



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кармацких Ульяна Васильевна**

Класс: **9 класс**

Технический балл: **50**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	0	10	0	0

Чистовик, лист 1 из 3

1. Заметим, что всего 6 вариантов произведений, из них 16 кратны 3:

$$\begin{array}{ll}
 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 : 16 & 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 : 16 \\
 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 : 16 & 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 : 16 \\
 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 : 16 & 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 : 16
 \end{array}$$

Т.е. вер-ть того, что произв. $\cdot 16 = \frac{\text{кол-во делит. на 16}}{\text{кол-во вариантов}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2. Если заметим, что в I групп. проз. входят все числа вида $2k+1$, во вторую - $2k+2$, т.е. имеет значение лишь ост. при дел. на 2 и 3, то на 6

Рассмотрим 6 подгрупп из двух чисел:

в. с: $6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5, 6k+6$

I
I
I
I
I
I

II
II
II
II
II
II

Т.е. среди любых 6 подгрупп из двух чисел (где первое ~~каж~~ имеет вид $6k+1$, подходов ровно 2. Т.к. ~~2022 = 6 \cdot 337~~ (т.е. его можно разбить на ~~674~~ ³³⁷ 2-х), и из каждой подгруппы 2, то всего подходов $2 \cdot 337 = 674$.

3. $(9, 1000) = 1 \Rightarrow$ по т. Эйлера $9^{\varphi(1000)} \equiv 1$

$\varphi(1000) = 2^2 \cdot 5^3 (2-1)(5-1) = 400 \Rightarrow 9^{400} \equiv 1$

$9^{2022} \equiv (9^{400})^5 \cdot 9^{22} \equiv 81$

$81^2 \equiv 561$; $81^3 \equiv 561 \cdot 81 \equiv 441$

$81^5 \equiv 561 \cdot 441 \equiv 401$

$81^{10} \equiv 401^2 \equiv 801$

$81^{11} \equiv 801 \cdot 81 \equiv 881$

$1000^{2022} - 9^{2022} \equiv 0 - 881 \equiv 119$

Ответ: 119

$ \begin{array}{r} 81 \\ \times 81 \\ \hline 648 \\ 81 \\ \hline 6561 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 81 \\ \times 81 \\ \hline 81 \\ 81 \\ \hline 648 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1001 \\ \times 81 \\ \hline 801 \\ 801 \\ \hline 64881 \end{array} $
$ \begin{array}{r} 561 \\ \times 441 \\ \hline 2244 \\ 2244 \\ \hline 247401 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 801 \\ \times 81 \\ \hline 801 \\ 6408 \\ \hline 64881 \end{array} $	
$ \begin{array}{r} 401 \\ \times 401 \\ \hline 401 \\ 1604 \\ \hline 160801 \end{array} $		

Числовик, Миср 2 из 3

5. Заметим, что условие равносильно тому, что ~~указано~~ хотя бы 2 числа будут положительными. Очевидно, что в таком случае среднее будет одним из этих чисел, а иначе, - одним из отрицательных.

$$a = x^2 - 100x + 100 = x(x - 10)(x + 10)$$

$$b = x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

$$c = -x^2 + x + 20 = (x + 4)(5 - x)$$

	-10		-4	-2	0	2	5		10	
a	-	+	+	+	-	-	-	-	+	x
b	+	+	+	-	-	+	+	+	+	
c	-	-	+	+	+	+	-	-	-	
кол-во мн.	1	2	3	2	1	2	1	2		

Подходят промежутки:

$$\begin{cases} -10 \leq x \leq 0 \\ 2 \leq x \leq 5 \\ 10 \leq x \end{cases}$$

67. Назовем пакетом 0-го уровня исходный пакет, i -го уровня - пакет, который лежит в i пакетах. a_i - кол-во способов сложить пакеты из i пакетов.

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$$

Для $i=4$: ~~какие способы выбрать пакеты 0-го уровня~~

В пакетах 1-го ур. может быть либо 2 пакета, либо 1+0 пакетов, либо 0+0+0 пакетов, т.е. a_3 a_2 a_1

всего способов - ~~$a_3 + a_2 + a_1 = 6$~~

Аналогично для ост. i от 5 до 10; сумма индексов в каждом слагаемом - 3

$$a_5 = a_1 + a_2 \cdot a_1 + a_2^2 + a_3 \cdot a_1 + a_4 = 7$$

$$a_6 = a_1 + a_2 \cdot a_4 + a_3 \cdot a_2 + a_2^2 \cdot a_1 + a_4 \cdot a_1 + a_3 \cdot a_2 + a_5 = 18$$

~~$a_7 =$~~

Числовик, лист 3 из 3

$$a_7 = a_1^6 + a_2^1 a_1^5 + a_3^2 a_1^4 + a_2^2 a_1^4 + a_4^4 a_1^2 + a_5^2 a_2 a_1 + a_2^3 + a_6 + a_5 a_1 + a_4 a_2 + a_3^2 = 45$$

~~$a_7 = a_1^6 + a_2 a_1^5 + a_3 a_1^4 + a_2^2 a_1^4 + a_4 a_1^2 + a_5 a_2 a_1 + a_2^3 + a_6 + a_5 a_1 + a_4 a_2 + a_3^2 = 45$~~

Далее нетрудно убедиться, что формула совпадает с формулой числа Каталана, ~~то есть~~, т.е. ответ равен 10-му числу Каталана.

Черновик

5. $a = x^2 - 100x = x(x^2 - 100) = x(x-10)(x+10)$

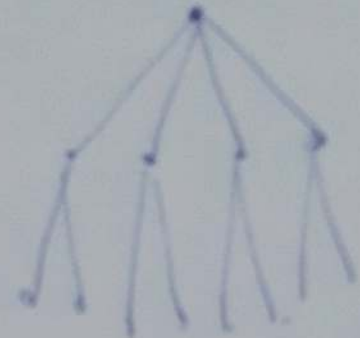
$b = x^3 - 16 = (x^2 - 4)(x + 4) = (x-2)(x+2)(x+4)$

$c = -x^2 + x + 20 = (x+4)(x+5)$

	-10	-4	-2	0	2	5	10
a	-	+	+	+	-	-	-
b	+	+	+	-	-	+	+
c	-	-	+	+	+	+	-
1	2	3	2	1	2	1	2

или $\begin{cases} -10 \leq x \leq 0 \\ 2 \leq x \leq 5 \\ 10 \leq x \end{cases}$

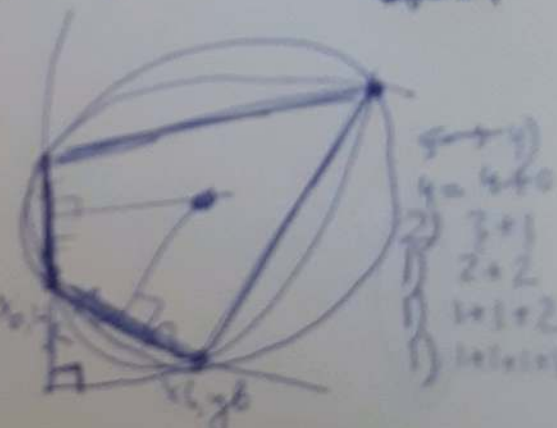
≥ 2 точки.



$a_1 = 1$ $a_2 = 1$ $a_3 = 2$ $a_4 = 4$
 $a_5 = 9$ $a_6 =$
 $3 = 2 + 1$
 $1 + 1$



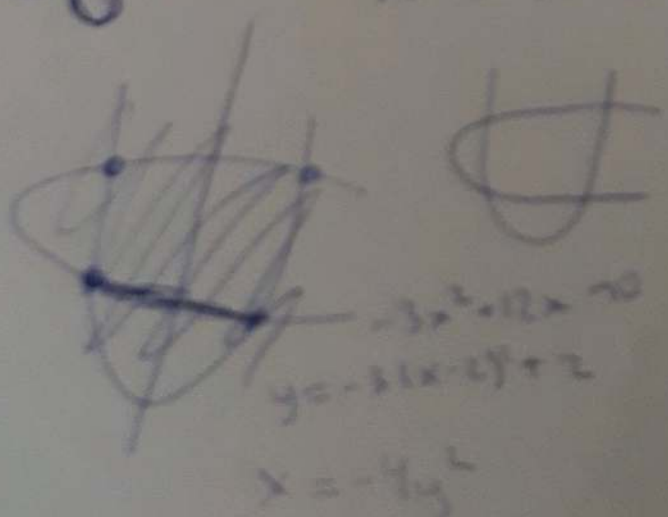
6. $y_a = -3x^2 + 2 = -3(-4y_a^2 + 2)^2 + 2$
 $x_a = -4y_a^2 + 2$

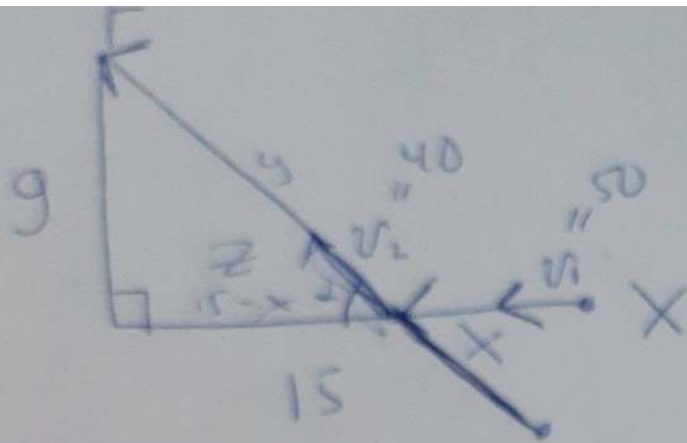


$-3 \cdot 16y_a^4 + 3 \cdot 16y_a^2 - 12 + 2 = y_a$

$y_a^4 - y_a^2 + \frac{y_a}{48} + \frac{10}{48} = 0$

$x \rightarrow x - 2$





$$\frac{x}{50} + \frac{y}{40} \rightarrow \min$$

~~$$2 \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(15-x)^2 + 81}$$

$$x^2 = (15-x)^2 + 81$$~~

$$\sin \alpha = \frac{9}{40}$$

~~$$t_1 v_1 + t_2 v_2 \cos \alpha = 15$$~~

~~$$t_2 v_2 \sin \alpha = 9$$~~

~~$$t_1 + t_2 \rightarrow \min$$~~

~~each other~~

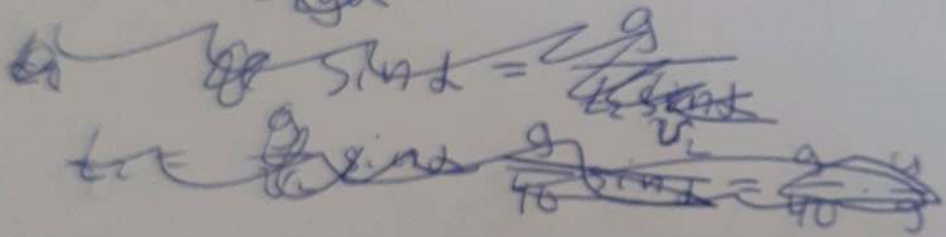
~~30~~

~~$$\sqrt{\frac{z^2 + 81}{4}} - \frac{z}{5} \rightarrow \min$$~~

~~$$5\sqrt{z^2 + 81} - 4z \rightarrow \min$$~~



~~that part of z is 15~~



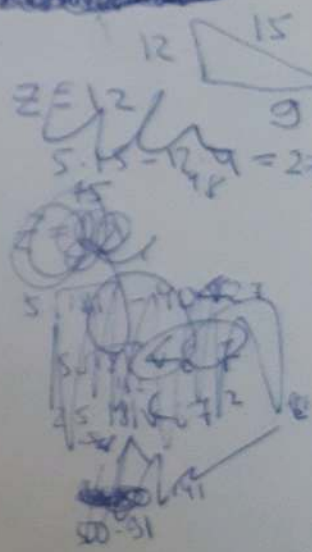
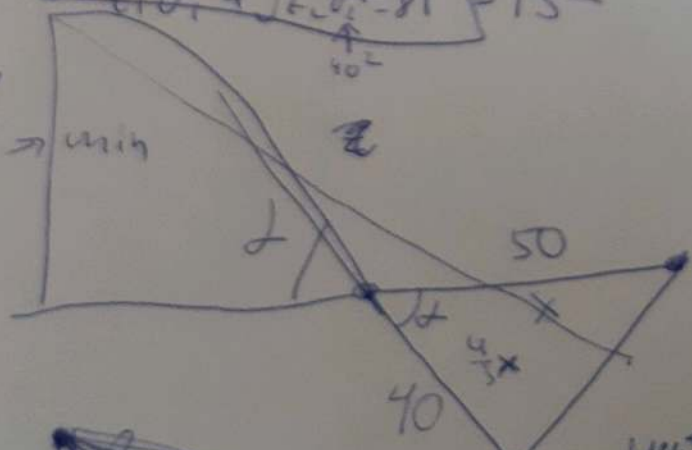
$$\sin \alpha = \frac{9}{40}$$

~~$$t_1 v_1 + \sqrt{t_2^2 v_2^2 - 81} = 15$$~~

$$\frac{15-z}{50} + \frac{\sqrt{z^2 + 81}}{40} \rightarrow \min$$

$$3 - \frac{z}{5} + \frac{\sqrt{z^2 + 81}}{4}$$

$$\cos \alpha =$$



~~30~~

~~30~~
y <



$$y = \frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

$$y = 1$$

~~30~~
y =

Упробук

3. $10^{2022} - 9^{2022} = (10 - 9) \cdot (10^{2021} + 10^{2020} \cdot 9 + \dots + 10^{2021-k} \cdot 9^k + \dots + 9^{2021})$

$g^{1000} \equiv 1$

$1 \cdot (10^2 \cdot 9^{2019} + 10 \cdot 9^{2020} + 9^{2021})$

$\varphi(1000) = 2^2 \cdot 5^2 (2-1)(5-1) = 400$

$2^3 \cdot 5^3$

$g^{400} \equiv 1$

$g^{2000} \equiv 1$

$g^{22} \equiv ?$

$81^{11} \equiv ?$

$$\begin{array}{r} 721 \\ \times 81 \\ \hline 721 \\ 68 \\ \hline 901 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 401 \\ + 81 \\ \hline 401 \\ 3208 \\ \hline 481 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 481 \\ \times 81 \\ \hline 481 \\ 48 \\ \hline 961 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 961 \\ \times 81 \\ \hline 961 \\ 88 \\ \hline 841 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 401 \\ \times 401 \\ \hline 401 \\ 1604 \\ \hline 801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ \times 81 \\ \hline 441 \\ 328 \\ \hline 721 \\ + 841 \\ 181 \\ \hline 841 \\ 328 \\ \hline 121 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 801 \\ \times 81 \\ \hline 801 \\ 68 \\ \hline \end{array}$$

x	r
1	81
2	561
3	441
4	721
5	401
6	481
7	961
8	841
9	121
10	801
11	881

$$\begin{array}{r} 401 \\ + 81 \\ \hline 64 \\ 121 \\ \times 81 \\ \hline 121 \\ 168 \\ \hline 801 \end{array}$$

$-881 \equiv 119$

$2 \cdot 561$

$\times 441$

2244

$121 \cdot 2244$

168

801

Черновик

- $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \leq 16$
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \leq 16$
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \leq 16$
 $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \leq 16$
 $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \leq 16$
 $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \leq 16$
 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- $1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11 \ 13 \ 2022 \div 2, 3$
 $1 \ 4 \ 7 \ 10 \ 13 \ 16 \ 19 \ 3k+1$
 $6k+1 - \text{глава } \times \text{глава}$
 $1011 + 674 = 337 = 1348 - \text{логар}$
 $2022 - 1011 - 674 + 337 = 674$
 $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- $10^{2022} \equiv 0$
 $9^{2022} \equiv 3$
 $4044 \equiv 1000$

12

81

729

1000

729

270

81

648

567

683

249

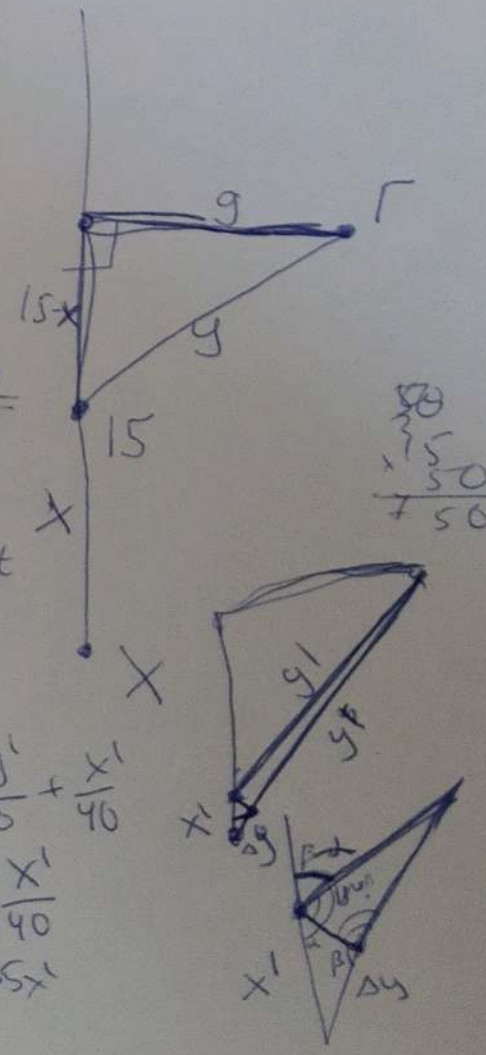
18

1049

3^x	x	r
3	1	3
9	2	9
27	3	27
81	4	81
243	5	243
729	6	729
2187	7	561
6561	8	683
19683	9	049
59049	10	48

$$S^2 = 16x^2 + 25(15-x)^2 + 81 \cdot 5 + 40 \times \sqrt{(15-x)^2 + 81}$$

$$= 41x^2 - 750x + 40 \times \sqrt{(\quad) + 81} + \text{const}$$



$$\frac{x}{50} + \frac{y}{40} = \frac{x}{50} + \frac{\sqrt{(15-x)^2 + 81}}{40} = \frac{y}{50} > \frac{y'}{50} + \frac{x'}{40}$$

$$= \frac{1}{200} \left(4x + 5\sqrt{(15-x)^2 + 81} \right) \Delta y$$

$\frac{\Delta y}{x'} > \frac{y}{50} > \frac{x'}{40}$
 $y > 5x'$