МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Исмагилов Амир Эльвирович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	5	15	5	15

Черновик

$a\,tg^3x+(2-a-a^2)tg^2x+(a^2-2a-2)tgx+2a=0$

$f(1)=\cancel{a}+\cancel{2}-\cancel{a}-\cancel{a^2}+\cancel{a^2}-\cancel{2a}-\cancel{2}+\cancel{2a}=0$

$tgx=1$ – корень

atg

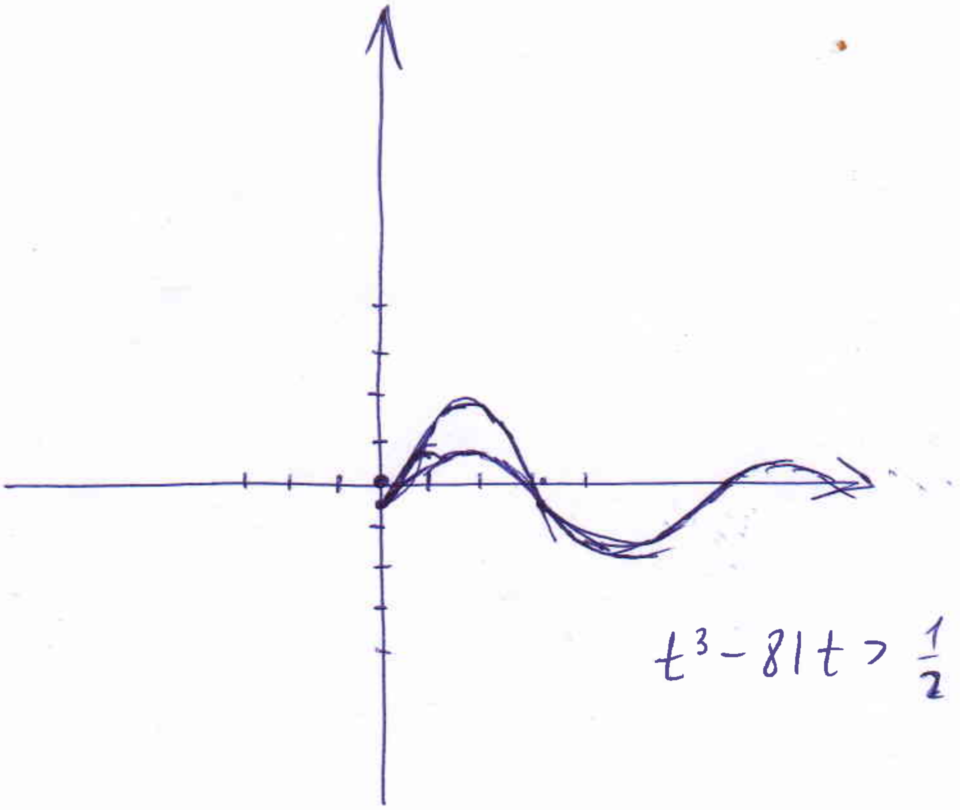
$tg^2x(a\,tgx+2-a-a^2)$

$tgx(a\,tg^2x+a^2-2a-2)$

$a\,tg^3x+(2-a-a^2)tg^2x+(a^2-2a-2$

$$
\begin{array}{l|l}
a\,tg^3x+(2-a-a^2)tg^2x+(a^2-2a-2)tgx+2a & tgx-1 \\
\cline{2-2}
-\;a\,tg^3x-a\,tg^2x & a\,tg^2x+(2-a^2)tgx-2a \\
\cline{1-1}
\quad \cancel{2tg^2x}(2-a^2)tg^2x+(a^2-2a-2)tgx & \\
\quad -\;(2-a^2)tg^2x+(2-a^2)tgx & \\
\cline{1-1}
\qquad -2a\,tgx+2a & \\
\qquad -2a\,tgx+2a & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Черновик



$t^3 - 81t > \frac{1}{2}$

$t(t^2 - 81)$

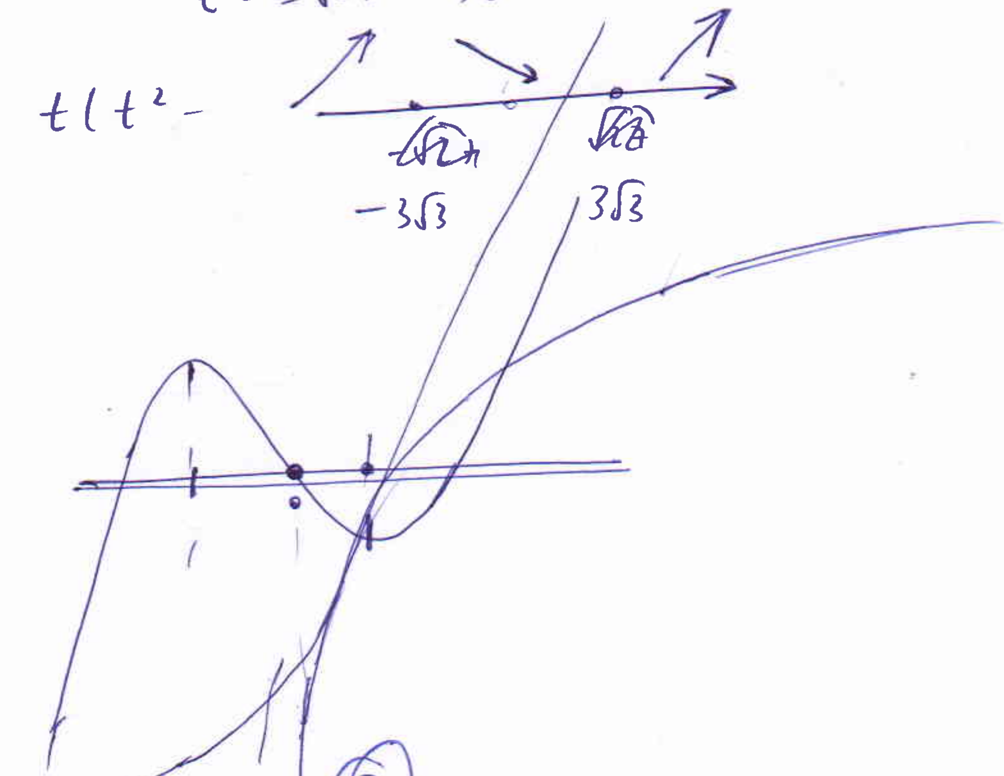
$3t^2 - 81 = 0$

$t^2 = 27$

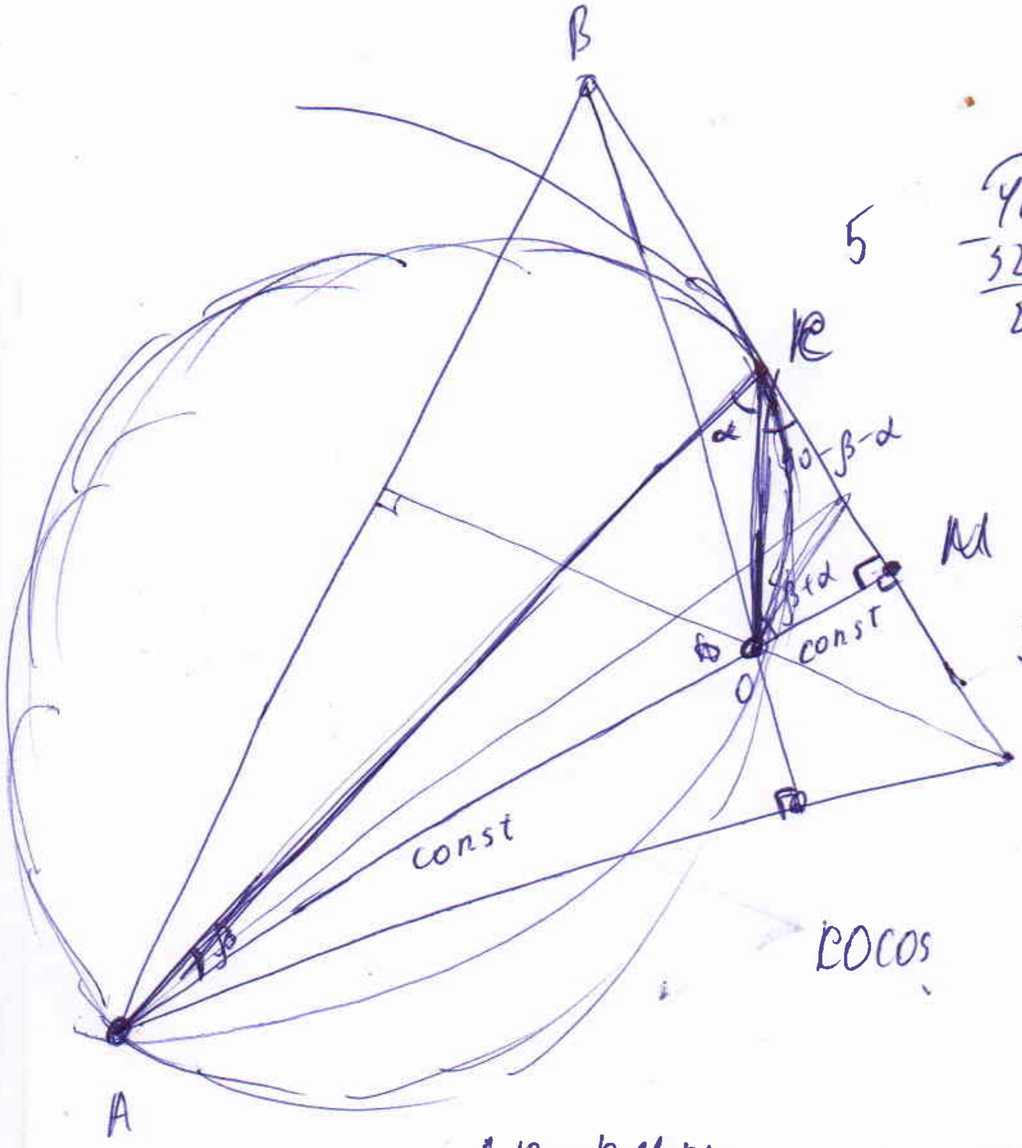
$t = \pm\sqrt[3]{27}$

$t = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$

$a_{min} = t(t^2 -$



Черновик



$\begin{array}{r|l} 400 & 16 \\ -32 & 25 \\ 80 & \end{array}$

200

40

$\frac{100}{4}$

$144 \,|\, \frac{4}{36}$

9

$36\cdot 3 = 108$ 9.

КОСОS

$\times\begin{array}{r} 25 \\ 9 \end{array}$

$AK = \frac{KM}{\sin\beta} \sin$

$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400} + \frac{11}{900}$

$(n+1)$

$\frac{AO}{\sin\alpha} = max$

$108 + 20 + 7$

$2n+1 = k$

$\frac{135\cdot 25 + 81}{3600}$

$\frac{KM}{\sin\beta}$

$\frac{\left(\frac{k-1}{2}+1\right) k}{\left(\frac{k-1}{2}\cdot\frac{(k+1)}{2}\right)^2}$

$135 \cdot 25$

$\times\begin{array}{r} 135 \\ 25 \\ \hline 675 \\ 270 \\ \hline 3375 \end{array}$

$\frac{3375+81}{2}$

$+\begin{array}{r} 3375 \\ 81 \\ \hline 3456 \end{array}$

$\frac{k}{\frac{(k^2-1)^2}{16}}$

$\frac{16k}{(k^2-1)^2}$

3

Черновик

$(k^2-1$

$$\frac{16k}{(k-1)^2(k+1)^2}$$

$$\frac{18}{(k-1)^2}$$

$$\frac{8}{(k+1)^2}-\frac{8}{(k-1)^2} \quad 8k^2$$

$$\frac{8}{(k-1)^2}-\frac{8}{(k+1)^2}$$

$\cancel{8k^2+16}k$

$$\underline{4k^2+8k+4-4k^2+8k-4}$$

$$\frac{4}{2^2}-\frac{4}{4^2}+\frac{4}{4?}$$

$$1-\frac{4}{16}=\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

~~Чистовик~~ Черновик

~~Согласно нер-ву о средних.~~

~~$a + \frac{2}{a} \in (-\infty; -2\sqrt{2}] \cup$~~

~~$\frac{a+\frac{2}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{2}{a}}$, $a > 0 \Leftrightarrow a + \frac{2}{a} \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow$ ~~min~~ минимальное~~

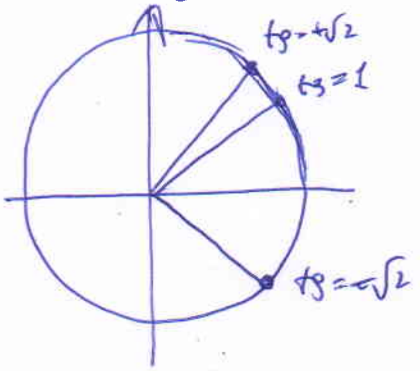
~~значение расстояния между корнями~~

Получающиеся корни x_1 и x_2 находятся в разных четвертях. Найдем тангенс от $(x_1 - x_2)$ и $(x_2 - x_1)$:

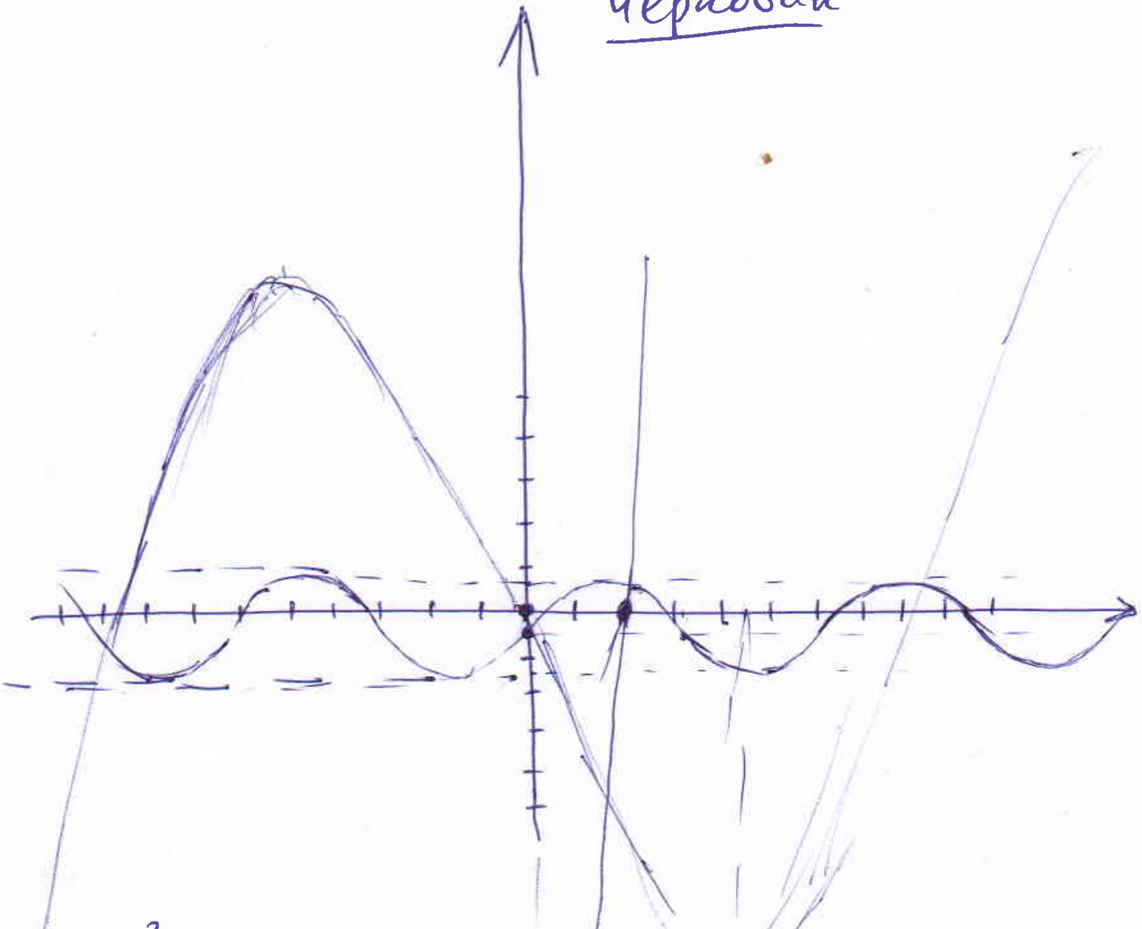
$$\left[\begin{aligned} tg(x_1 - x_2) &= \frac{tg x_1 - tg x_2}{1 + tg x_1 tg x_2} = \frac{a + \frac{2}{a}}{1 - 2} = -\left(a + \frac{2}{a}\right) \\ tg(x_2 - x_1) &= \frac{tg x_2 - tg x_1}{1 + tg x_1 tg x_2} = \frac{-a - \frac{2}{a}}{-1} = a + \frac{2}{a} \end{aligned}\right.$$

Из нер-ва о средних:

$a + \frac{2}{a} \in (-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$. При $tg(x_{12} - x_{21}) < 0$ $x_{12} - x_{21} > \frac{\pi}{2}$; при $tg(x_{21} - x_{12}) > 0$ $x_{21} - x_{12} < \frac{\pi}{2}$, при этом минимальное знач. достигается при минимальном тангенсе, то есть для минимизации расстояния требуется $a = \pm\sqrt{2}$ (крайние значения в нер-ве о средних достигаются при $a = \frac{2}{a}$).



Черновик



$(3\sqrt{3})^3$

$27\cdot 3$

$3 \quad 27\cdot 3^{\frac{2}{3}} - 27\sqrt[3]{9} - 81\cdot 3\sqrt{3}$

$27\cdot 3\sqrt{3} - 81\cdot 3\sqrt{3}$

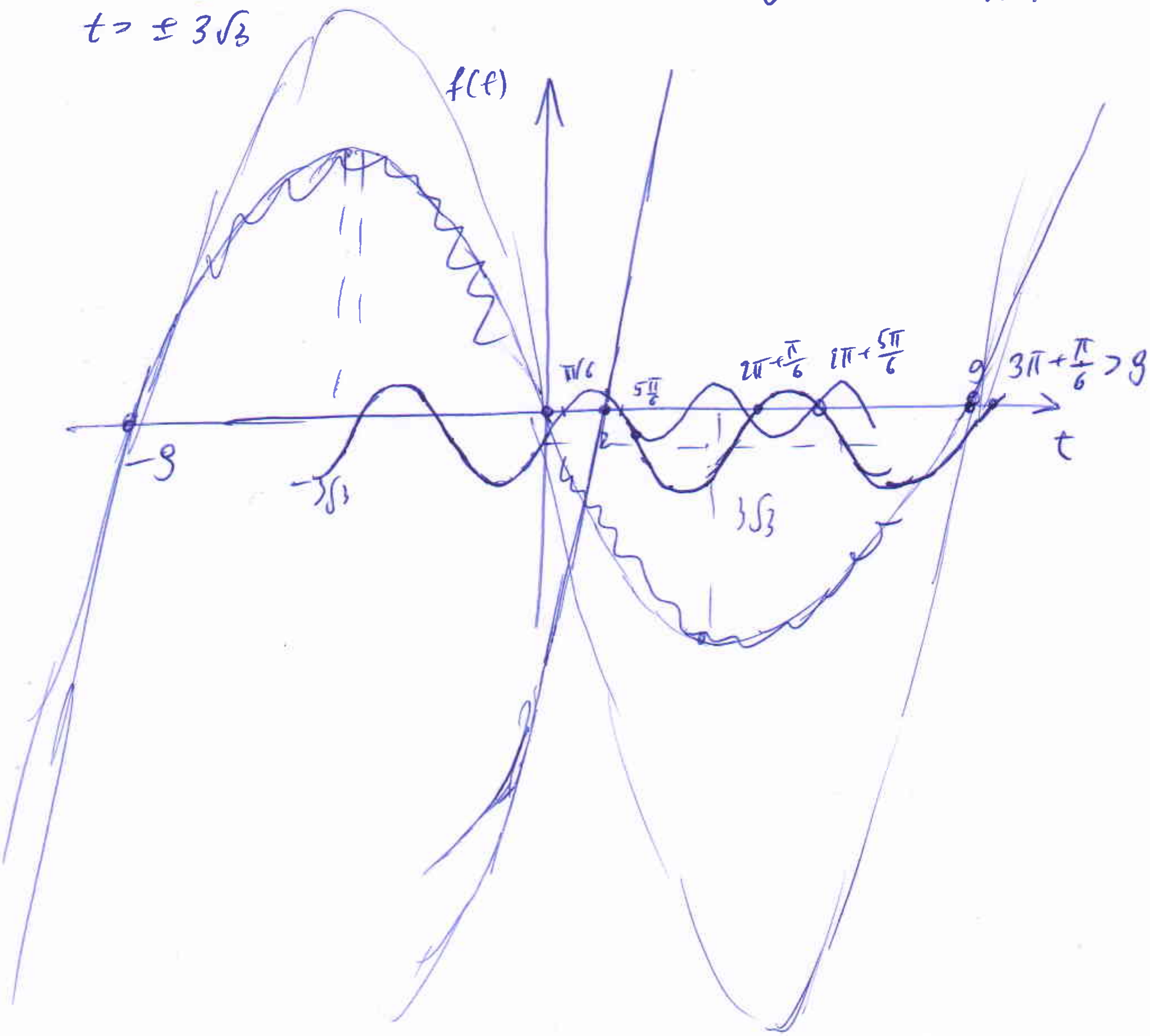
$54\cdot 3\sqrt{3}$

6, $\quad \frac{5}{6}\cdot \quad 3{,}14\cdot 5$

$2{,}5 + 6{,}28$

№5 ~~Чистовик~~ Черновик

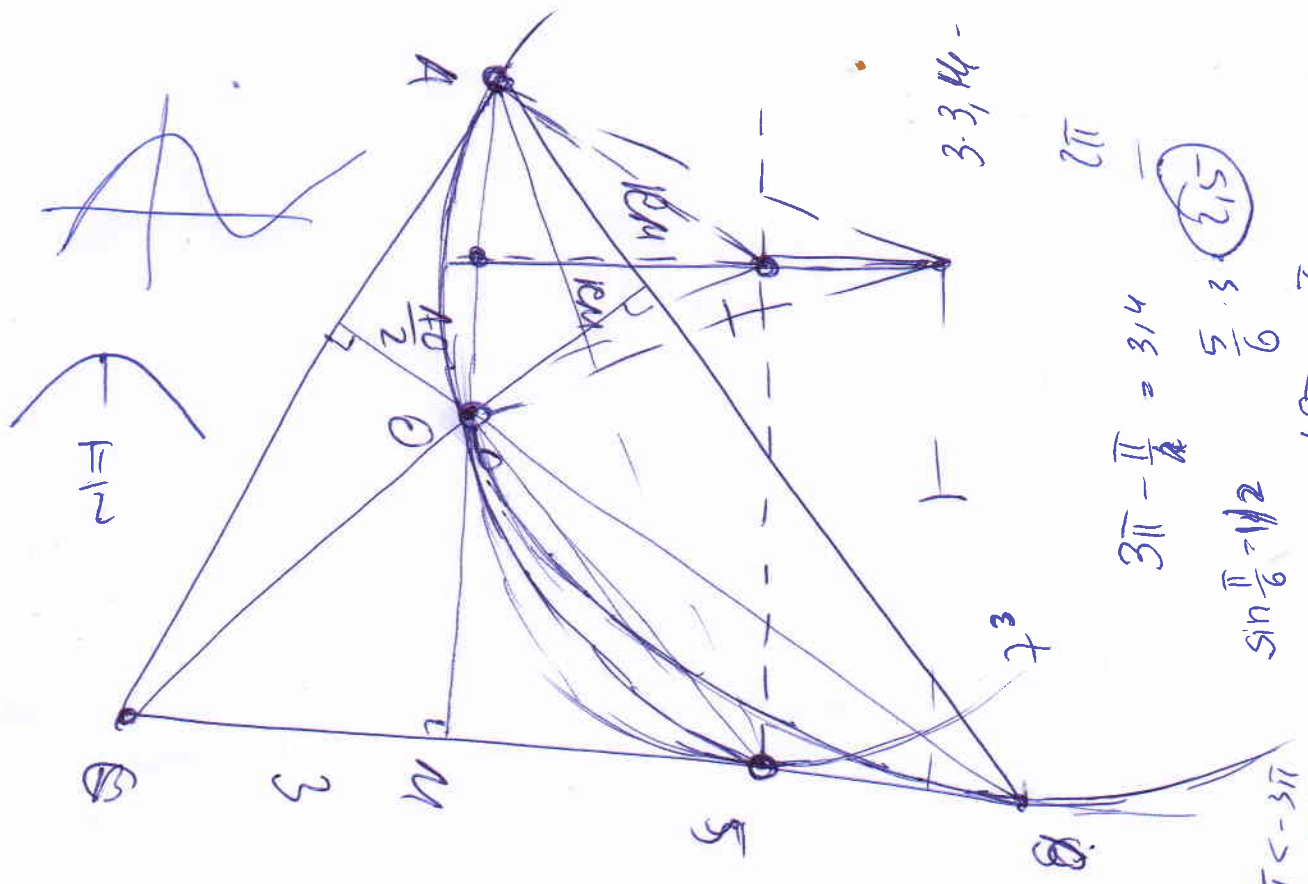
Нарисуем схематично графики всех функций $4a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, учитывая, что у $a(t)$ два экстремума в т. $t = \pm 3\sqrt{3}$



На графике нетрудно заметить, что при $t \in \left(2; \frac{5\pi}{6}\right)$ среднее число положительно. При $x \geq 9$ средняя функция также положительна, ~~а при $x < 9$~~ (две функции, как минимум больше нуля), а при $x < 9$ — отрицательная. На промежутке $\left[2\pi + \frac{5\pi}{6}; 9\right]$ ~~все три~~ две функции отрицательны, значит, и средняя отрицательна. На промежутке $\left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right]$ $c(t)$ — средняя функция, она положительна при $t \in \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right.$

7

Черновик



$a\,tg^3x - a\,tg^2x + (2-a^2)tg^2x - (2-a^2)tgx - 2a\,tgx + 2a$

$a\,tg^3x + (2-a^2-a)tg^2x + (a^2+2a-2)tgx$

$tg\frac{\pi}{2} - tg\frac{\pi}{4}$

$tg\frac{\pi}{4} - 1$

$KM^2 + \frac{(AO)^2}{4} = \frac{AO^2}{4} + AO\cdot OM + OM^2$

$KM^2 =$

$\boxed{KM = \sqrt{OM(AO+OM)}}$

$3\cdot\frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$t^2-81=0$

$t=9$

$t=0$

$3\cdot 1{,}7$

$3\pi - \frac{\pi}{4} = 3{,}4$

$\sin\frac{\pi}{6} = 1/2$

$\frac{5\pi}{6} - 4\pi < -3\pi$

$-3\frac{\pi}{6},\ 3\cdot\frac{\pi}{6}\ 3\frac{\pi}{6}$

$\frac{19\pi}{6} - 3\frac{\pi}{6}$

$\frac{5}{6}\cdot 3$

$2{,}5$

$a=\sqrt{2}$

$tgx_2 = -\sqrt{2}$

$tgx_1 = \sqrt{2}$

$tg(x_2-x_1) = \frac{2\sqrt{2}}{1+2} = -2\sqrt{2}$

$tg(x_1-x_2) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{1}$

$\sin t = \frac{1}{2}$

$t = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$

$3t^2-81=0$

$t = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\frac{5\pi}{6} - 4\pi$

$-\frac{19\pi}{6}$

8

Чистовик

№ 1

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$\cancel{B = B_1}$ Рассмотрим B:

Каждый член суммы B имеет вид:

$$B_i = \frac{k}{\left(\frac{k-1}{2} \cdot \frac{k+1}{2}\right)^2} = \frac{16k}{(k-1)^2(k+1)^2}.$$ Заметим, что

$$\frac{16k}{(k-1)^2(k+1)^2} = \frac{4}{(k-1)^2} - \frac{4}{(k+1)^2}.$$ Действительно:

$$\frac{4}{(k-1)^2} - \frac{4}{(k+1)^2} = \frac{4k^2+8k+4-4k^2+8k-4}{(k-1)^2(k+1)^2} = \frac{16k}{(k-1)^2(k+1)^2}.$$

Таким образом:

$$B = \frac{4}{2^2} - \frac{4}{4^2} + \frac{4}{4^2} - \frac{4}{6^2} + \frac{4}{6^2} \ldots - \frac{4}{80^2} = \frac{4}{4} - \frac{4}{80^2} =$$

$$= 1 - \frac{4}{80^2} < 1 \Rightarrow B < A$$

$\boxed{\text{Ответ: } B < A}$

Чистовик

№2

Запишем ~~чис~~ двузначные числа кратные 23 и 19:

19	23
19	23
38	46
57	69
76	92
95	

Видно, что после 4 может идти только 6, после 6 – 9 и т.д, пока мы не дойдем до 9: 469...

Возникает два варианта: 2 или 5. рассмотрим каждый:

1) $\boxed{2}$ – 469238x - после 8 мы не можем ничего поставить

2) $\boxed{5}$ – 469576957695(7695).

2 не подходит, исходя из выше сказанного

Значит, подходит только 5, при этом возникает период из чисел 7695, и на последнем месте будет стоять число, порядковый номер которого совпадает с 2021 mod 4 = 1 – 7. (в случае ~~20~~ x mod 4 = 0 было бы четвертое число)

Таким образом, на последнем месте стоит 7

Ответ: 7

Чистовик

№3

Рассмотрим, как ведет себя значение функции при применении композиции:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}} \Rightarrow f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[11]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}\right)^{11}}}=\frac{1}{\sqrt[11]{1-\frac{1}{1-x^{11}}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[11]{\frac{1-x^{11}-1}{1-x^{11}}}}=\sqrt[11]{\frac{\cancel{x-1}\ x^{11}-1}{x^{11}}}=\sqrt[11]{1-\frac{1}{x^{11}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[11]{1-1+\frac{1}{x^{11}}}}=x \Rightarrow f(f(f(f(x))))=\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}=f(x)-$$

— функция повторяет значения с периодом 3.

Найдем: 1306 mod 3:

$$1306 \bmod 3 = 1 \Rightarrow \underbrace{f(f(\ldots f}_{1306}(2022))))\ldots))=f(2022)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$$

Ответ: $\underbrace{f(f(f\ldots}_{1306}f(2022)))\ldots))=f(2022)=\frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$

Чистовик

№4

~~В п~~

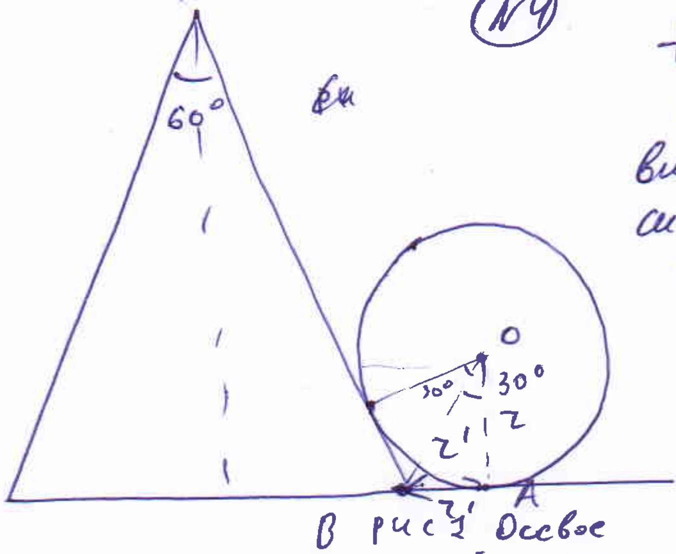


рис 1 - Осевое сечение

На рисунке 2 видно, что всю систему шаров и конуса можно заменить 34-угольником, вписанном в окружность радиусом $R+r'$, где $r'=AB$ (рис. 1). R — радиус конуса.

Можно это сделать потому, что $OA \perp$ плоскости основания конуса, и A проецируется на эту плоскость в т. O, центр шара.

рис. 2.

Сечение плоскостью, параллельной плоскости основания

$$\alpha \text{ (рис. 3)} = \frac{2\pi}{34} = \frac{\pi}{17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{r = \sin\frac{\alpha}{2}}$$

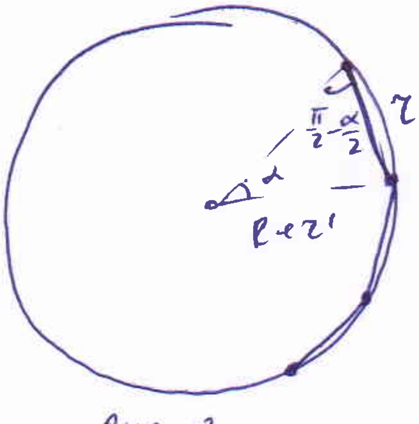


рис. 3.

$r=2$

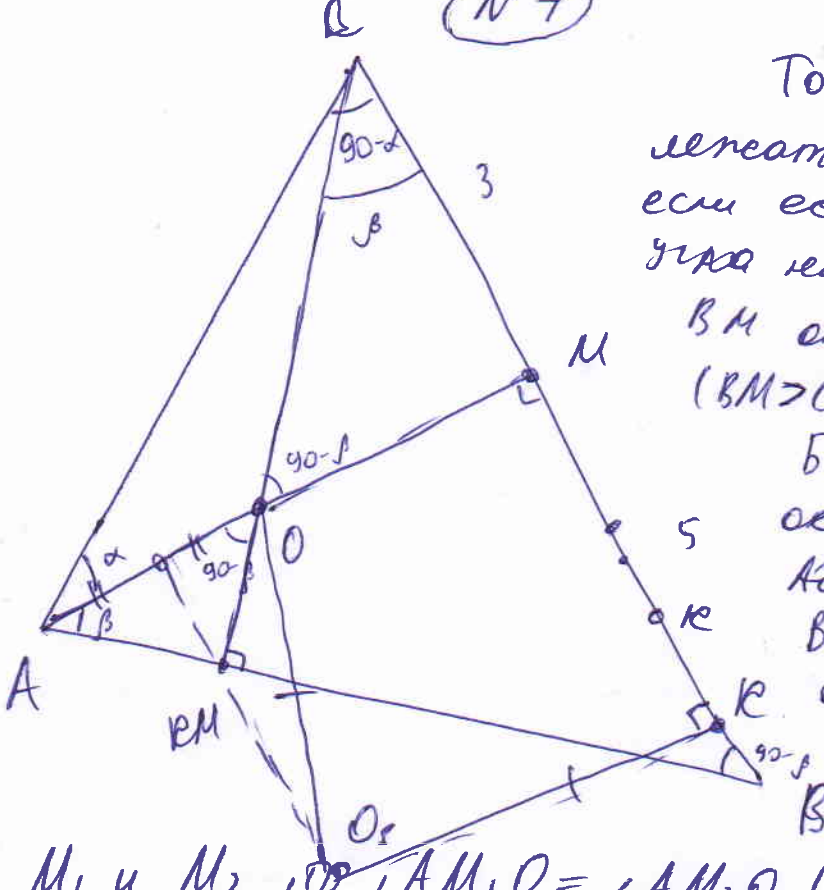
$$r = 2(R+r')\sin\frac{\alpha}{2} = 2(R+r')\sin\frac{\pi}{34} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{r}{2\sin\frac{\pi}{34}} - r', \quad r' = r\,\mathrm{tg}\,30° = \frac{r}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{r}{2\sin\frac{\pi}{34}} - \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{34}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \frac{1}{\sin\frac{\pi}{34}} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = R}$$

Чистовик

№7



Точка K должна лежать на BM, т.к. если есть точка максимального угла на CM, то и на BM она тоже есть. (BM>CM)

Будем проводить окружности через AO, пересекающие BM. Если проведенная окружность пересекает BM в двух точках M_1 и M_2, то $\angle AM_1O = \angle AM_2O$ (по св-ву вписанных углов). Значит, угол $\angle AKO$ максимален, когда окружность через AO касается BM. Значит, центр окружности O_1 (описанной около $\triangle AKO$) лежит на перпендикуляре к BM ($O_1K \perp BM$) и на серединном перпендикуляре к AO. Значит:

$$\frac{AO^2}{4} + KM^2 = \frac{AO^2}{4} + \frac{AO}{2} \cdot 2 \cdot MO + MO^2 \Rightarrow KM = \sqrt{MO \cdot AM}$$

$$tg\beta = \frac{5}{AM} = \frac{OM}{3} \Rightarrow AM \cdot OM = 15 \Rightarrow KM = \sqrt{15} = \sqrt{CM \cdot BM}$$

$\boxed{\text{Ответ: } \sqrt{15}}$

Чистовик

№6

$a\,tg^3x+(2-a-a^2)\,tg^2x+(a^2-2a-2)\,tgx+2a=0$

Заметим, что при $tgx=1$ функция обращается в нуль: $a+2-a-a^2+a^2-2a-2+2a=0$

Значит, одним из корней уравнения является $tgx=1$ или $x=\frac{\pi}{4}$, учитывая условие задачи $\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Выполнив деление многочлена на одночлен $tgx-1$, получаем:

$P(x)=(tgx-1)(a\,tg^2x+(2-a^2)\,tgx-2a)$

Выделим многочлен:

$Q(x)=a\,tg^2x+(2-a^2)\,tgx-2a.$

Найдем дискриминант:

$D=4-4a^2+a^4+8a^2=(a^2+2)^2\Rightarrow$ корни уравнения -

$$\left[\begin{aligned}&tgx_1=\frac{a^2-2+a^2+2}{2a}=a\\&tgx_2=\frac{a^2-2-a^2-2}{2a}=-\frac{2}{a}\end{aligned}\right.$$

На промежутке $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и $[0;\pi]$ $tg(x)$ - возрастающая функция, поэтому если $x=max$, то и $tgx=max$. Значит:

$$\left[\begin{aligned}&tg(x_2-x_1)_{max}=max=\frac{tgx_2-tgx_1}{1+tgx_2\,tgx_1}=\frac{-\frac{2}{a}-a}{1+\left(-\frac{2}{a}\right)\cdot a},\\&tg(x_1-x_2)_{max}=max=\frac{tgx_1-tgx_2}{1+tgx_2\,tgx_1}=\frac{a+\frac{2}{a}}{1+\left(-\frac{2}{a}\right)a}\end{aligned}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&tg(x_2-x_1)_{max}=a+\frac{2}{a}\\&tg(x_2-x_1)_{max}=-\left(a+\frac{2}{a}\right)\end{aligned}\right.$$

Чистовик

Получающиеся корни x_1 и x_2 находятся в разных четвертях, пусть $a>0$, тогда $x_1>0$; $x_2<0 \Rightarrow$ ~~tg~~ $x_1-x_2>0$. Найдем $tg(x_1-x_2)$ — тангенс расстояния между корнями:

$$tg(x_1-x_2) = \frac{a+\frac{2}{a}}{1-2} = -a-\frac{2}{a}.$$

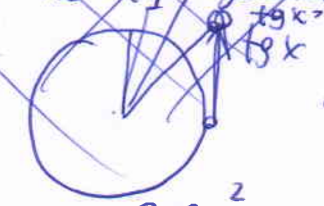
При $a>0$ $\frac{a+\frac{2}{a}}{2} \geq \sqrt{a\cdot\frac{2}{a}} \Leftrightarrow a+\frac{2}{a} \geq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -(a+\frac{2}{a}) \leq -2\sqrt{2}$ — расстояние между корнями превышает $\frac{\pi}{2}$

Пусть $a<0$, тогда $x_2>0$, $x_1 \leq 0$

x_2-x_1 — расстояние между корнями

~~$tg(x_2-x_1) = \frac{a+\frac{2}{a}}{1} = a+\frac{2}{a} \geq 2\sqrt{2}$. Минимальное значение x_2-x_1 достигается как раз при $tg(x_2-x_1) = 2\sqrt{2}$~~

$tg\,x \to min \Rightarrow x \to min$



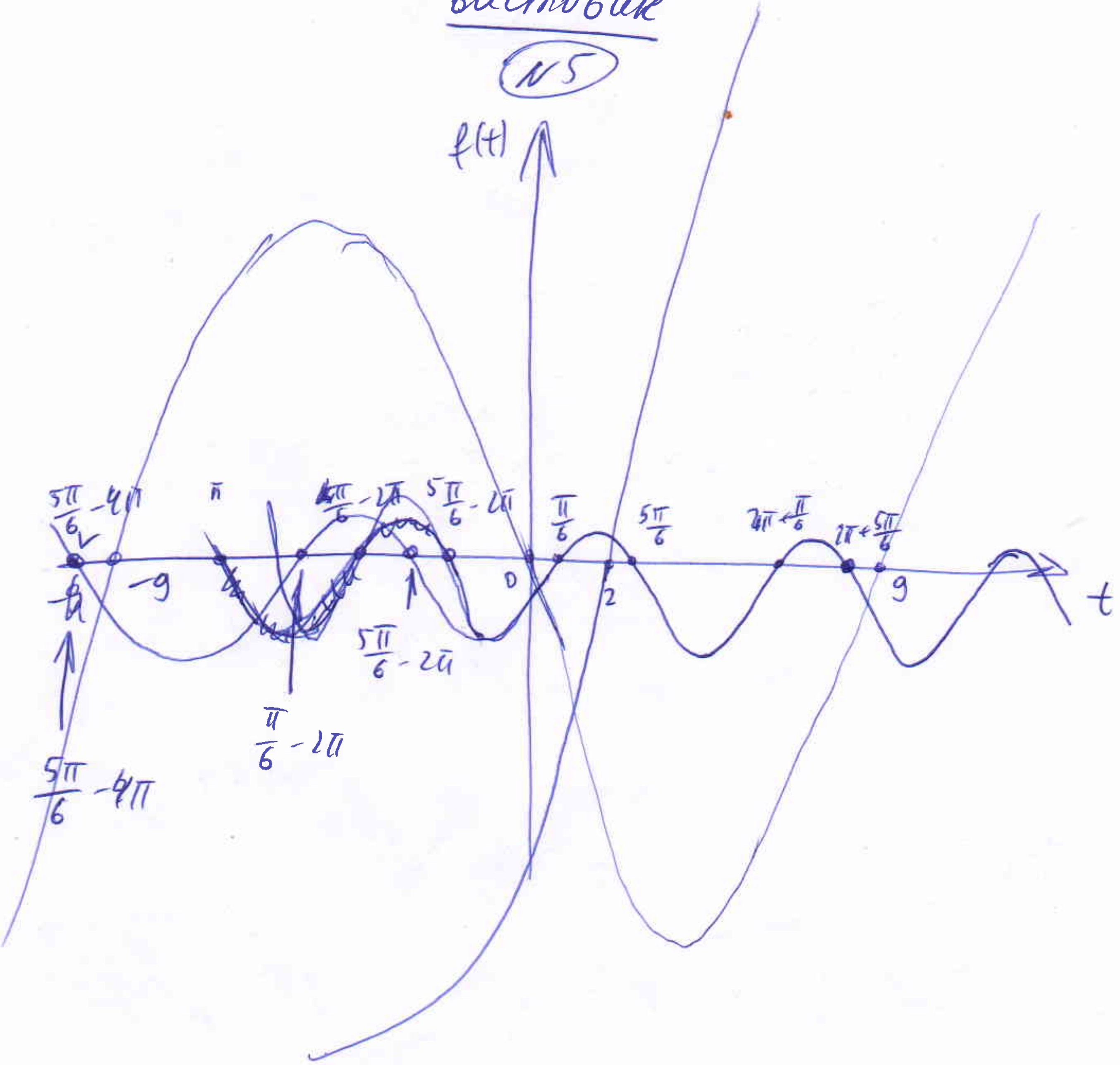
$$tg(x_2-x_1) = \frac{a+\frac{2}{a}}{1};\quad a+\frac{2}{a} \leq -2\sqrt{2} \text{ при } a<0.$$

Значит, минимальное значение расстояния между x_1 и x_2 (~~x_1, x_2~~ положительно) равно $\pi - arctg(+2\sqrt{2})$ ~~$= \pi - arctg(2\sqrt{2})$~~ ($tg(x)$ при $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ убывает), достигается при $a=\pm\sqrt{2}$. Расстояние от точек x_1 до $\frac{\pi}{4}$ и x_2 до $\frac{\pi}{4}$ меньше $\pi - arctg(2\sqrt{2})$, то есть это расстояние наибольшее. В иных случаях на расстояние между точками x_1 и x_2 больше, значит, невозможно достигнуть меньшего расстояния (наибольшего)

$\boxed{\text{Ответ: } a=\pm\sqrt{2}}$

Чистовик

№5



Из графика видно, что при $t \in (2; \frac{5\pi}{6}) \cup (2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}) \cup (9; +\infty)$ ф. функция положительна. Также видно, что при ~~$t \in [\frac{5\pi}{6} - 2\pi; \frac{\pi}{6} - 2\pi$~~ $t \in (\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi)$ ф. функция положительна

(нули $a(t) - \{0; -9; 9\}$, нули $b(t) \in \{2\}$, нули $c(t) \in \{\pi/6 + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\}$)

$\boxed{\text{Ответ: } t \in (\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi) \cup (2; \frac{5\pi}{6}) \cup (2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}) \cup (9; +\infty)}$