 19-угольника перейдёт в центр конуса, а $D\to E$, тогда отрезок EO равен радиусу описанной окружности правильного 19-угольника со стороной 6 и равен $\frac{3}{\sin\left(\frac{180°}{19}\right)}$, таким образом, $AO=AE+EO=3\sqrt{3}+\frac{3}{\sin\left(\frac{180}{19}\right)}$

Ответ: $3\sqrt{3}+\frac{3}{\sin\left(\frac{180}{19}\right)}$

11

Числовая

Пусть $a<0$, тогда $\frac{3}{a}<0 \Rightarrow \operatorname{arcctg}\frac{3}{a} \in II$, а $-a>0 \Rightarrow$
$\operatorname{arcctg}(-a) \in \cancel{III}\ I$

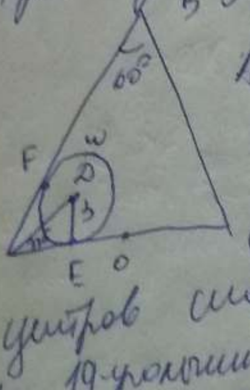
Если $\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arcctg}(-a)$, то т.к. $y=\operatorname{arcctg}x \searrow$, то $1 \geq -a \Rightarrow$
$\Rightarrow a \leq -1$, тогда корни с наибольшим расстоянием — это
$\operatorname{arcctg}\frac{3}{a}$ и $\frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arcctg}\left(\frac{3}{a}\right) - \frac{\pi}{4}$ - расстояние

Если $\frac{\pi}{4} > \operatorname{arcctg}(-a)$, то $a \geq -1$ и тогда
наиб расстояние между корнями равно
$\operatorname{arcctg}\left(\frac{3}{a}\right) - \operatorname{arcctg}(-a)$

№4

Т.к. шары одинаковых радиусов и касаются основания в одном полупространстве, то их центры лежат в одной плоскости. ~~Они касаются~~ Один шар (с центром A_1) касается двух других (A_1 и A_3), поэтому центры A_1 A_2 и точка касания шаров с центрами A_1 и A_2 лежат на одной прямой. Значит центры шаров образуют правильный 19-угольник со стороной $6=3+3$. Рассмотрим осевое сечение конуса, которое проходит через центр одного из шаров

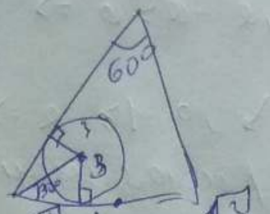


окружность ω с центром D касается $\angle BAC$ в точках F и $E \Rightarrow$ AD — биссектриса $\angle BAC$. ΔBAC — равносторонний $\Rightarrow$ $\angle DAE = \frac{\angle BAC}{2} = 30°$. DE — радиус шара и он равен 3. Значит $AE = 3\operatorname{ctg}30° = 3\sqrt{3}$. Если перпендикулярно спроецировать 19-угольник, получающийся из центров шаров, ~~то его центр~~, на основание конуса, то центр 19-угольника перейдёт в центр конуса, а $D \to E$, тогда отрезок EO равен радиусу описанной окружности правильного 19-угольника со стороной 6 и равен $\frac{3}{\sin\left(\frac{180°}{19}\right)}$, тогда отрезок $AO = AE + EO = 3\sqrt{3} + \frac{3}{\sin\left(\frac{180}{19}\right)}$

Ответ: $3\sqrt{3} + \frac{3}{\sin\left(\frac{180}{19}\right)}$

11

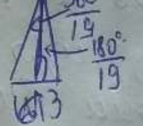
Черновик



$ctg 30° = \frac{1}{tg 30°} = \sqrt{3}$

R = радиус 19 угольника со стороной $6+\sqrt{3}$

$\frac{(19-2)\cdot 180°}{19}$



$EO = \frac{3}{\sin(\frac{180°}{19})}$