



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Истратова Ксения Михайловна**

Класс: **7 класс**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6
Оценка	15	10	15	15	0	15

Задача 1.

А	Б	В
x	220-x	240-x

Пусть итанише А поднял x кл.
 Тогда итанише Б поднял 220-x
 (A+B=220 (по уел))
 Тогда итанише В поднял 240-x
 (A+B=240 (по уел))

Тогда $(220-x) + (240-x) = 250$ (Б+В = 250 (по уел))

$$220 + 240 - 2x = 250$$

$$460 - 2x = 250$$

$$2x = 460 - 250$$

$$2x = 210$$

$$x = 105$$

$$220 - x = 115, \quad 240 - x = 135$$

А - 105 кл

Б - 115 кл

В - 135 кл

т.е победитель - В и он поднял 135 кл.

Ответ: 135 кл

Задача 2

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{xy}{2022} - \frac{2022y}{x} - \frac{2022x}{y} = 0$$

$$\frac{xy - 2022y - 2022x}{2022 \cdot x \cdot y} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} x, y \neq 0 \\ (\text{иначе знаменатель} = 0) \end{array} \right\}$$

Дробь равна 0, когда числитель = 0

$$xy - 2022y - 2022x = 0$$

$$y(x - 2022) - 2022(x) = 0 \quad | + 2022^2$$

$$y(x - 2022) - 2022(x - 2022) = 2022^2$$

$$(y - 2022)(x - 2022) = 2022^2$$

Примем $x, y \in \mathbb{Z}$

Рассмотрим первую скобку $(y - 2022)$:

$$y - 2022 = \text{делитель } 2022^2,$$

т.е. $|y - 2022| = \text{одно из дел. числа}$

Всего делителей числа $2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$

$$2022^2 = (2+1)(2+1)(2+1) = 3^3$$

$$\text{Число делителей числа } n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k} = \prod_{i=1}^k (a_i + 1)$$

$$\text{т.е. } |y - 2022| = 1, 2, 3, 337, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 337, \dots, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$$

Тогда значений $y - 2022$ 27 чисел

Примем для каждого значения $y - 2022$ (отриц. и полож.) $\rightarrow y = 546$ -та

Уравнение имеет 54 решений среди $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{r|l} 2022 & 2 \\ 1011 & 3 \\ \hline 337 & 337 \\ & 1 \end{array}$$

(337 - простое, т.к. не кратно делителем (простым))

то корни: 19, 17, 13, 11, 7, 5, 3, 2

Задача 4.

Мистович

Стр. 3.

$x_1, x_2, x_3 \dots x_n$

Нарисуем, для наглядности, небольшую таблицу зависимости значений от индекса:

значение x_i	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1
индекс i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Заметим, что все x_i разбиваются на группы $1, 1, -1, -1, -1, 1, -1$
 где первый $n \equiv 1$ (индекс) $\neq 7$, последний $n \equiv 0$ (индекс) $\equiv 1$.
 Причем числа $= 1$, а (индексы которых) $\equiv 1, 2, 6 \pmod 7$.

И остальные числа $= -1$.

Тогда x_{2022} , индекс которого $\equiv 6 \pmod 7$ ($2022 = 288 \cdot 7 + 6$), $x_{2022} = 1$,

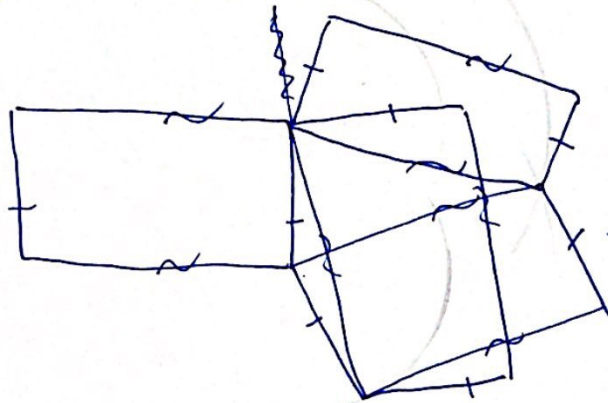
т.е. $x_{2022} = 1$ и мы это доказали.

Ответ: $x_{2022} = 1$

Задача 3

Митовик

стр 4



Возможна
такая
картинка

Неясно только,
что все четырехг. равны
и во всех вершинах
пересекаются так 3 прямые.

Ответ: Да, возможно.

Задача 6.

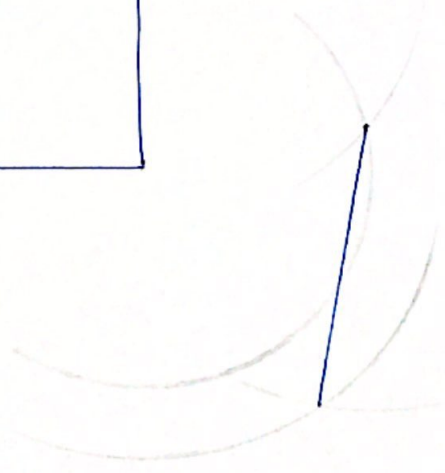
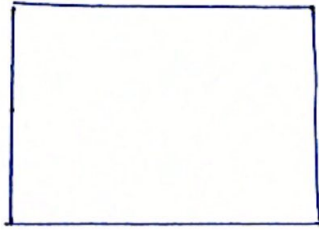
Оценка на 8: Поищем, что каждую лампочку нужно изменить ≥ 6 раз. Т.е. всего изменений будет $\geq 6 \cdot 4 = 24$. За каждый ход мы делаем 3 изменения, т.е. ходов $\geq \frac{24}{3} = 8$.

Оценка на 8 доказана

Вагалар

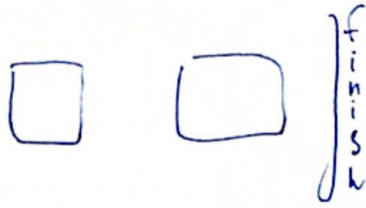
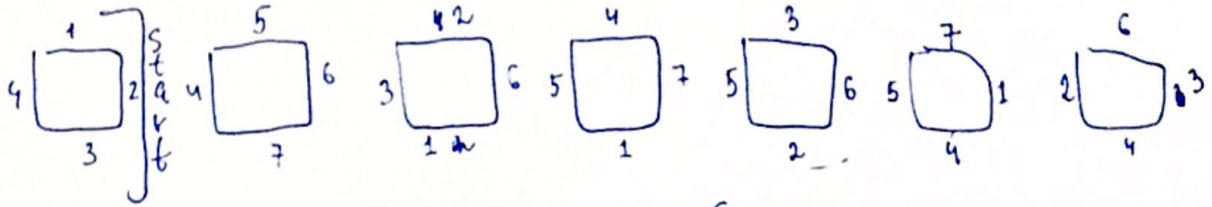
Чертөөлүк ~~Чертөөлүк~~

сүрүтү сүр 6

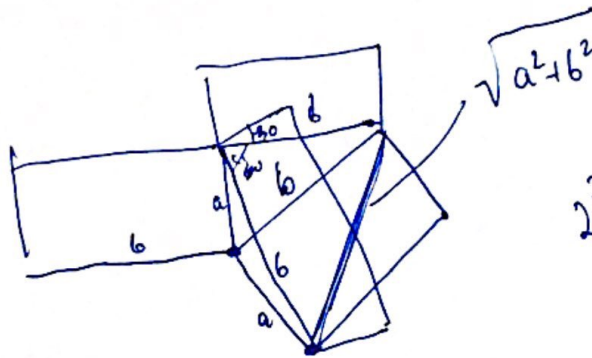
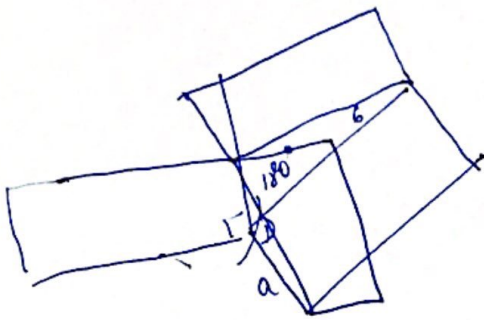


Чертежи

ср 7

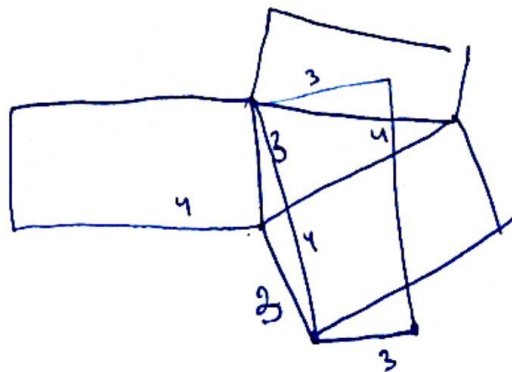


- 1: X
- 2:
- 3:
- 4: 1, 6, 7.



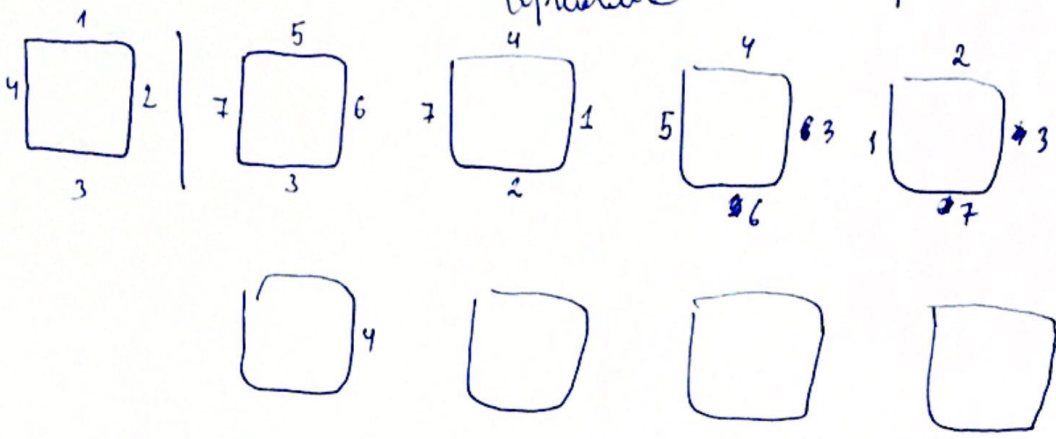
$$2^2 + 4^2 = 20$$

$$2\sqrt{5}$$

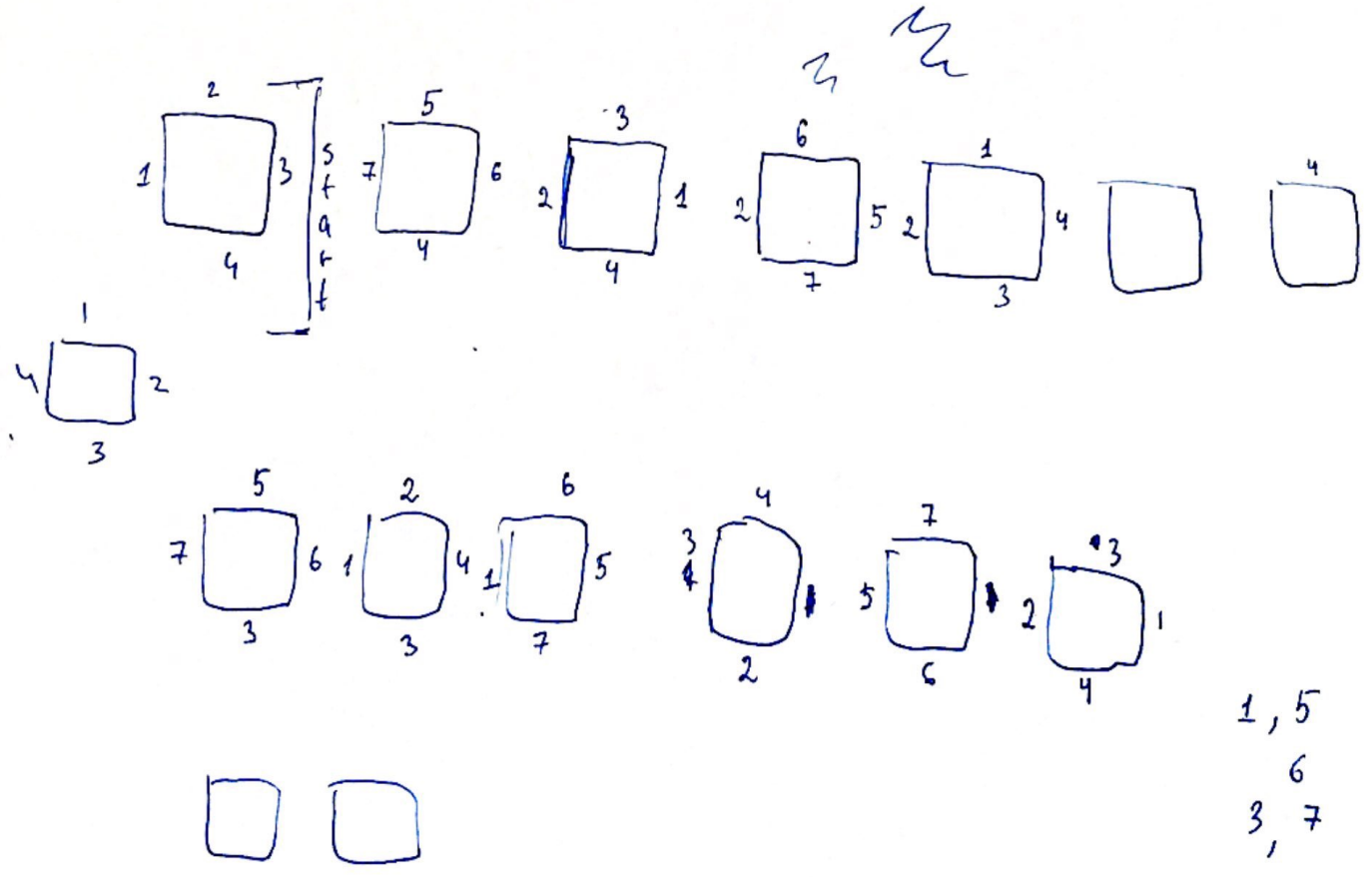


Чеприхува

срп 8



	1	2	3	4	5	6	7
1:	+	+		+	+		
max	0	4		2	1		
2:	+	+	+			+	+
max	2	0	3			1	4
3:		+	+			+	+
max		2	0			3	4
4:	+			+	+		
max	4			0	3		1

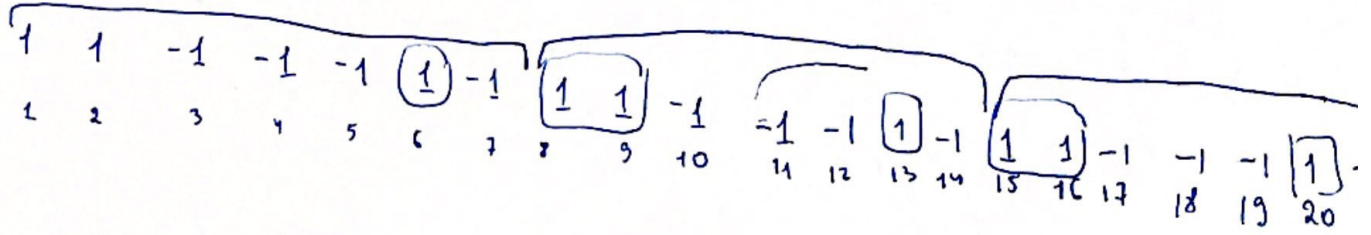


$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$$

Мерзобук

стр 9

1 1 -1 -1 -1 1 -1



$$x \equiv 6, 1, 2 \pmod{7} \quad (=1)$$

$$\begin{array}{r} 2022 \\ -14 \\ \hline 62 \\ -56 \\ \hline 62 \\ -56 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$1) \quad \begin{array}{ccc} A & B & B \\ x & 220-x & 240-x \end{array}$$

$$(220-x) + (240-x) = 250$$

$$460 - 2x = 250$$

$$2x = 210$$

$$\underline{x = 105}$$

$$\begin{array}{r|l} 2022 & 2 \\ 1011 & 3 \\ \hline 337 & \end{array}$$

31

$$105, 115, \underline{135}$$

2)

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{xy}{2022} - \frac{2022}{x} - \frac{2022}{y} = 0$$

$$xy - 2022y - 2022x = 0$$

$$y(x - 2022) - 2022 \cdot (x) = 0 \quad | + 2022^2$$

$$y(x - 2022) - 2022(x - 2022) = 2022^2$$

$$(y - 2022)(x - 2022) = 2022^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$$

кон-во

$$\text{выбрав} \downarrow = (\text{кон-во из } 2022^2) \cdot 2 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 2$$

2, 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 41 43 47

$$\begin{array}{r} 1501 \mid 17 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3100 : 2 = 1550 \\ - 1501 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2900 : 2 = 1450 \\ - 1850 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1501 \mid 19 \\ - 133 \\ \hline 171 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1501 \mid 13 \\ - 13 \\ \hline 20 \\ - 13 \\ \hline 71 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1501 \mid 17 \\ - 136 \\ \hline 141 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1501 \mid 23 \\ - 138 \\ \hline 121 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ \times 6 \\ \hline 18 \\ \times 19 \\ \times 7 \\ \hline 63 \\ \times 8 \\ \hline 56 \\ \times 1 \\ \hline 136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1501 \mid 12 \\ - 138 \\ \hline 137 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 19 \\ \times 7 \\ \hline 63 \\ \times 8 \\ \hline 56 \\ \times 1 \\ \hline 136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1501 \mid 29 \\ - 145 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ \times 5 \\ \hline 45 \\ \times 10 \\ \hline 145 \end{array}$$

//

$$\begin{array}{r} 1501 \mid 4 \\ - 11 \\ \hline 40 \\ - 33 \\ \hline 71 \end{array}$$

~~138~~

$$1501 \mid$$

Черновик

стр 12

$$\begin{array}{r} 198 \\ \times 198 \\ \hline 1584 \\ * \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 8 = 64 \\ 8 \cdot 8 = 72 \\ \times 200 \\ \times 200 \\ \times 200 \\ \hline \end{array}$$

$$\overline{ab+bc} = \underbrace{10(a+b)}_{\geq 20} + \underbrace{6+c}_{\geq 2}$$

$$\underbrace{8000000} =$$

$$100 \cdot 100 \cdot 100 = 10000000$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times 22 \\ \times 99 \\ \times 99 \\ \hline \end{array}$$

100, 100, 10

or

100, 10, 10

or 10 10 10

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 50 \\ \hline 60 \\ 250 \\ \hline 2500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 198 \\ \times 99 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 8 = 72 \\ 7 \end{array}$$

$$99 \cdot 99 = 10000$$

$$(100-1)^2 =$$

$$= 10000 - 200 + 1 = 9$$

$$\begin{array}{r} 10507 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1980000 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10501 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 157605 \\ 52545 \\ 10507 \\ \hline 1501 \end{array}$$

$$10507$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10507 \\ - 7 \\ \hline 35 \\ - 35 \\ \hline 07 \\ - 7 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$105 = 15 \cdot 7$$

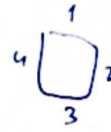
$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 9 \\ \hline 24 \\ 9 \\ \hline 104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 125 \\ 175 \\ 15 \\ 9 \\ \hline 1225 \end{array}$$

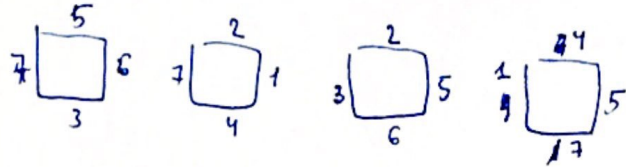
Книжка пошкочку не мислять 2 вога

стр 13

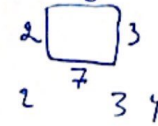
- 1: 1
- 2: 2
- 3: 3
- 4: 4



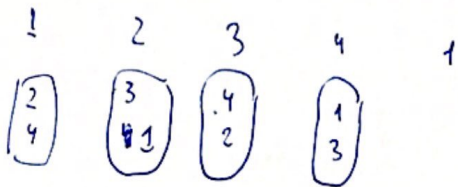
№	1	2	3	4
1	+0	+2		+4
2	+2	+0		+5
3	+3	+5	+0	+3
4	+4		+2	+0
5	+1	+3		
6	+5	+1	+3	+5
7			+4	+1



change 1, 2, 4



change 1, 3:



1: 3

3: 2, 1

4: 1, 2

6: 3, 4

5:

2: (4)

$$100 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$$

$$900 \cdot 90 \cdot 90 = \underbrace{\quad\quad\quad}_{10000} \underbrace{\quad\quad\quad}_{10000}$$

$$\overline{ab} + \overline{bc}$$

$$\overline{bc} + \overline{cd}$$

$$\overline{cd} + \overline{de}$$

$$\{00 \cdot 100 \cdot 10 = \sqrt{\quad\quad\quad}$$

$$\overline{ab} + \overline{bc} =$$

1000

$$= 10a + b + 10b + c =$$

$$= 10(a+b) + 6bc$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\leq 18} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{\leq 18}$
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_{\leq 180} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{\leq 198}$

198

abcde =

успех

ср 14

$$(ab + bc)(bc + cd)(cd + de) = \underbrace{157605}_{12} : 5, : 3$$

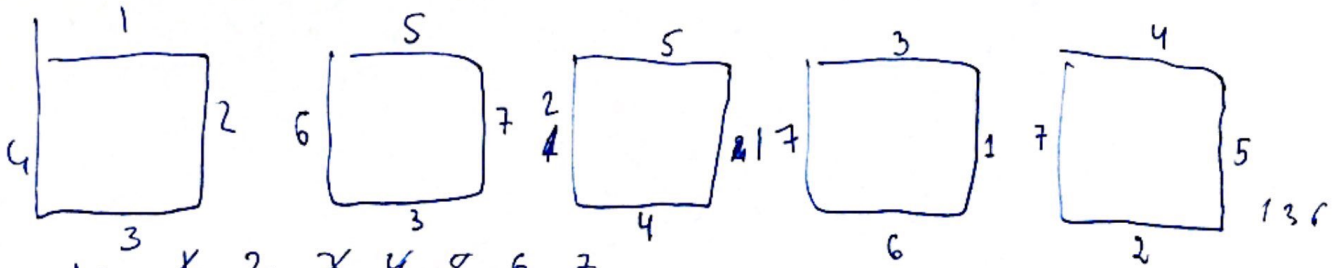
$$(10a+b + 10b+c)(10b+c + 10c+d)(10c+d + 10d+e) = 157605$$

$$(11b + 10a+c)(11c + 10b+d)(11d + 10c+e) = 157605$$

□ ○ □

change 3 = 1x09

min change 6. 4 = 24. → 8x0906



- 1: ✗ 2 ✗ 4 ✗ 6 7
- 2: ✗ 3 4 ✗ 6 7
- 3: ✗ 2 ✗ 4 5 ✗ 7
- 4: ✗ 1 ✗ 3 ✗ 5 ✗ 7

