МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Карташева Алена Евгеньевна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	10	15	5	15

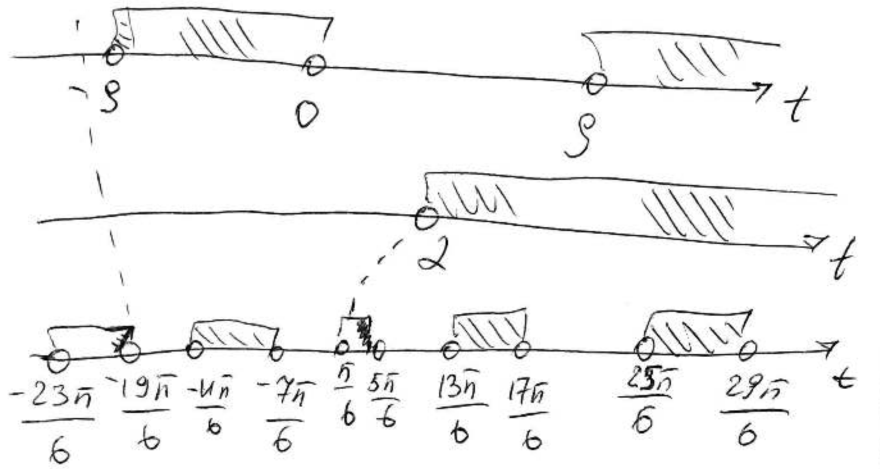
N 3

Такое возможно когда ~~[illegible]~~ 2 из 3 чисел >0

$a>0 \Leftrightarrow t^3-81t>0 \Leftrightarrow$ $t\in(-9;0)\cup(9;+\infty)$

$b>0 \Leftrightarrow 11^t>121 \Rightarrow t>2$

$c>0 \Leftrightarrow \sin t>\frac{1}{2} \Leftrightarrow t\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$



~~$\frac{5\pi}{6} < \frac{5\cdot3,2}{6} = \frac{16}{6}$~~

~~$\frac{17\pi}{6} < \frac{17\cdot3,2}{6} = \frac{27,2}{3} < 9$~~

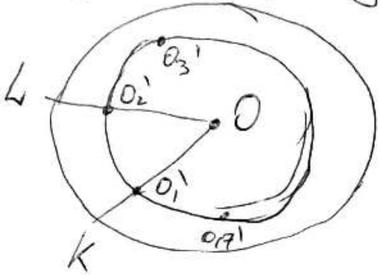
Два из трёх чисел больше 0: ~~[illegible]~~

Ответ: $\left(-\frac{11\pi}{6};-\frac{7\pi}{6}\right)\cup\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{13\pi}{6};\frac{17\pi}{6}\right)\cup(9;+\infty)$

Чистовик

№4

Вид сверху:

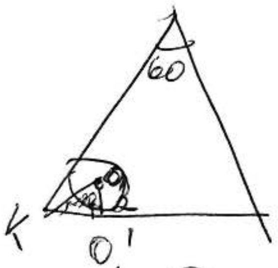


$O_1' O_2' \ldots O_{17}'$ – правильный 17-угольный

OK' – проекция OK на плоскость основания

Сторона $= 2R = 4$

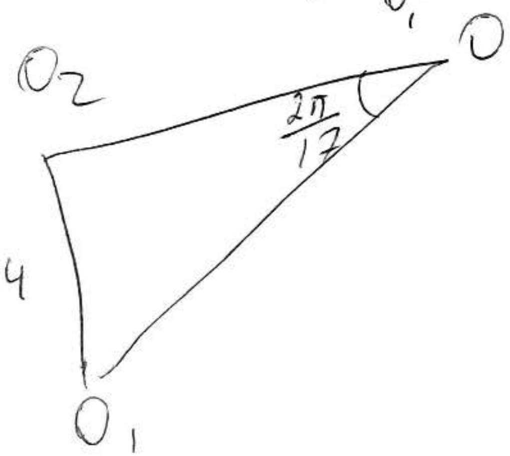
Осевое сечение:



$KO_1' = 2\,\mathrm{ctg}\,30 = 2\sqrt{3} = O_2'$

$\angle OO_1O_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{17} = \frac{15\pi}{34}$

$OO_1 = \frac{2}{\cos\frac{15\pi}{34}} =$



Ответ: $\boxed{R_{\text{основания}} = \frac{2}{\cos\frac{15\pi}{34}} + 2\sqrt{3}}$

Чистовик

№6 Чистовик

$\operatorname{tg} x = t$

$at^3 + (2-a-a^2)t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a = 0$

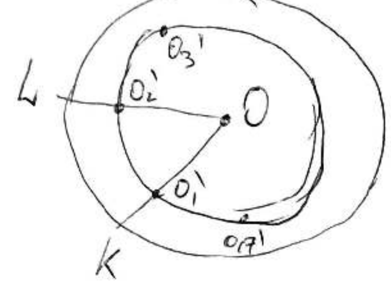
$t = 1$ корень

$(t-1)(at^2 \mp (a^2-1)t - 2a) = 0 \Rightarrow a = 0 \quad t=1 \quad x = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $a = 0$

№4

Вид сверху:

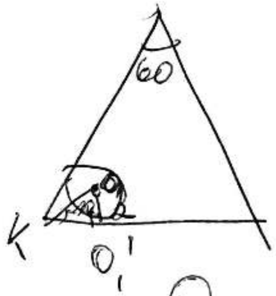


$O_1' O_2' \dots O_{17}'$ – правильный 17-угольный

OK' – проекция OK на плоскость основания

Сторона $= 2R = 4$

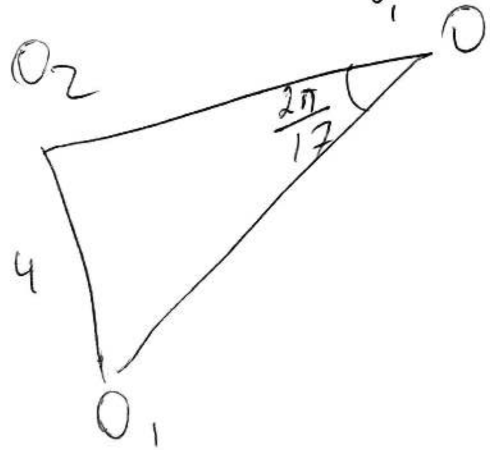
Осевое сечение:



$KO_1' = 2\,\mathrm{ctg}\,30 = 2\sqrt{3} = O_2'$

$\angle OO_1O_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{17} = \frac{15\pi}{34}$

$OO_1 = \frac{2}{\cos\frac{15\pi}{34}} =$



Ответ: $\boxed{R_{\text{основания}} = \frac{2}{\cos\frac{15\pi}{34}} + 2\sqrt{3}}$

Чистовик

№6

Черновик

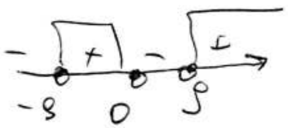
$a\,tg^3x + (2-a-a^2)\,tg^2x + (a^2-2a-2)\,tg\,x + 2a = 0$

$tg\,x = t$

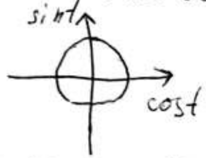
$at^3 + (2-a-a^2)t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a = 0$

~~[illegible]~~

№5

$a = t^3 - 81t = t(t-9)(t+9)$  положительно при $t \in (-9;0) \cup (9;+\infty)$

$b = 11^t - 121$ положительно при $t > 2$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$  положительно при $\sin t > \frac{1}{2}$ $t \in \left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$

Нам нужно, чтобы среднее из чисел было положительно => два числа из данных чисел были положительны

1) при $t \in (-\infty;-9)$ два числа будут отрицательными.

2) $-\frac{19\pi}{6} \vee -9$ $\qquad \frac{5\pi}{6} \vee 2$

$-19\pi \vee -54$ $\qquad 5\pi \vee 12$

$-57 \vee -54$

№6 Черновик

~~$atg^3x + \dots$~~

$$a\,tg^3x + (2-a-a^2)\,tg^2x + (a^2-2a-2)\,tg\,x + 2a = 0$$

$tg\,x = t \quad t \in \forall \quad x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$$at^3 + (2-a-a^2)t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a = 0$$

$t = 1$ - корень, тогда поделим выражение на $(t-1)$:

$$-\frac{at^3 + (2-a-a^2)t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a}{at^3 - at^2} \;\Big|\; \frac{t-1}{at^2 + (2-a)t + (a^2-3a)}$$

$$2t^2 - at^2 + (a^2-2a-2)t + 2a$$

$$-\frac{(2-a)t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a}{(2-a)t^2 - t(2-a)}$$

$$t(2-a+a^2-2a-2) + 2a$$

$$t(a^2-3a) + 2a$$

$$t(a^2-3a) - a^2$$

$$-\frac{at^3 + (2-a-a^2)t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a}{at^3 - at^2} \;\Big|\; \frac{t-1}{at^2 + t(2-2a-a^2)}$$

$$-\frac{t^2(2-2a-a^2) + (a^2-2a-2)t + 2a}{t^2(2-2a-a^2) - t(2-2a-a^2)}$$

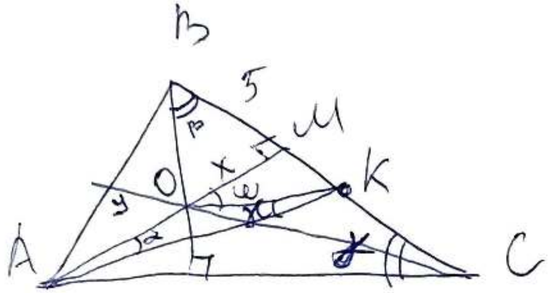
$$t(a^2-2a-2+2-2a-a^2)$$

$$-\frac{at^3 + (2-a-a^2)t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a}{at^3 - at^2} \;\Big|\; \frac{t-1}{at^2 + t(2-a)}$$

$$-\frac{(2-a)t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a}{(2-a)t^2 - t(2-a)}$$

$$t(a^2-2a-2+2-a) + 2a$$

№7



$\omega = \alpha + \varkappa$

$\varkappa = \omega - \alpha$

$\varkappa =$ макс $\Rightarrow tg\varkappa = max$

$\angle AKO$ - макс

$AO = y$

$OM = x$

$MK = z$

$tg\alpha = \dfrac{z}{x+y}$; $tg\,\omega = \dfrac{z}{x}$

$$tg\varkappa = tg(\omega - \alpha) = \frac{tg\omega - tg\alpha}{1 + tg\omega\, tg\alpha} = \frac{\frac{z}{x} - \frac{z}{x+y}}{1 + \frac{z^2}{x(x+y)}} = \frac{z(x+y) - zx}{x^2 + xy + zx}$$

$tg\,\varkappa = F(z)$

Возьмём производную на z

$$F(z)' = \frac{y(x^2 + xy + z^2 - zy + 2z)}{(x^2 + xy + z^2)^2} = 0 \Rightarrow z^2 = x^2 + xy$$

$z = \sqrt{x(x+y)}$

0 $+$ $\sqrt{x^2+yx}$ $-$

В этой точке достигается максимум тангенса, а значит и также острого угла $\varkappa \Rightarrow MK^2 = OM \cdot AM$; $OM = 5tg\beta$; $AM = 3tg\gamma$, но $\beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow tg\,\gamma = ctg\beta \Rightarrow tg\beta \cdot tg\gamma = 1 \Rightarrow MK^2 = 5\, tg\beta \cdot 3 tg\gamma \Rightarrow MK^2 = 15 \Rightarrow MK = \sqrt{15}$

Ответ: $\sqrt{15}$ Чистовик

№1

$A = \dfrac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$ $\quad B = \dfrac{3}{(1\cdot2)^2} + \dfrac{5}{(2\cdot3)^2} + \dots + \dfrac{77}{(38\cdot39)^2} + \dfrac{79}{(39\cdot40)^2}$ $\quad (\sqrt{2})^4 = 2^2 \quad (\sqrt[3]{27})^6 = 3^6$

$(3^3)^6$

27^2

неотриц => возведем в 6 степень

$A^6 = \dfrac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)^2}{4} = \dfrac{(4+2\sqrt{3})(3+1-2\sqrt{3})}{4} = \dfrac{16-12}{4} = 1 \quad A^6 = 1 \quad \sqrt[6]{A^6} = 1 = A$ (не -1 т.к. $A > 0$)

~~$B = \quad 1 = t \quad B = \dfrac{t+2}{(t\cdot(t+1))^2} + \dfrac{t+4}{((t+1)(t+2))^2} + \dots + \dfrac{t+76}{((t+37)(t+38))^2} + \dfrac{t+78}{((t+38)(t+39))^2}$~~

~~т.к. B - это сумма положительных чисел~~

$B = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{36} + \dots \dfrac{77}{(38\cdot(38+1))^2} + \dfrac{79}{(39(39+1))^2}$ $\quad \dfrac{38\cdot2+1}{(38\cdot(38+1))^2} = \dfrac{38+38+1}{(38(38+1))^2} = \dfrac{38}{38^2(38+1)^2} + \dfrac{38+1}{38^2\cdot(38+1)^2}$

$= \dfrac{1}{38\cdot(38+1)^2} + \dfrac{1}{38^2\cdot(38+1)} = \dfrac{1}{38\cdot39^2} + \dfrac{1}{38^2 39}$

$B = \dfrac{1}{1\cdot2^2} + \dfrac{1}{1^2\cdot2} + \dfrac{1}{2^2\cdot3} + \dfrac{1}{2\cdot3^2} + \dots + \dfrac{1}{38\cdot39^2} + \dfrac{1}{38^2 39} + \dfrac{1}{39\cdot40^2} + \dfrac{1}{39^2\cdot40}$

Общий знаменатель: $1^2\cdot2^2\cdot3^2\dots\cdot40^2$

$B = \dfrac{1\cdot3^2\cdot4^2\dots40^2 + 2\cdot3^2\cdot4^2\dots40^2 + 3\cdot4^2\cdot5^2\cdot40^2 + 2\cdot4^2\cdot5^2\dots40^2 + \dots + 38\cdot39^2\cdot2^2\cdot37^2 + 2^2\dots37^2\cdot39 + 39\cdot2^2\dots38^2 + 40\cdot2^2\dots38^2}{1^2\cdot2^2\cdot3^2\dots40^2}$

$B = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9}\dots\right)$

Черновик

Т.к. $\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2+2n+1-n^2}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

$\Rightarrow B = \left(\dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{2^2}\right) + \left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\dfrac{1}{39^2} - \dfrac{1}{40^2}\right) =$

$= 1 - \dfrac{1}{40^2}$ это выражение $< 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A больше

№2

Двузначные кратные 19: 19, 38, 57, 76, 95; кратные 23: 23, 46, 69, 92

Если первое число 4, то начинается на $\underline{46}$ 46 → 69 → 92 → 23 → 38; на 8 нет чисел среди выше перечисленных.

Значит 46 → 69 → 95 → 57 → 76 → 69...

4 $\underbrace{6957}\,\underbrace{6957}$

2021 = 4·505 + 1 => в числе 505 цепочек 6957 + первая цифра „4".

Значит, число может оканчиваться на „7", но можно взять последней цепочку 6923 => число может также оканчиваться на „3", тогда

Ответ: 3 или 7

Чистовик

№1

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} \quad A^6 = \frac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)^2}{4} = \frac{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}{4} = \frac{16-12}{4} = 1 \quad A^6 = 1 \; \sqrt[6]{A^6} = 1$$

неотриц ↑

Т.к. $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \Rightarrow B = \left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{39^2}-\frac{1}{40^2}\right) =$

$= 1 - \frac{1}{40^2}$ – данное выражение меньше 1, значит

Ответ: A больше B

№3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}} = t$$

$$f(f(x) = f(t) = \frac{1}{\sqrt[n]{1-t^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{1-\frac{1}{1-x^n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{-x^n}{1-x^n}}} = \sqrt[11]{\frac{x^n-1}{x^n}} = \sqrt[11]{1-\frac{1}{x^n}}$$

$$f(f(x) = \sqrt[11]{1-\frac{1}{x^n}} = u$$

$$f(f(f(x))) = f(u) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-u^{11}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{1-(1-\frac{1}{x^n}}} = \frac{1}{\sqrt[11]{\frac{1}{x^n}}} = \sqrt[n]{x^n} = x$$

$f(f(f(x))) = x$

1306 не делится на 3 – имеем остаток 1 => искомое значение будет равно

$$f(x) = f(2022) = \frac{1}{\sqrt[n]{1-2022^n}}$$

Чистовик