МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Казадаева Марина Сергеевна**

Класс: **10 класс**

Технический балл: **50**

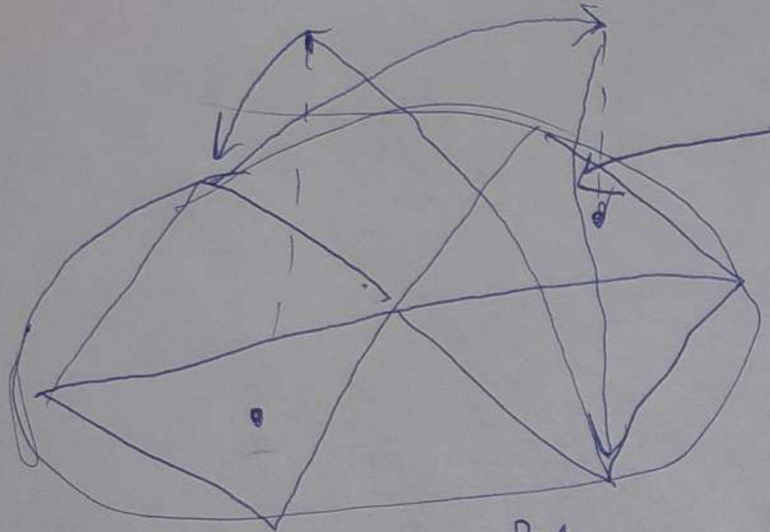
Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

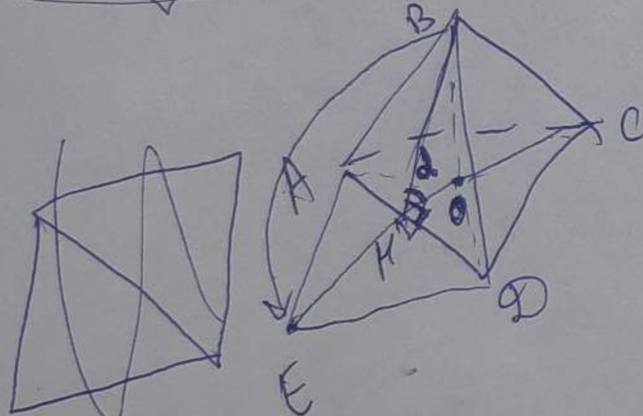
№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	5	15	0	5	15	0

ЧЕРНОВИК

(2)



длина этой прямой $2a$,
тогда длина всей траектории $4l$



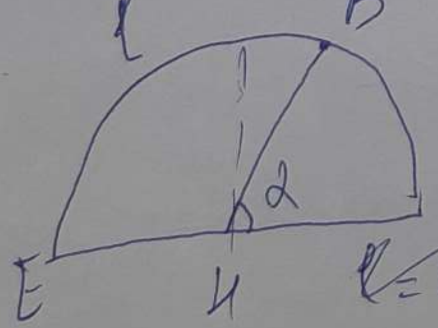
$AH = HD = 3$

$OH = \sqrt{CD^2 - HD^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$OH = \frac{1}{3} CH = \sqrt{3}$

$BH = CH = 3\sqrt{3}$

$\cos\alpha = \frac{OH}{BH} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}; \ \alpha = \arccos\frac{1}{3}$



$l = 2\pi -$ $l = 2\pi \cdot \frac{\pi - \alpha}{2\pi} = \pi - \alpha = \pi - \arccos\frac{1}{3}$

Ответ: $4\pi - 4\arccos\frac{1}{3}$

ЧЕРНОВИК

(5) $t^3+4t^2+4t+a=0$ имеет корни $x<y<z$

$$A=x^3+(-4y^2-4y)+(-4z^2-4z)+32=x^3+(y^3+a)+(z^3+a)+32=$$
$$=x^3+y^3+z^3+2a+32.$$

По т. Виета: $\begin{cases} xyz=-a & (1) \\ xy+xz+yz=4 & (2) \\ x+y+z=-4 & (3) \end{cases}$

$(3)^3$: $(x+y+z)^3=-4^3$, $x^3+y^3+z^3+6\overset{-a}{xyz}+3(x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y))\overset{-4^3}{=}$

$x^3+y^3+z^3=-4^3+6a-3(x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y))$ (*)

(2)·(3) $=(x+y+z)(xy+xz+yz)=-16$; $3xyz+x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)=-16$

$x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)=-16-3a$ подставим в (*)

$x^3+y^3+z^3=-4^3+6a+3(16+3a)=\cancel{15a}\overset{-3a}{}-16$. Итак, $x^3+y^3+z^3+2a+32=-a+16$

Ответ: $\boxed{-a+16}$

2

ЧЕРНОВИК

$22 \times 5 = 110$

$332 : 20 = 16$ (ост. 12)

$332 : 21 = 15$ (ост. 17)

$22 \times 16 = 352$

$354 : 20 = 17$ (ост. 14)

$354 : 21 = 16$ (ост. 18)

$21 \times 6 = 126$, $21 \times 7 = 147$, $21 \times 8 = 168$

$22 \times 17 = 374$

$376 : 20 = 18$ (ост. 16)

$376 : 21 = 17$ (ост. 19)

$22 \times 18 = 396$

$398 : 20 = 19$ (ост. 18)

$398 : 21 = 18$ (ост. 20)

$22 \times 19 = 418$

$22 \times 20 = 440$

$442 : 20 = 22$ (ост. 2)

$442 : 21 = 21$ (ост. 1)

$420 : 20 = 21$ (ост. 0)

$420 : 21 = 20$ (ост. 0)

6 см

6 раз

4 угла

4 стороны как

6 ребер

2022

единицы

22

$2022 : 3 = 674$

1011

Задача 1. ЧИСТОВИК

$$\begin{cases} x = 20m + r, \text{ где } 0 \le r \le 19,\ m \ge 0 \quad (1) \\ x = 21n + r + 1, \text{ где } n \ge 2 \quad (2) \\ x = 22k + 2, \text{ где } k \ge 0 \quad (3) \end{cases}$$

x, m, n, k, r – целые

$(1)-(2): 0 = 21n - 20m + 1;\ n = \dfrac{20m-1}{21} = m - \dfrac{m+1}{21}$

$(m+1) \vdots 21 \Rightarrow m = 21m_1 - 1$, где $m_1 \in N$

$x = 20 \cdot (21m_1 - 1) + r = 420m_1 + r - 20 \quad (4)$

$(4)-(3): 420m_1 + r - 20 - (22k+2) = 0;$

$22(k+1) = 420m_1 + r;\ k = \dfrac{420m_1 + r}{22} - 1$

$k = 19m_1 + \dfrac{2m_1 + r}{22} - 1$

Т.к. $0 \le r \le 19$, то $2m_1 \ge 3;\ m_1 \ge 1{,}5 \Rightarrow m_1 \ge 2$

Т.к. $x = 420m_1 + r - 20$, то нужно взять m_1 и r как можно меньше.

$(2m_1 + r) \vdots 22$, $2m_1 + r = 22$. Т.к m_1 вносит больший вклад в x, то возьмём его как можно меньше: $m_1 = 2;\ r = 18$

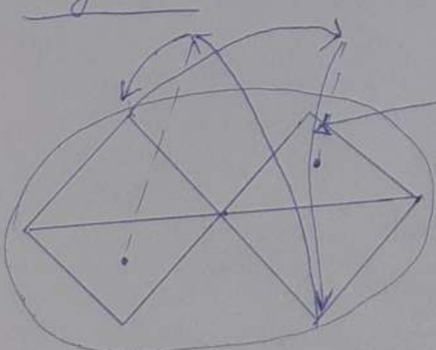
$x = 420 \cdot 2 + 18 - 20 = 838.$

Проверка: $838 = 41 \cdot 20 + 18;\ 838 = 39 \cdot 21 + 19$

$838 = 38 \cdot 22 + 2$

Ответ: 838.

Задача 2.



длина этой прямой $1a$, тогда длина всей траектории $4l$

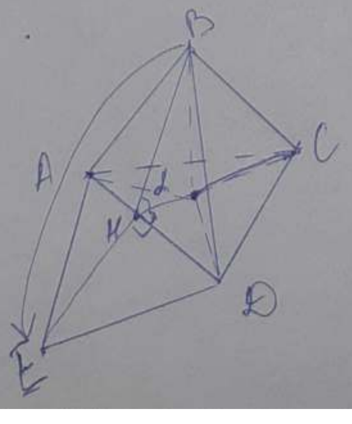
$AH = HD = 3$

$OH = \sqrt{CD^2 - HD^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

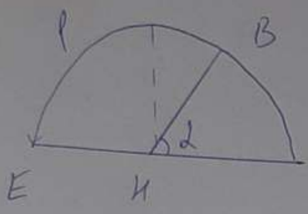
$OH = \frac{1}{3} CH = \sqrt{3}$

$BH = CH = 3\sqrt{3}$

$\cos\alpha = \dfrac{OH}{BH} = \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3};\ \alpha = \arccos\dfrac{1}{3}$



чистовик



$l = 2\pi\cdot\frac{\pi-\alpha}{2\pi} = \pi-\alpha = \pi - \arccos\frac{1}{3}$

Ответ: $4\pi - 4\arccos\frac{1}{3}$

Задача 3.

$10^{2022} - 9^{2022} \underset{1000}{\equiv} -9^{2022}$

По т. Эйлера т.к. $\varphi(1000) = \varphi(2^3\cdot 5^3) = 1000\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) =$
$= 400$, то $9^{400} \underset{1000}{\equiv} 1$

$9^{2022} \underset{1000}{\equiv} 9^{5\cdot 400+22} \underset{1000}{\equiv} 9^{22} \underset{1000}{\equiv} (9^5)^4\cdot 9^2 \underset{1000}{\equiv} 59049^4\cdot 9^2 \underset{1000}{\equiv} 49^4\cdot 9^2 \underset{1000}{\equiv}$
$2401^2\cdot 9^2 \underset{1000}{\equiv} 401^2\cdot 9^2 \underset{1000}{\equiv} 160801\cdot 9^2 \underset{1000}{\equiv} 801\cdot 9^2 \underset{1000}{\equiv} 64881 \underset{1000}{\equiv} 881$

Тогда $-9^{2022} \underset{1000}{\equiv} -881 \underset{1000}{\equiv} 119$

Ответ: 119

Задача 5.

$t^3+4t^2+4t+a=0$ имеет корни $x<y<z$

$A = x^3+(-4y^2-4y)+(-4z^2-4z)+32 = x^3+(y^3+a)+(z^3+a)+32 =$
$= x^3+y^3+z^3+2a+32.$

По т. Виета: $\begin{cases} xy = -a & (1) \\ xy+xz+yz = 4 & (2) \\ x+y+z = -4 & (3) \end{cases}$

$(3)^3: (x+y+z)^3 = -4^3;\ x^3+y^3+z^3+6\overset{-a}{xyz}+3\left(x^2(y+z)+y^2(x+z)+z(x+y)\right) \overset{-4^3}{=}$

$x^3+y^3+z^3 = -4^3+6a-3\left(x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)\right)$ (*)

$(2)\cdot(3) = (x+y+z)(xy+xz+yz) = -16;\ 3xyz+x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y) = -16$

$x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y) = -16-3a$ подставим (*)

$x^3+y^3+z^3 = -4^3+6a+3(16-3a) = -3a-16.$

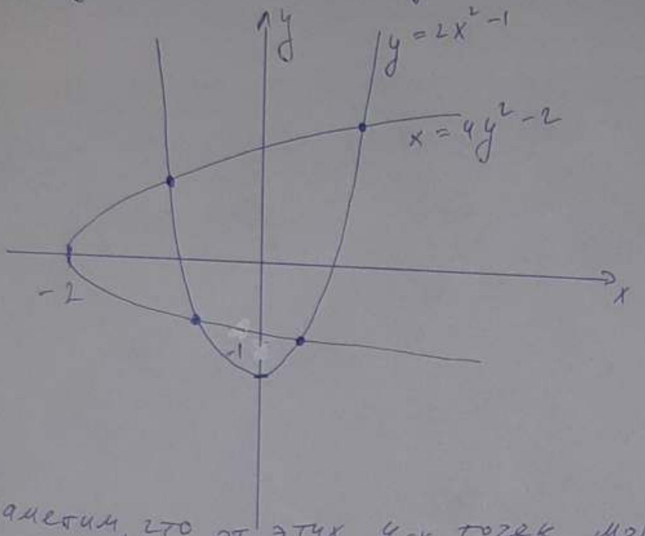
Итак, $x^3+y^3+z^3+2a+32 = -a+16$

Ответ: $-a+16$

Задача 6.

чистовик

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ x = 4y^2 - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y = 4x^2 - 2 & (1) \\ x = 4y^2 - 2 & (2) \end{cases}$$



Заметим, что от этих 4-х точек может быть равноудалено не более 1 точки, причём если такая точка есть, то она центр окружности, на которой лежат точки пересечения парабол.

Точки пересечения парабол удовл. (1) и (2).

$(1) + (2)$: $4x^2 - 2 + 4y^2 - 2 = 2y + x$;

$$\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2y - \frac{1}{2}\right)^2 - 4 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = 0;$$

$$\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{64} + \frac{1}{16}$$ - уравн. окр. с центром в $O\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right)$, т.е. такая точка есть.

Ответ: $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right)$