МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Киносян Александр Львович**

Класс: **10 класс**

Технический балл: **55**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	0	15	15	5	10	0

Чистовик - 1

Задача 1

1) Перефразируем условие: $n \in \mathbb{N}$; $\begin{cases} n \equiv_{22} 2 & (1) \\ n \equiv_{20} x & (2) \\ n \equiv_{21} x+1 & (3) \\ x < 20 & (4) \end{cases}$ (т.к. x - остаток при делении)

2) из (2) и (3):

$\begin{cases} n = 20k_1 + x \\ n = 21k_2 + (x+1) \end{cases}$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Получаем; вычитая первое из второго:

$20k_1 + x - (21k_2 + x + 1) = 0 \Rightarrow \boxed{20(k_1 - k_2) = k_2 + 1} \Rightarrow \begin{cases} k_2 + 1 \vdots 20 \\ k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$

3) Получаем, что $k_2 = 19 + 20r$, где $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, при чём чем больше k_2, тем ~~4) Рассмотрим~~ больше $n \Rightarrow$ нам надо найти наименьшее k_2, чтобы найти наименьшее n.

4) Заметим, что ~~$k_2 = 19$~~ $k_2 = 19$ не подходит, т.к. тогда $n = 21 \cdot 19 + (x+1) \equiv_{22}$

$\equiv_{22} (-1) \cdot (-3) + x + 1 \equiv_{22} 4 + x$. В тоже время $n \equiv_{22} 2 \Rightarrow 4 + x \equiv_{22} 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \equiv_{22} -2 \Rightarrow x \geq 20$. Но по условию (4) $x < 20$. Противоречие! $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$k_2 = 19$~~ ~~не~~ при $k_2 = 19$ таких n нет

5) Рассмотрим следующее по величине k_2 и докажем, что оно подходит. След. по величине $k_2 = 39$, т.е. $n = 21 \cdot 39 + (x+1) \equiv_{22} (-1) \cdot (-5) + x + 1 \equiv_{22} 6 + x \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 + x \equiv_{22} 2 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv_{22} -4 \\ x < 20 \\ (\text{из } (4)) \end{cases} \Rightarrow x = 18$. Тогда $n = 21 \cdot 39 + 19$

Получаем:

$n \equiv_{22} 2$ (только что д-ли)

$n \equiv_{21} 19$ (из разложения)

$n = 21 \cdot 39 + 19 \equiv_{20} 1 \cdot (-1) + 19 \equiv_{20} 18$, а $18 = 19 - 1 \Rightarrow$ по условию тоже подходит

6) Получается, перебирая минимальные значения k_2 мы нашли минимальное n, подходящее под условие

Ответ: $21 \cdot 39 + 19 = 838$

(№4) Листовки-2

1) Заметим, что если после хода игрока есть два рядом стоящих числа ~~2 2~~ 2-2 или 3-1, то игрок проигрывает, т.к. след. ходом оппонент получит 4. ~~Давайте рассмотрим, может ли игрок получить получить тройку~~ Заметим так же, что ~~не если~~ без получения 3 и 4 мы не получим числа, большие 2.

2) Рассмотрим первую образовавшуюся тройку. Допустим она не привела игрока к проигрышу, т.е. не образовалась ситуация 3-1. Т.к. эта первая 3, то на окружности помимо этой 3 только цифры 2 и 1. Тогда, если игрок походил и не проиграл, то мы получили ситуацию

2 3 2, ~~а его, в свою очередь, должна предшествовать~~ Тогда

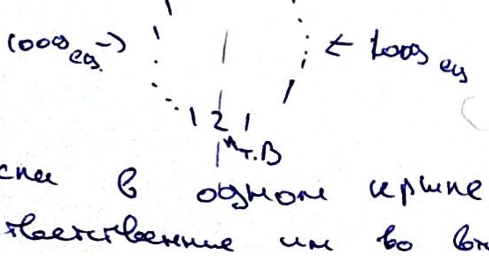
до хода игрока была позиция 2-1 2 2 или 1-2 2 2, а значит он мог выиграть, т.к. в этих случаях есть 2-2, ~~а значит он сделал не выгодный ход.~~ ~~предыдущ~~ а значит он сделал невыгодный ход.

~~Получаем, что~~ Получаем, что если после хода игрока образовалась ~~подвинулась~~ тройка, то ~~после этого хода победит~~ его оппонент победит, ~~в~~ т.к. будет позиция 3-1 (мы рассматриваем идеальную игру, а значит ситуация 2-3-2 невозможна, т.к. вместо образования 3 он победит, и игра закончится).

3) Получаем, что побеждает ~~проиграет~~ тот игрок, после хода которого не будет возможности образовать 2 так, чтобы ~~рядом с ней не~~ не образовалась ситуация 2-2.

4) Приведём пример стратегии для второго игрока

Пусть первым ходом игрок №1 получает двойку. Тогда второй получает двойку так, что между двумя двойками было ~~расстояние~~ $\frac{2022-4}{2} = 1009$ единичек. Тогда ~~мы~~ получим два одинаковых "крыла" единичек:



~~Давайте~~ ~~справа~~ Теперь пусть второй игрок будет ходить ~~строго~~ симметрично первому, т.е. если первый объединил два числа в одном крыле, то второй так же ~~на~~ аналогично объединяет соответственные им во втором (~~на~~ Обозвём т. A и B — первую и вторую двойку. Тогда после каждого хода игрока №2 будем все числа класть в вершины правильного n-угольника (n-кол-во чисел на окружн) и рассматривать симметрию относ. AB, т.е. если первый объединил какие-то две вершины, мы смотрим на их образы при симметрии и их объединяем)

Тогда получим, что при каждом ходе, не приводящем к поражению игрока №1, игрок №2 может сделать ход, не привод. к пораж.

Когда же игрок №1 будет вынужден сделать проигрышный ход за неимением возможности походить по-другому (это наступит, т.к. каждый ход уменьш. кол-во единиц и увел. кол-во двоек), то игрок №2 побеждает.

Ответ: да, побеждает второй игрок

№3

1) $N = 10^{2022} - 9^{2022}$. Последние три ~~числа~~ цифры N образуют остаток при делении на 10^3 числа N. т.е. нас требуют найти такое $x < 10^3$: $N \equiv_{10^3} x$

2) $\varphi(10^3) = \varphi(5^3) \cdot \varphi(2^3) = (5^3 - 5^2)(2^3 - 2^2) = 400$, где $\varphi(n)$ – ф-я Эйлера.

Тогда по т. Эйлера, т.к. $(9, 10^3) = 1$:

$9^{400} \equiv_{10^3} 1 \Rightarrow 9^{2022} = (9^{400})^5 \cdot 9^{22} \equiv_{10^3} 9^{22}$

Также $10^{2022} \equiv_{10^3} 0$

Получаем $N \equiv_{10^3} -9^{22} = -(81)^{11} = -(81^2)^5 \cdot 81 = -(6561)^5 \cdot 81 \equiv_{10^3}$

$\equiv_{10^3} -(561^2)^2 \cdot 561 \cdot 81 = -314721^2 \cdot 561 \cdot 81 \equiv_{10^3} -721^2 \cdot 561 \cdot 81 = -519841 \cdot 561 \cdot 81 \equiv_{10^3}$

$\equiv_{10^3} -841 \cdot 561 \cdot 81 = -841 \cdot 45441 \equiv_{10^3} -841 \cdot 441 \equiv_{10^3} 159 \cdot 441 = 70119 \equiv_{10^3} 119$

Получаем $N \equiv_{10^3} 119$

$\xRightarrow{\text{по п.1}}$ Ответ: 119

Чистовик-3

№5 Чистовик-4

1) Пусть $P(t) = t^3+4t^2+4t+a$, x, y, z — его корни $\Rightarrow$ По т. Виета:
$(P(y)=P(z)=0)$

$$\begin{cases} xyz = -a \\ xy+yz+zx = 4 \\ x+y+z = -4 \end{cases}$$

Запомним.

2) Также заметим, что $x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+xz+zx) = (-4)^2 - 2\cdot 4 = 8$

3) Легко убедиться, что для любых действ. x, y, z верно, что:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-(xy+xz+zx)).$$

(Доказывается это обычным раскрытием скобок)

Подставив сюда значения, узнанные в п. 1 и п. 2, получим:

$$x^3+y^3+z^3+3a = -4(8-4) \Rightarrow \boxed{x^3 = -16-3a-y^3-z^3}$$

4) $A = x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32 = (-y^3-4y^2-4y-a)+(-z^3-4z^2-4z-a) - a + \cancel{32}$
$+32-16 = \cancel{P(y)} - P(y) - P(z) + 16 - a = 16 - a$

$\Downarrow$

Отв: $16 - a$

№6

1) ~~Пересечения~~ Найдём пересечения парабол:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 & (1) \\ x = 4y^2 - 2 & (2) \end{cases}$$

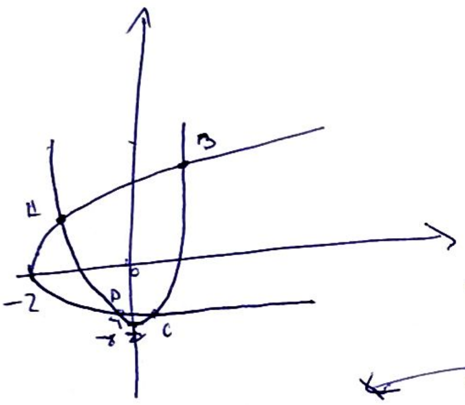
Подставив (1) в (2), получим:

$$x = 4(2x^2-1)^2 - 2 = 4(4x^4 - 4x^2 + 1) - 2 = 16x^4 - 16x^2 + 2$$

~~все возм~~ Пусть $P(x) = 16x^4 - 16x^2 - x + 2$. Тогда искомые x — корни $P(x)$.

2) Также получаем, что наши функции имеют вид:

$f(x) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{x+2}$ и $g(x) = 2x^2 - 1$



По условию требуется найти центр опис. окружн. ABCD (см. рис).

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $P(x)$, а (x, y) — коорд. искомой точки.

Тогда $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = \ldots = (x-x_4)^2 + (y-y_4)^2$.

Сократив, получим:

$$-2xx_1 - 2yy_1 + x_1^2 + y_1^2 = -2xx_2 - 2yy_2 + x_2^2 + y_2^2$$

$y_1^2 = \frac{x_1+2}{4}$ (по (2)).

$y_1 = 2x_1^2 - 1$ (по (1))

Получим:

$$2x(x_1 - x_2) + 2y(2(x_1-x_2)(x_1+x_2)) = (x_1-x_2)(x_1+x_2) + \frac{(x_1-x_2)}{4}.$$

$\cdot\left(\frac{x_1+x_2}{4} + 1\right)$, Т.к. очевидно, что кратных корней ~~нет в силу~~ нет в силу анализа графиков (пересеч двух парабол) то получим:

(3) $2x + 4y(x_1+x_2) = x_1 + x_2 + \frac{x_1+x_2}{16} + \frac{1}{4} = \frac{17}{16}(x_1+x_2) + \frac{1}{4}$

По т. Виета для $P(x)$: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -(x_3 + x_4) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - 4y(x_3+x_4) = -\frac{17}{16}(x_3+x_4) + \frac{1}{4}$

А также, аналогично (3) получим: $2x + 4y(x_3+x_4) = \frac{17}{16}(x_3+x_4) + \frac{1}{4} \Rightarrow$

складывая:

$\Rightarrow 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{8}$, а тогда, подставив в (3):

$4y(x_1+x_2) = \frac{17}{16}(x_1+x_2) \Rightarrow y = \frac{17}{64} \Rightarrow$ Ответ: $\left(\frac{1}{6}; \frac{17}{64}\right)$

Черновик-1

$$\begin{array}{r} 721 \\ \times\ 721 \\ \hline 721 \\ +\ 1442 \\ +\ 5047 \\ \hline 519841 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 561 \\ \times\ 81 \\ \hline 561 \\ +\ 4488 \\ \hline 45441 \end{array}$$

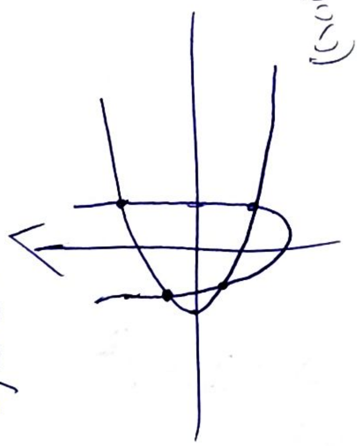
$$1000 - 841 = 159$$

$$\begin{array}{r} 841 \\ +\ 159 \\ \hline 1000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ \times\ 159 \\ \hline 3969 \\ +\ 2205 \\ 441 \\ \hline 70119 \end{array}$$

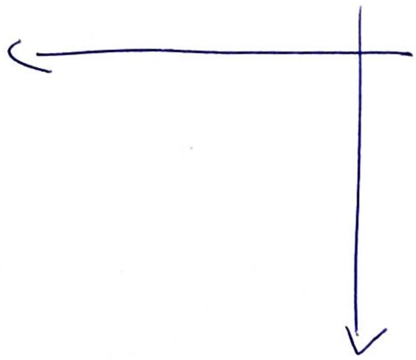
$y = \sqrt{x+2} - 1$

$y = 2x^2 - 1$



$x - y = 4y^2 - 2x^2 - 1$

$(4x^2 - 8x) - (x+2) =$



чернетка-2

$(t) = t^3 + 4t^2 + 4t + a = 0$

$x < y < z$

$= (t-x)(t-y)(t-z)$

$A = x^3 - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z + 32$

$-(2y+1)^2 - (2z+1)^2 + x^3 + 34$

$$\begin{cases} xyz = -a \\ xy + yz + zx = 4 \\ x + y + z = -4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (-4)^2 - 2\cdot 4 = 16 - 8 = 8$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$x^3 + y^3 + z^3 - \underbrace{3xyz}_{-3a} = \underbrace{(x+y+z)}_{-4}(\overbrace{x^2+y^2+z^2}^{8} - \overbrace{(xy + xz + zx)}^{4}) = -16$

$x^3 + y^3 + z^3 = -16 + 3a$

$(t+1)^3 + t^2 + t + a - 1$

$x^3 = -16 + 3a - y^3 - z^3$

$A = -16 + 3a - y^3 - 4y^2 - 4y$

-8

$2a$

$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} =$

$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2$

$-2x_1x + -2yy_1 + x_1^2 + y_1^2$

$(10-1)^k 10^{2021-k} = \qquad 3^{44}$

$= 10^{2021} - \binom{2}{2} 10^{2020}$

$3^{11} \equiv_{10^3} 5?$

1 2 3 4

$3 \to 9 \to 81 \to 243 \to 729 \to 187$

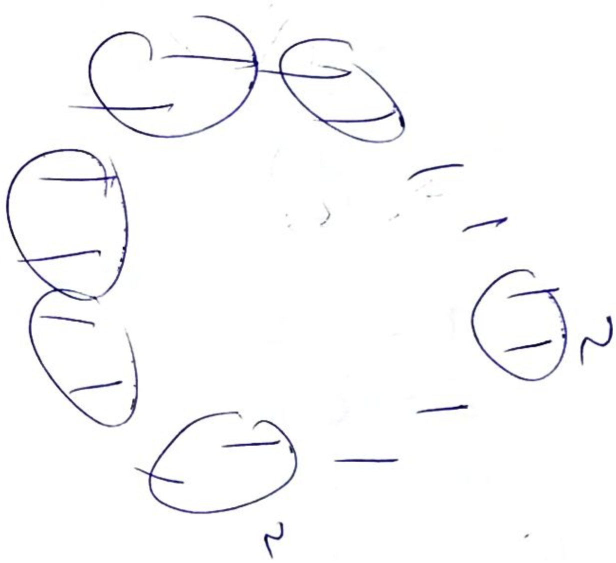
$10^{22} - 9^{22} =$

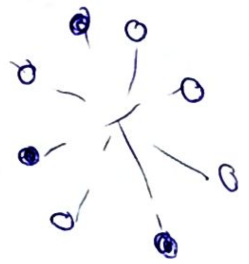
$= 10^{21} + 9 \cdot 10^{20} + \ldots + 9^{19} \cdot 10^2 + 9^{18} \cdot 10$

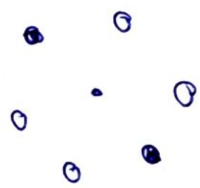
$$\begin{array}{r} 243 \\ \times\ 3 \\ \hline 729 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 729 \\ \times\ 3 \\ \hline 2187 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81 \\ \times\ 81 \\ \hline 81 \\ +\ 648 \\ \hline 6561 \end{array}$$

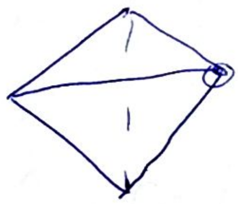
$$\begin{array}{r} 561 \\ \times\ 561 \\ \hline 561 \\ +\ 3366 \\ +\ 2805 \\ \hline 721 \end{array}$$

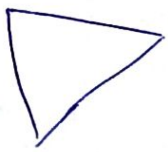
ω

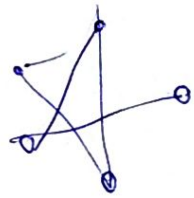




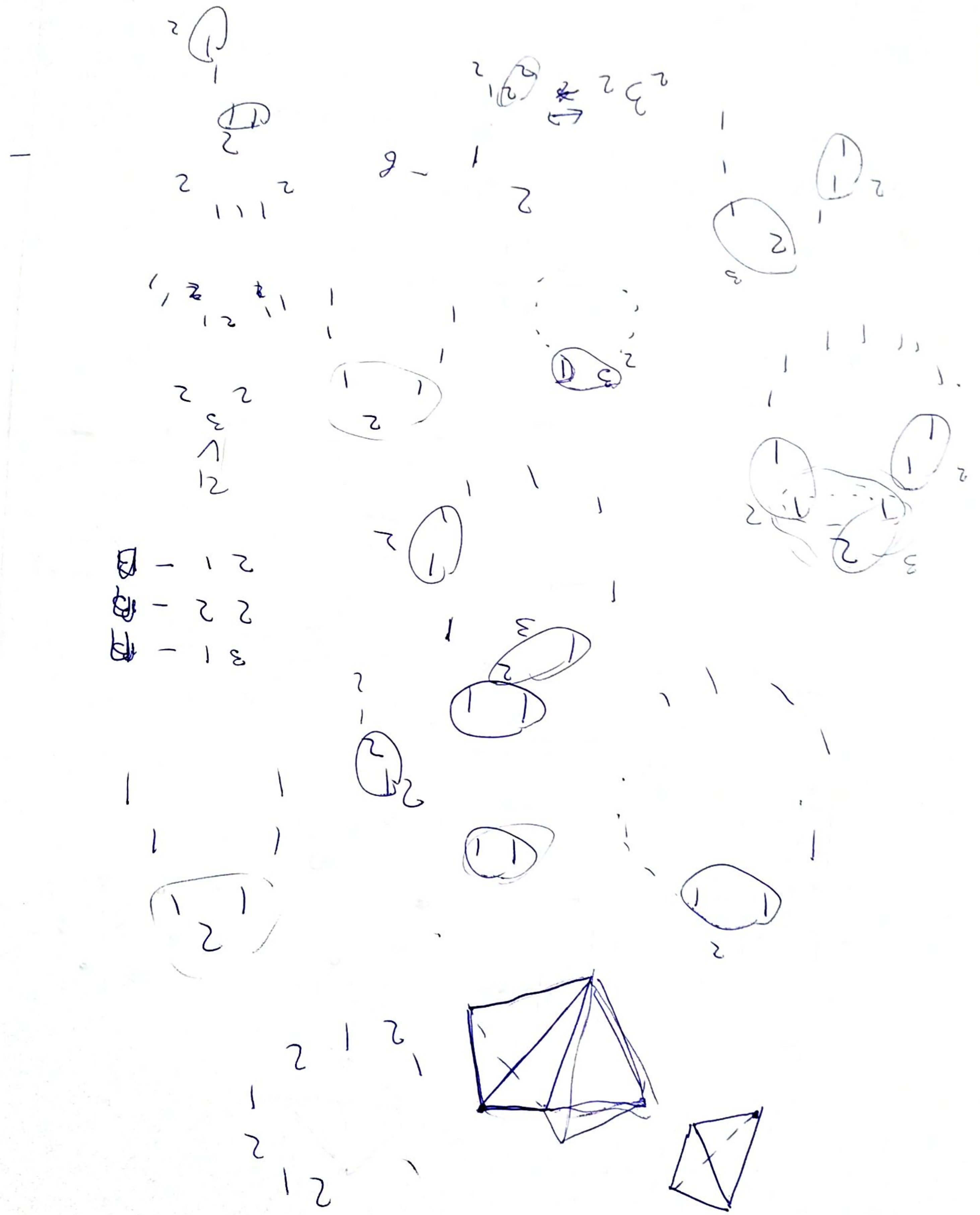








перидом – 4



Черновик 5

$10^{2022} - 9^{2022} \equiv_{10^3} ?$

$a^{\varphi(n)} \equiv_n 1$

$\| a^n - b^n \|_p = \| a-b \|_p + \| n \|_p$

$9^{2022} = 81^{1011}$

$10^{2022} - (10-1)^{2022}$

$10^{2022} - C^1_{2022} 10^{2021} +$

$10^{2022} -$

$10^{2022} - 9^{2022} \equiv_{10} 1$

$1011 \mid 3$, 337

$(81^3)^{337}$

$81 \cdot 81 = 6561$

$501 \cdot 81 = 40581$

$222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$

$81^3 \equiv_{1000} 501 \cdot 81 \equiv_{1000} 581$

$581 \cdot 581 = 761$

$\lambda(2^3) = \frac{\varphi(2^3)}{2}$

$337 \mid 13$, $337 \mid 17$, $337 \mid 19$

$= 70 + 63$

$\varphi(10^3) = 10^3 - 10^2 = p(1 - \frac{1}{p}) = 900$

$\lambda(10^3) =$

$\text{НОК}(\underbrace{\lambda(5^3)}_{100}, \underbrace{\lambda(2^3)}_{2}) =$

$= 100$

$9^{900} \equiv_{10^3} 1$

$(9^{900})^2 \equiv_{10^3} 1$

9^{1800}

$9^{2022} \equiv_{10^3} 9^{222}$

$8 - 4$

$190 + 81 =$

$= 171$

3^{4044}

$\varphi(10^3) = 10^3 (1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{2}) =$

$= (5^3 - 5^2)(2^3 - 2^2) =$

$= 100 \cdot 4 = 400$

$81 \cdot 3 = 243$

$9^3 =$

$(10-9)(10^{2021} + 9 \cdot 10^{2020} + 9^2 \cdot 10^{2019} + \dots$

$+ 9^{2020} \cdot 10 + 9^{2021}) \equiv_{10^3}$

$9^{2019} \cdot 10^2 + 9^{2020} \cdot 10 + 9^{2021}$

$\equiv_{10^3} 9^{19} \cdot 10^2 + 9^{20} \cdot 10 + 9^{21} =$

$= 9^{19}(10^2 + 90 + 9^2) = 9^{19} \cdot 271$

$9^{2022} \equiv_{1000} 9^{22} = 81^{11} = (81^2)^5 \cdot 81 \equiv 561^5 \cdot 81$

$= 721^2 \cdot 81 \cdot 5$

$=$

2020

Черновик -6

$\min n$

$n \equiv_{20} x$

$n \equiv_{21} x+1$

$n \equiv_{22} 2$

$\Downarrow$

$n \vdots 2$

$n = 22k_1 + 2 \equiv_{21} k_1 + 2 \equiv_{20} 2k_1 + 2$

$n = 20k_2 + x \qquad x < 20$

$n = 21k_3 + (x+1) \qquad \cancel{x+1 < 21}$

$20(k_3 - k_2) + k_3 + 1 = 0$

$20(k_2 - k_3) = k_3 + 1$

$\cancel{18 \geq k_2} \Rightarrow k_3 + 1 \vdots 20$

$\Downarrow$

$k_3 \geq 19 \Rightarrow n \geq 21 \cdot 19 + 1 \equiv_{22} (-1)\cdot(-3) + 1$

$21 \cdot 19 + 1 \equiv_{20} 1 \cdot (-1) + 1 \equiv 0$

$21 \cdot 19 + 1 \equiv (-1)\cdot(-3) + 1 \equiv 4$

$n = 21 \cdot 19 + (x+1) \equiv_{20} 1 \cdot -1 + x + 1 \equiv_{20} x$

$21 \cdot 19 + (x+1) \equiv_{22} (-1)\cdot(-3) + x + 1 =$

$= 4 + x \equiv 2 \qquad \Rightarrow x \equiv -2$

$\Downarrow$

$x \geq 20$

$k_3 =$

~~21·20~~

$k_3 = 39$

$2k_1 + 2 \equiv_{20} x$

$2k_1 + 2 \equiv_{21} x + 1$

~~21·...~~ $n = 21 \cdot 39 + x + 1 \equiv_{20} x$

$21 \cdot 39 + x + 1 \equiv_{22} (-1)\cdot(-5) + x + 1 \equiv 6 + x \equiv 2$

$\Downarrow$

$x \equiv_{22} -4 \Rightarrow x = 18$

Отв: ~~21·39~~

$21 \cdot 39 + 19$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ 4 \\ \hline 84 \end{array}$$

$21 \cdot 40 - 21 + 19 =$

$10 - 22 = 78$

$= 840 - 2$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times\ 8 \\ \hline 6 \end{array}$$

$819 \mid 21 = 39$, 63, 189

$836 \mid 22 = 38$, 66, 176