МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Исанбирдин Тимур Рустамович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	10	5	15

① $A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$ Чистовик.

$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$(\sqrt{3}>1)$

$= \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$

Заметим, что:

$\frac{(2k+1)}{(k(k+1))^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$. Тогда A принимает вид: $A = \cancel{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}\ \frac{1}{1}}$

$A = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{2^2}} - \cancel{\frac{1}{3^2}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{48^2}} - \cancel{\frac{1}{49^2}} + \cancel{\frac{1}{49^2}} - \frac{1}{50^2} =$

$= 1 - \frac{1}{50^2}$

$1 - \frac{1}{50^2} < 1$, поэтому $A < B$

Ответ: $A < B$

(2) Чистовик.

Кратные 19: 19; 38; 57; 76; 95

Пусть сейчас мы смотрим на непоследнюю и не первую позицию 2021-ного числа, и на ней стоит цифра "а", а на след. позиции цифра "в". Рассмотрим, какая будет "в" в зависимости от "а", чтобы условие соблюдалось (т.е. $\overline{ab} \vdots 19$ или $\overline{ab} \vdots 23$. Также заметим что $a \neq 0$ (иначе предыдущее двузначное число не $\vdots 19$ и не $\vdots 23$)

а	в
1	9
2	3
3	8
4	6
5	7
6	9
7	6
8	никакой цифры быть не может.
9	2 или 5

Из таблицы видно, что 8 может стоять только в конце, тогда 3 - не раньше предпоследней, 2 - не раньше, чем на 2021-й. Т.к. число начинается с 1, то дальше обязательно идет 9, после 9 - только 5, т.к. 2, исходя из вышеуказанного, идти не может. После 5 - только 7, после 7 - 6, после 6 - 9. А тогда, рассуждая аналогично, придем к тому, что исходное число равно $1\underbrace{9576\,9576\ldots9576}_{505\text{ блоков }9576}$ - оканчивается на 6.

Ответ: 6

(3.) Глотовик

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^5}}}}$$

$$f(f(f(f(x))))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^5}}}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{x^5}{1+x^5-x^5}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

Значит $f(f(f(f(x))))=f(x)$, а значит (применив 434 раза)

$$\underbrace{f(f\dots(f(x)}_{1303}\dots)=f(x)=f(2022)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

(4)

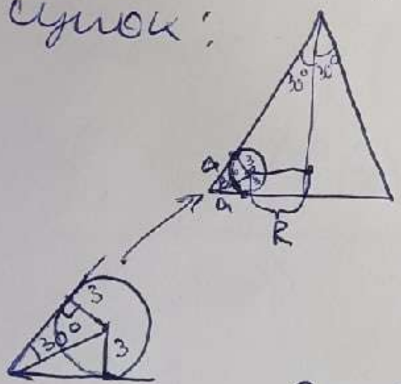
Шестовик

Центры сфер образуют правильный 19-угольник со стороной 6, поэтому радиус его описанной окружности равен $\frac{3}{\cos\left(\frac{17\pi}{38}\right)}$ (Угол равен $\frac{17\pi}{19}$, поэтому половина угла $\frac{17\pi}{38}$, 3 – половина ст-ны многоугольника ~~мн-ка~~) $\left(R=\frac{a}{2\sin\alpha}\right)$

В проекции на пл-ть основания получаем, что расстояние от центра основания до точек касания сфер с основанием равно

$$\frac{3}{\cos\left(\frac{17\pi}{38}\right)}.$$

Рассмотрим осевое сечение, проходящее через один из центров сфер. Получается рисунок:



(с равностор. Δ-ком ~~[illegible]~~

$a=3\sqrt{3}$ ~~[illegible]~~

Тогда итоговый радиус равен:

$$3\sqrt{3}+\frac{3}{\cos\left(\frac{17\pi}{38}\right)}$$

Ответ: $3\sqrt{3}+\frac{3}{\cos\left(\frac{17\pi}{38}\right)}$

(5.) Заметим, что если среди a, b и c хотя бы 2 отриц., то тройка не удовлетворяет условию (т.к. если бы среднее было положительно, то оно оказалось бы ограничен-м сверху и снизу отриц. числами, что невозможно). Аналогично, что если среди них хотя бы 2 полож-х, то такая тройка удовлет-ет.

В силу вышесказанного следует, что $t<8$ не удовл-ет условию, т.к. $a<0$ и $b<0$.

А $t>12$ условию удовл-ет, т.к. a и $b>0$.

Осталось рассмотреть $t\in[8;12]$

1) $t\in(8;12]$. Тогда $a\le0$; $b>0$. Тогда необходимо, чтобы c было полож-м.

Т.е. нужно найти $t\in(8;12]$, такие что $\sin t-\frac{\sqrt3}{2}>0$. Решение нер-ва – объединение интервалов $(2\pi k+\frac{\pi}{3};2\pi k+\frac{2\pi}{3})$, $k\in\mathbb{Z}$

Пересекая его с $(8;12]$, получаем, что в этом случае реш-ми яв-ся $t\in(8;2\pi+\frac{\pi}{3})$

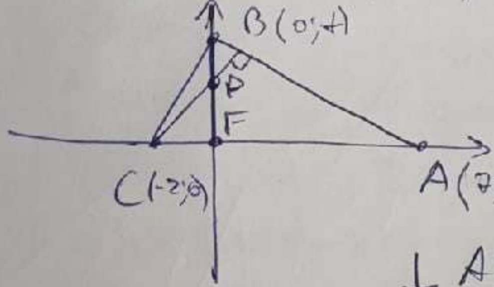
2) $t=8$. Тогда $a<0$; $b=0$, а тогда каким бы не было c, среднее будет полож.

Ответ: $t\in(8;2\pi+\frac{\pi}{3})\cup(12;+\infty)$

Чистовик

(7) Введем СК в плоскости с центром точке F, осями направленными по лучам FA и FB

Тогда $A=(7;0)$; $C=(-2;0)$. Пусть $B=(0;t)$



прямая AB задается ур-ем:

Прямая, проходящая ч/з C, $\perp AB$ задается ур-ем: $\frac{7}{t}\cdot(x+2)$

при $x=0$: $\frac{14}{t}$. Тогда $P=\left(0;\frac{14}{t}\right)$

Пусть $N=(0;k)$. $\overline{PN}=\left(-k;\frac{14}{t}\right)$; $|PN|=\sqrt{k^2+\frac{196}{t^2}}$

$\overline{BN}=(-k;t)$; $BN=\sqrt{k^2+t^2}$

$(PN;BN)=(-k)\cdot(-k)+t\cdot\left(\frac{14}{t}\right)=k^2+14$

Произведение длин PN и BN:

$PN\cdot BN=\sqrt{k^4+\left(t^2+\frac{196}{t^2}\right)k^2+196}$

Тогда $\cos\angle NPB=\dfrac{k^2+14}{\sqrt{k^4+\left(t^2+\frac{196}{t^2}\right)k^2+196}}$

Так как угол от 0 до 180°, $\cos$ — убывающая ф-я. Тогда мы хотим найти k от -2 до 7, такое, что $\cos\angle NPB$ — минимально

Пусть $x=k^2$ (от 0 до 49)

$c=t^2+\frac{196}{t^2}>28$ (не равно, т.к. Δ остроугольный)

Продолжение $\longrightarrow$

6

(7) Продолжение. Чистовик.

Хотим найти минимум ф-и: $\frac{x+14}{\sqrt{x^2+cx+196}}$

Заметим, что у подкоренного выр-я при $c>28$ есть 2 корня, но оба отрицательны.

Найдем производную

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+cx+196}-(2x+c)(x+14)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+cx+196}}}{x^2+cx+196}$$

После преобразований: $f'(x)=\frac{((c-28)x-14(c-28))}{\sqrt{(x^2+cx+28)}^{\frac{3}{2}}}$

При $x<14$ – производная отрицательна ($c>28$)

При $x>14$ полож., при $x=14$ равна $0 \Rightarrow$

$x=14$ – точка минимума. (принадлежит $[0;45]$)

Тогда $k^2=14 \Rightarrow k=\pm\sqrt{14}$, но $k\in[-2;2] \Rightarrow$

$\Rightarrow k=\sqrt{14}$; $FN=\sqrt{14}$

Ответ: $\sqrt{14}$.

⑥ Чистовик

$$a\cdot ctg^3x+(a^2-a-3)ctg^2x+(3-3a-a^2)ctg\,x+3a=0$$

Заметим, что $ctg\,x=1$ — корень

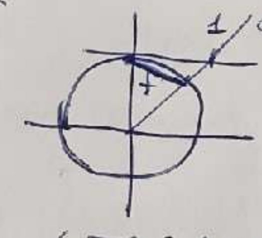
	a	a^2-a-3	$3-3a-a^2$	$3a$
1	a	a^2-3	$-3a$	0

$$a\cdot ctg^2x+(a^2-3)ctg\,x-3a=0$$

$$D=(a^2-3)^2+12a^2=(a^2+3)^2$$

$$ctg\,x=\frac{3-a^2\pm(a^2+3)}{2a}=\left[\begin{array}{l}\frac{3}{a}\\ -a\end{array}\right.$$ — один полож. и один отриц.

тогда x_1 нах-ся в I четверти, а x_2 во второй. Тогда наименьшее расстояние не менее f



. Оно не достигается, но стремится при $a\to-\infty$

$$\left[\begin{array}{l}ctg\,x\to 0\\ ctg\,x=1\\ ctg\,x\to\infty\end{array}\right.$$

Ответ: $a\to-\infty$

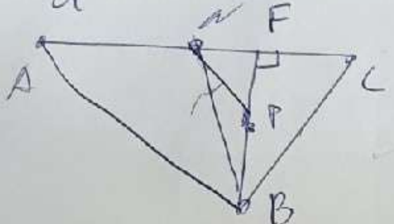
Ответ: $a\to-\infty$

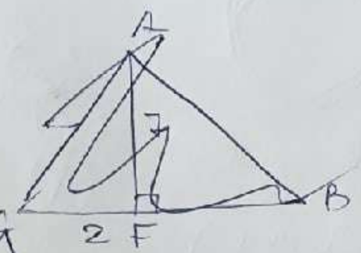
8

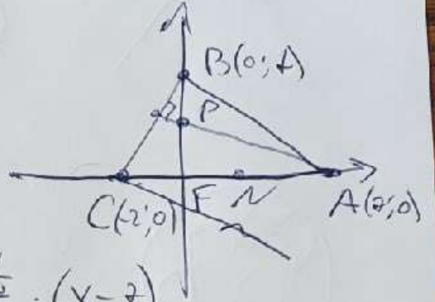
Черновик

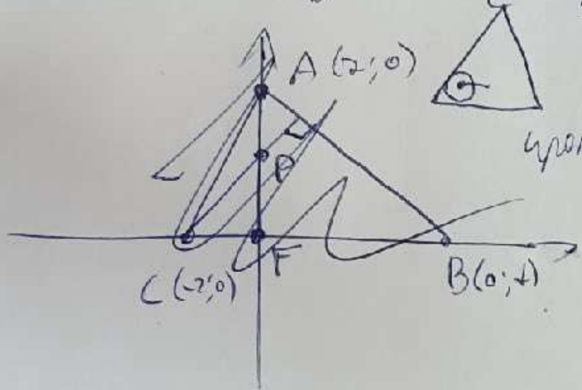
x_2

$a = t^3 - 144t$









$AB = -\frac{t}{7}\cdot(x-7)$

прямая $\parallel$ ч. $C \perp AB$ $\frac{7}{t}\cdot(x+2)$

$x=0$: $\frac{14}{t} \Rightarrow P\left(0;\frac{14}{t}\right)$

Пусть $N=(0;k)$

$\overline{PN} = \left(-k;\frac{14}{t}\right) \Rightarrow$ $\overline{BN} = (-k;t) \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{x^2+cx+156}-(2x+c)(x+14)}{2\sqrt{x^2+cx+156}^2}$ $|\overline{PN}| = \sqrt{k^2+\frac{196}{t^2}}$ $BN\sqrt{k^2+t^2}$

$(PN, BN) = (-k)\cdot(-k) + t\cdot\left(\frac{14}{t}\right) = k^2+14 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle NPB = \frac{k^2+14}{\sqrt{k^4+\left(t^2+\frac{196}{t^2}\right)k^2+196}}$, т.к. угол от

$0; 180^\circ$, cos – убыв. ф-я.

Найдем k от $(-2$ до $2)$, что $\frac{k^2+14}{\sqrt{k^4+\left(\frac{196}{t^2}+t^2\right)k^2+196}}$ – min

Пусть $x = k^2$ (x от 0 до 4)

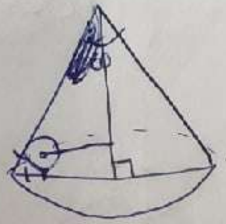
$c = t^2 + \frac{196}{t^2} > 28$ (не равно, т.к. $\triangle$ остроуг.)

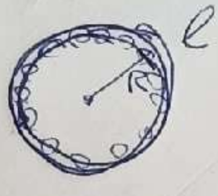
min f $\frac{x+14}{\sqrt{x^2+cx+196}}$

Произв. ~~и других~~ решение.

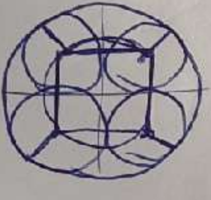
(4)

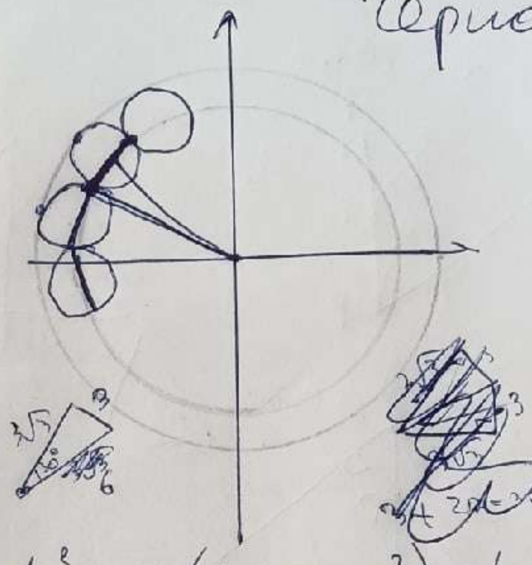
Черновик





$R = r+3$





$l = 2\pi(r+3)$

$a = t^3 - 144t$

(6) $a\cdot ctg^3x + (a^2-a-3)ctg^2x + (3-3a-a^2)ctg\,x + 3a = 0$

$ctg\,x = 1:\ \cancel{a} + \cancel{a^2} - \cancel{a} - \cancel{3} + \cancel{3} - \cancel{3a} - \cancel{a^2} + \cancel{3a} = 0$

	a	a^2-a-3	$3-3a-a^2$	$3a$
1	a	a^2-3	$-3a$	0

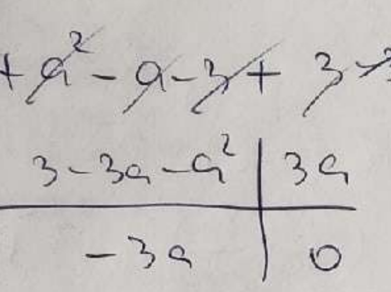
$a\cdot ctg^2x + (a^2-3)\,ctg\,x - 3a = 0$

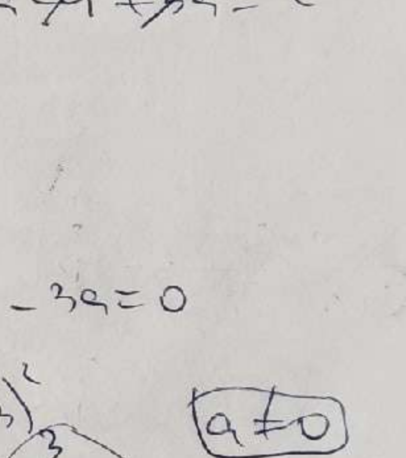
$D = a^4 - 6a^2 + 9 + 12a^2 = (a^2+3)^2$ $\boxed{a \neq 0}$

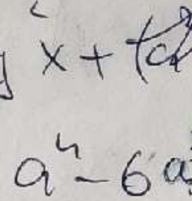
$ctg\,x = \dfrac{3-a^2 \pm (a^2+3)}{2a} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{a} \\ -\dfrac{2a^2}{2a} = -a \end{array}\right.$

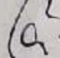
$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$\left\{\begin{array}{l} ctg\,x = 1 \\ ctg\,x = \frac{3}{a} \\ ctg\,x = -a \end{array}\right.$







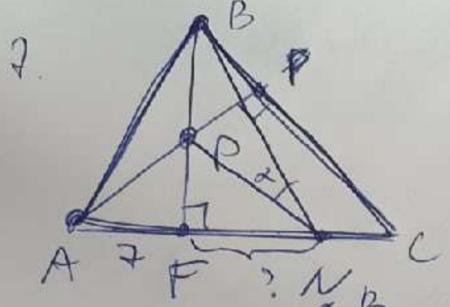
$a=-1;$  $a \neq -1$

$a=1: a\to\infty$: 0

$a\to-\infty$: 0

7.

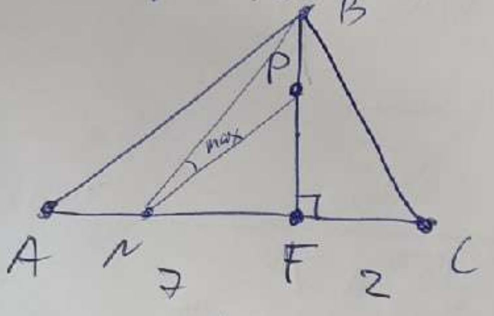
Черновик



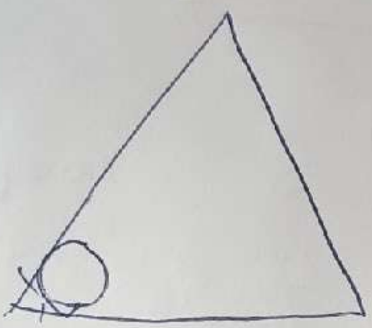
$\alpha \to \max$

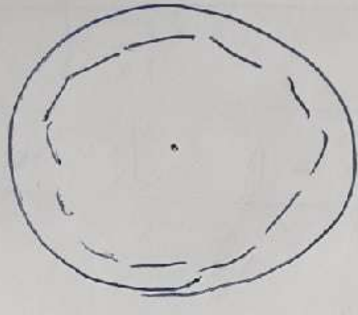
$\alpha \nearrow$

$\sin\alpha \nearrow$



$\dfrac{BP}{NP} \to \max$





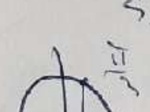
↳ уголышки $\angle = \frac{12\pi}{13}$

(5) $a, b, c \quad z > 0 \Rightarrow t > 8, \quad \underbrace{t > 12}_{\text{вып-нено}}$

$t \in [8; 12]$

1) $(8; 12] \quad a \le 0; b > 0$

$\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$



$t_0 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

$t = 12: \quad a = 0; \; b > 0; \; c =$

$\pi = 3,14$

$\frac{8\pi}{3} > 8$

$(2\pi k + \frac{\pi}{3}; 2\pi k + \frac{2\pi}{3})$ $k \in \mathbb{Z}$

$\cap (8; 12] = (8; 2\pi + \frac{2\pi}{3}]$

$t \in (8; 2\pi + \frac{\pi}{3}) \cup (12; +\infty)$

2021 : $\frac{\text{Делея}}{2021}$ Горновик $\frac{7}{36}$

$$A=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\frac{7}{(3\cdot 4)^2}=\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}$$

$\frac{1}{4}=\frac{9}{36}$

$$A=\frac{2a+1}{(a\cdot(a+1))^2}+\frac{2a+3}{((a+1)\cdot(a+2))^2}+\text{——}\qquad \frac{7}{(4\cdot 5)^2}$$

$$B=\frac{\sqrt[6]{3-2\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=$$

200 | 8

100

144 | 9, 16

−9

54

$$=\frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}}=1\qquad \frac{1}{4}$$

$$A=\frac{2a+1}{(a(a+1))^2}\quad \frac{3}{4}+\left(\frac{5}{36}+\left(\frac{7}{144}+\frac{9}{400}\right)\right.\qquad \frac{1}{16}-\frac{9}{400}=\frac{16}{400}=$$

$$=\frac{8}{200}=\frac{1}{25}$$

$$\frac{9}{36}-\frac{5}{36}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}\quad \frac{1}{16}$$

$$A<B$$

$$\frac{(a+a+1)}{a^2(a+1)^2}+\frac{(a+1)+(a+2)}{(a+1)^2\cdot(a+2)^2}\qquad A=\frac{2a+1}{a^2(a+1)^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(a+1)^2}$$

$$\frac{a+(a+1)}{a^2\cdot(a+1)^2}=\frac{1}{a(a+1)^2}+\frac{1}{a^2(a+1)}$$

$$\frac{(a+1)-(a)}{a(a+1)^2}=\frac{1}{a(a+1)}-\frac{1}{(a+1)^2}$$

③ $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$ Черновик

$$\underbrace{f(f(f\ldots f(2022)))}_{1303}$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1+x^5-1}{1-x^5}}}=\sqrt[5]{\frac{1-x^5}{x^5}}$$

1303 | 3, 434; 130, 434

$$f(f(f(x)))=\sqrt[5]{\frac{1-\frac{1}{1-x^5}}{\frac{1}{1-x^5}}}=\sqrt[5]{\frac{1+x^5-1}{1}}=x$$

$$f(f(f(f(x))))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}=f(x)$$

$1-\frac{x^5}{x^5+1-x^5}$

~~1303 : 4 = (1300 : 4) + 3~~

$$f(f(f(x)))=\cancel{x}=2022\quad \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{x^5}{1-x^5}}}}\qquad \frac{1}{1-\frac{1}{1-x^5}}=\frac{1-\frac{1-x^5}{x^5}}{1-\frac{1-x^5}{x^5}}$$

Чистовик подписать Черновик

1. $A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2}$

$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$

$\cancel{A \vee B}$

$\frac{(2a+1)}{a^2\cdot(a+1)^2} + \frac{(a+1)+(a+2)}{(a+1)^2\cdot(a+2)^2} + \frac{(a+2)+(a+3)}{(a+2)^2\cdot(a+3)^2}$

2) $\underbrace{n}_{2021} \in N$

$\underbrace{1\ldots}_{2021}$

$\vdots 19$ or $\vdots 23$

19	23
38	46
57	69
76	92
95	

$19 - 92 - 23 - \cancel{38}$

$19 - \underbrace{95 - 57 - 76 - 69}_{\text{цикл}} - \underbrace{95 - 57 - 76 - 69}$

2021 $\quad 2020 \,\vdots\, 4 = 505$

Ответ: 9