МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Каипов Роман Павлович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	0	5

Черновик

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$$\cancel{f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{\sqrt[7]{1-x^7}-1}{\sqrt[7]{1-x^7}}}} = \sqrt[7]{\frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{\sqrt[7]{1-x^7}-1}}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{-x^7}{1-x^7}}} =$$

$$= \sqrt[7]{-\frac{1-x^7}{x^7}} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}} = \sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-1+\frac{1}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}} = x.$$

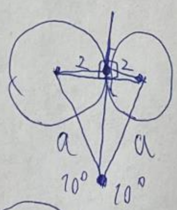
$$f(f(f(f(x)))) = f(x)$$

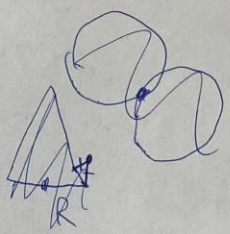
$$\begin{array}{r|l} 360 & 17 \\ -34 & 21\frac{3}{17} \\ 20 & \\ -17 & \\ 30 & \end{array}$$

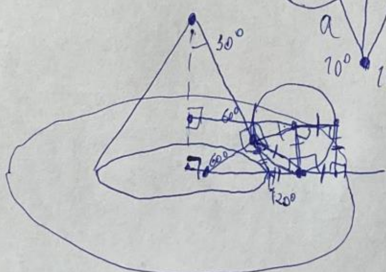
$f_{1 раз} = f_{4 раза} \Rightarrow f_{1 раз} = f_{1303 раза}$

$$f_{1304} = \sqrt[7]{1-\frac{1}{(2022)^7}} = \sqrt[7]{\frac{(2022)^7-1}{2022^7}} = \frac{\sqrt[7]{(2022)^7-1}}{2022}$$

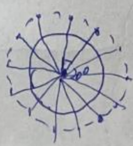
№4.





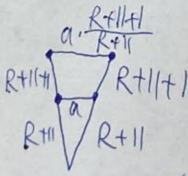


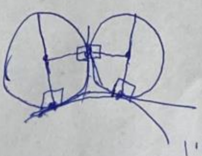
R+11

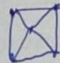


18 прям.

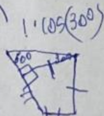
$$\frac{360}{18} = 20°.$$







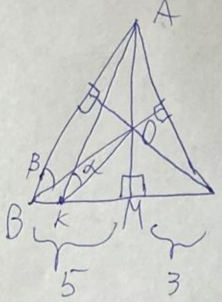
правильный 18и-угольник

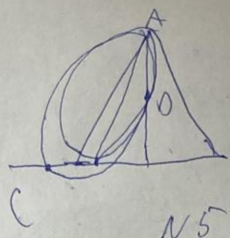


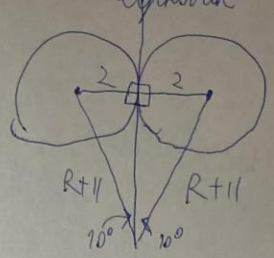
$$\frac{h}{h+1} = \frac{R+11-1\cdot\cos(30°)}{R}.$$

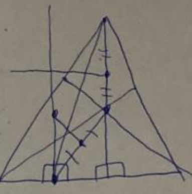
черновик стр 2 из 4

№5.





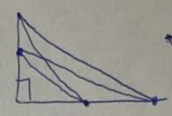


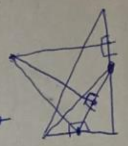


N5.

$(5-BK)\cdot AO.$

$t^3-144t \geqslant 0$





$AO^2=AK^2+OK^2-2AK\cdot OK\cdot \cos\alpha$

$t(t^2-144)\geqslant 0$

$AK\uparrow;\ OK\uparrow$

$AK^2-2AK\cdot OK\cdot \cos-AO^2=0.$ $t\cdot(t-12)(t+12)\geqslant 0 \Rightarrow$ $t\geqslant 12$ или $-12\leqslant t\leqslant 0$

$\frac{36}{11}\pi.$ $AK=\frac{2OK\cdot\cos+\sqrt{4OK^2\cdot\cos^2+4AO^2}}{2}=OK\cdot\cos+\sqrt{OK^2\cdot\cos^2+AO^2}$

$2^t-256\geqslant 0$

$\Downarrow$

$2^t\geqslant 256$

$\Downarrow$

$t\geqslant 8.$

$-\frac{36}{33}\big|\frac{11}{3,2}$ 30

$[1;3]$

$(AK-\alpha)^2+(OK-\beta)^2-$

$-2(AK-\alpha)(OK-\beta)\cdot\cos.$

$-\frac{24}{21}\big|\frac{7}{3,4}$ 30

$3\cup 4.$

$3\cap 4.$

$\sin t-\frac{\sqrt3}{2}>0$

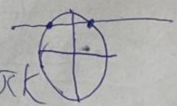
$(AK-\alpha)(AK-\alpha-\cancel{2OK+2\beta})$

$\Downarrow$

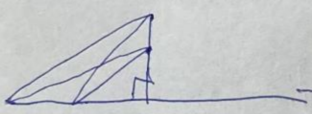
$\sin t>\frac{\sqrt3}{2}$

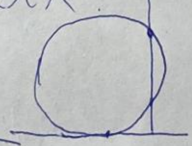
$\Downarrow$

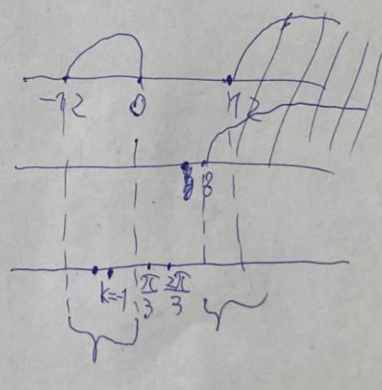
$t\in\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$



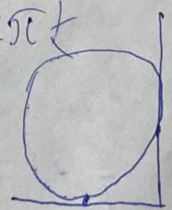
$8\ \big|\ \frac{\pi}{3}+2\pi k$







$-12\ \big|\ \frac{\pi}{3}+2\pi k$



$60! - 3 \cdot \frac{60!}{(1\cdot 2)^2}$

$a\,ctg^3 x$

$ctg\, x = y.$

$a \cdot y^3 + (2a^2 - a - 2) \cdot y^2 +$
$+ (2 - 4a - 2a^2) \cdot y + 4a = 0.$

$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = -4a$

$1 - \frac{3}{4} - \frac{5}{36} - \frac{7}{144} - \frac{9}{400}$

$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{25}$

$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{(2n+1)}{(n\cdot(n+1))^2} = \frac{n^2}{n^2(n+1)^2} - \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} =$

$\cancel{\frac{n^2-2n-1}{n^2(n+1)^2}} =$

$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$

$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$

$\frac{(n+2)^2 - 2n - 3}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{(n+2)^2}$

$\frac{1}{58}$.

N 2.

19 23
38 46
57 69
76 92
95

$92 \to 23 \to 38$ ✕

$46 \to 69 \to 95 \to 57 \to 76$

$3ц = 2003$ цифра $=$
$= 2019$ цифра.

$a + 4ц = aц$.

$3 ж ц = 3 + 4 ж$ цифра

9 – 2019 ц. 7 – 2021 ц.
5 – 2020 ц. → 6 – 2022 ц.

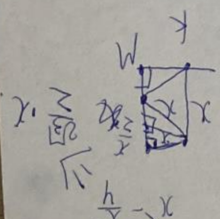
Черновик стр 3 из 4

Черновик стр 4 из 4

$$\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\sqrt[6]{(1+\sqrt{3})^2} = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)}$$

$$\frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = 1.$$



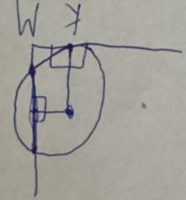
$x^2 - \frac{x^2}{4}$ $\Rightarrow$ $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2}$$

$$\frac{a+b}{(ab)^2}$$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

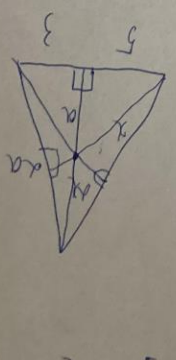
$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab.$



$\cancel{\frac{x}{x+}}$

$$\frac{2x+1}{(x\cdot(x+1))^2} + \frac{2x+3}{((x+1)(x+2))^2}$$

$\cancel{\frac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{ab}}$



$$\frac{2x+1}{x^2\cdot(x^2+2x+1)}$$

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

$$\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

$a^2+b^2 \geq 2ab.$

$a+b \geq 2\sqrt{ab}.$

$(a+b)^4 \geq 16a^2b^2$

a

$a \cdot \frac{x^2}{(x+2)^2} \cdot \frac{2x+3}{2x+1}$

$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \cancel{\frac{9}{400}}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{4}{36}$ $\frac{9}{144}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{16}$

$$\frac{\sum \frac{60!^2}{(ab)^2}\cdot(a+b)}{(60!)^2} = \sum \frac{(a+b)}{(a\cdot b)^2}$$

$\frac{(ab)^2}{a+b}$

Задача 1.

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$4+2\sqrt{3} = 3+2\sqrt{3}+1 = (\sqrt{3}+1)^2 \Rightarrow \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)} \Rightarrow A = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = 1.$$

Тогда посчитаю $1-B$. ~~Пусть~~ Пусть n – количество слагаемых в сумме B, где $B(n) = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{3+2}{(1+1)^2\cdot(2+1)^2} \ldots, + \frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}$

Тогда искомое $B = B(59)$.

~~Баз~~ ~~$1-B(n)=$~~

Докажу по индукции, что $1-B(n) = \frac{1}{(n+1)^2}$.

База индукции: при $n=1$ $1-B(1) = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{(1+1)^2}$.

Шаг: пусть $1-B(n) = \frac{1}{(n+1)^2}$, тогда $1-B(n+1) =$

$$= 1-B(n) - \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{n^2+4n+4-2n-3}{(n+1)^2(n+2)^2} =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{(n+2)^2} \Rightarrow 1-B(n+1) = \frac{1}{(n+2)^2} \Rightarrow 1-B(x) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Но тогда $1-B(59) = \frac{1}{60^2} \Rightarrow B<1 \Rightarrow A>B$.

Ответ: A больше B

Задача 2.

Выпишу двузн. числа, делящиеся на 19:
19; 38; 57; 76; 95.
(0 не двузн. число)

Делящиеся на 23: 23, 46, 69, 92

Тогда, если первая цифра 4, то вторая цифра 6, а третья 9, т.к. это единств. двузн. числа, удовл. условию, у которых первая цифра 4 и 6 соотв.

Если третья цифра 9, то четвёртая цифра ~~равна~~ 5 или 2. Но если четв. цифра 2, то пятая цифра 3, шестая 8, но нет двузн. чисел, начин. на 8 и удовл. условиям, а число 2022зн $\Rightarrow$ четв. цифра 5 $\Rightarrow$ пятая цифра 7 $\Rightarrow$ шестая цифра 6 и далее образуется цикл, как на рисунке:

$$\begin{tikzcd} & & & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 8 \\ 4 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 9 \arrow[urr, bend left] \arrow[drr, bend right] & & & \\ & & & 5 \arrow[r] & 7 \arrow[r] & 6 \arrow[ulll, bend left] \end{tikzcd}$$

Но тогда ~~а~~ каждая $3+4n$ цифра, где n – нат. число, это 9 $\Rightarrow$ 2019 цифра это 9 $\Rightarrow$ 2022 цифра это 6 или 8, как видно из схемы.

Ответ: 6 или 8.

Задача 3.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$\Downarrow$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{-x^7}{1-x^7}}}$$

$\Downarrow$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{-x^7}{1-x^7}}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1-x^7}{-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7+1-x^7}{x^7}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

$\Downarrow$

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} = f(x)$$

Тогда $\underbrace{f(f(f\ldots(x))))}_{3n+1 \text{ функ } f} = f(x)$, где n – нат. число.

$\cancel{1303} \Rightarrow 1303 = 3n+1$, т.к. $1302 \vdots 3$

$\Downarrow$

функция, где f применяется 1304 раза $=$

$$= f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{-x^7}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1-x^7}{-x^7}} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}} = \frac{\sqrt[7]{(x^7-1)}}{x}.$$

$x = 2022 \Rightarrow$

функция, где f применяется 1304 раза $= \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

Ответ: $\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

Задача 5.

Если среднее из трёх чисел положительно, значит как минимум 2 числа из a, в и с положит. ~~Не~~ Также, если как минимум 2 числа из a, в и с положительно, то и среднее число положительно.

$\boxed{\text{Ответ: } t \in \left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(8; \frac{8\pi}{3}\right) \cup (12; \infty)}$

$a > 0 \Rightarrow t^3 - 144t > 0$

$\Updownarrow$

$t(t-12)(t+12) > 0$

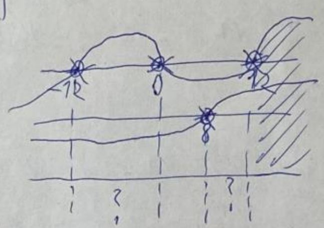
$\Updownarrow$

$t > 12$ или $0 > t > -12$.

$в > 0 \Rightarrow 2^t - 256 > 0 \Rightarrow t > 8$.

$c > 0 \Rightarrow \sin t - \frac{2\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Тогда нарисую 3 числ. прямые.



$\Rightarrow$ при $t > 12$ среднее число всегда полож. при t от 0 до 8 (включ.) неположит. при $t \leq -12$ неположит. Значит нужно посмотреть, где $\sin t > \frac{2\sqrt{3}}{2}$ на промежутках $(-12; 0) \cup (8; 12]$.

на промеж. $(-12; 0)$: при $k = -2$

$-12 \vee \frac{2\pi}{3} - \cancel{2\pi}4\pi$

$-12 \vee -\frac{10\pi}{3}$

$-36 < -10\pi$

$k < 0$, иначе $t > 0$.

при $k = -1$ $-12 < t < 0$

$-12 \vee \frac{\pi}{3} - 4\pi$

$-12 \vee -\frac{11\pi}{3}$

$-36 \vee -11\pi$

$-\frac{36}{11} \vee -\pi$

$\frac{36}{11} = 3,2\ldots$

$\Updownarrow$

$\frac{36}{11} > \pi$

$\Updownarrow$

$-\frac{36}{11} < -\pi$.

Тогда на первом промежутке. подходят только $k = -1$ и $k = -2$

$\Updownarrow$

$t \in \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{10\pi}{3}; -\frac{11\pi}{3}\right)$

(при $k \leq -3$ $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < -12$, что очевидно)

На втором промежутке $[8; 12]$:

$8 \vee \frac{2\pi}{3} + 2\pi$

$8 \vee \frac{8}{3}\pi$

$3 < \pi$

$8 \vee \frac{\pi}{3} + 2\pi$

$8 \vee \frac{7}{3}\pi$

$\frac{24}{7} \vee \pi$

$3,4\ldots > \pi$

$\Rightarrow t \in \left(8; \frac{8\pi}{3}\right)$.

$12 \vee \frac{\pi}{3} + 4\pi$

$12 \vee \frac{13\pi}{3}$

$\frac{36}{13} < \pi$

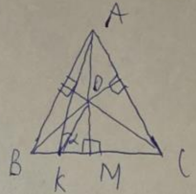
$\Rightarrow k > 1$ не попадают в промежуток. ($k < 1$ очев не попадают)

$\Rightarrow$ учитываю все отрезки для t.

Ответ написан выше в рамке.

Задача 7.

$BM=5;\ MC=3.$



по т. косинусов $OA^2=OK^2+AK^2-2AK\cdot KO\cdot\cos\alpha$.

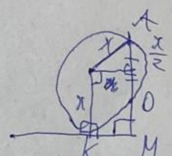
Тогда $\cos\alpha=\dfrac{OK^2+AK^2-OA^2}{2AK\cdot KO}$

$\Downarrow$

функция $\cos\alpha$ дифф ~~т.к.~~ и непрерывна.

При $K=M$ $\cos\alpha=1$, при K удаленной на бесконечность ~~в~~ от M в сторону B или C α стремится к $0 \Rightarrow \cos\alpha \to$ к 1. Также, у каждого косинуса* есть пара (с той же стороны от M), это можно понять, если построить опис. окр $\Delta AOK \Rightarrow$ в точке второго пересечения окр. с MB, кроме точки, где эта опис. окр касается $BC \Rightarrow$ в этой точке угол максимален, т.к. функ. дифф. и непрерывна.

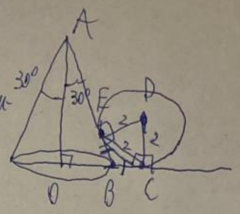
Тогда, если мы ~~знаем~~ можем выразить AO через BM и BC, то можем выразить и KM, так как центр. опис. окр лежит на пересечении сер. пер. и при этом на прямой, перп BC, из точки $K \Rightarrow$ если $AO=x$, то по т. Пифагора



$KM=$ отрезку, соед. центр. окр и середину $AO=\sqrt{x^2-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt3}{2}x$, но K лежит на отрезке и $BM>MC$ $\Rightarrow$ $KM=\begin{cases}5, & \text{если } x>\frac{10}{\sqrt3}\\ \frac{\sqrt3}{2}x, & \text{если } x<\frac{10}{\sqrt3}\end{cases}$, где $x=AO$, которое надо выразить через BM и MC, но я не успел этого сделать.

~~Но оно однозначно выражается так как~~

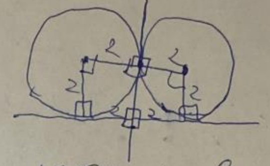
Задача 4.



Угол при вершине при осевом сечении $= 60°$ (я так интерпретировал условие)

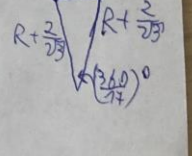
⇓

угол между высотой конуса и ребром боковой грани, которое получается при осевом сечении $= \frac{60°}{2} = 30°$.



Тогда пусть вершина конуса A, проэкция вершины на пл. основания O. B – точка перес. диаметра конуса и ребра боков. грани. C – точка касания одного из шаров пл. основания, E – точка касания этим шаром конуса $\Rightarrow$ E лежит на AB, т.к. AB самая близкая прямая к центру шара D, распол. в плоскости ADB, т.к. CD перп OC и CD парал AO. Тогда $\angle ABO = 60° \Rightarrow \angle EBC = 120°$, но $EB = BC$, т.к. $\angle DEC = \angle DCE$, т.к. $ED = DC = 2 \Rightarrow \angle BEC = \angle ECB = \frac{60}{2} = 30°$. Но $\angle EDC = 60°$, т.к. $\angle DEB + \angle DCB + \angle EBC = 300°$.

Тогда $EC = 2$, т.к. это равностор треугольник. $\Rightarrow$ по т. косинусов $2^2 = BC^2 + BE^2 - 2BC \cdot BE \cdot \cos(120°) \Rightarrow 4 = 2BC^2 - 2BC^2 \cdot (-\frac{1}{2}) \Rightarrow 4 = 3BC^2 \Rightarrow BC = \frac{2}{\sqrt{3}} = BE$. Тогда посмотрим на 2 соседних шара. Они перес. в точке. Проведём через эту точку прямую, парал. проэкциям центров шаров. Но тогда расстояние между проэкциями центров = расстоянию между центрами = 4, т.к. оба шара перп. плоск. осн. конуса и оба шара перп. выбранной прямой. Тогда соединим все такие точки проэкций центров $\Rightarrow$ мы получим правильный 17-угольник со стороной 4. Тогда, т.к. такие точки центров удалены от O на $R + \frac{2}{\sqrt{3}}$ (R – искомый радиус), то по т. косинусов $4^2 = 2 \cdot (R + \frac{2}{\sqrt{3}})^2 - 2 \cdot (R + \frac{2}{\sqrt{3}})^2 \cdot \cos(21\frac{3}{17}°) \Rightarrow$



$\Rightarrow (R + \frac{2}{\sqrt{3}})^2 \cdot (2 - 2\cos(21\frac{3}{17}°)) - 16 = 0 \Rightarrow \underline{R = \sqrt{\frac{16}{2(1 - \cos(21\frac{3}{17}°))}} - \frac{2}{\sqrt{3}}}$ Ответ.