МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Киреев Максим Олегович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	0

Чистовик (1)

№1

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{2}}=\sqrt[3]{\frac{3-1}{2}}=\underline{1}$$

B:

Можно заметить, что каждый член суммы представим в таком виде:
(если n - нечетное число из числителя)

$$\frac{n}{\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\right)^2}=\underline{\frac{16n}{(n-1)^2(n+1)^2}}$$

Рассмотрим такую разность: $\frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}=\frac{4(n+1)^2-4(n-1)^2}{(n-1)^2(n+1)^2}=\underline{\frac{16n}{(n-1)^2(n+1)^2}}$

Получается, что B равно: (при $n=3$)

$$\underline{B}=\underbrace{\frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}}_{\frac{n}{\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\right)^2}}+\underbrace{\frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{n+3}{2}\right)^2}}_{\frac{n+2}{\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+3}{2}\right)^2}}+\ldots+\frac{1}{\left(\frac{n+113}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{n+115}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{n+115}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{n+117}{2}\right)^2}=$$

числитель следующего больше на 2

$$=\frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{n+117}{2}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{120}{2}\right)^2}=\underline{1-\frac{1}{60^2}}$$

$$B=1-\frac{1}{60^2}<1=A$$

Ответ: A.

№2

Выпишем все двузначные числа, которые делятся на 19 или 23:

19, 23, 38, 46, 57, 69, 76, 92, 95.

• Можно заметить, что цифра 2 может стоять только на 2020 месте, т.к. после нее идет 3, а после 3 → 8. А с восьмерки не начинаются двузначные числа, делящиеся на 19 или 23.

• Рассмотрим начало нашего числа:

469576957695769... Для всех чисел однозначно подбирается следующее. (после 9 идет 5, т.к. 2 только на 2020 месте).

Чистовик 2

№2-продолжение

$$\underbrace{4\,\underbrace{6957}\,\underbrace{6957}\dots\underbrace{6957}}_{504 \text{ блока } „6957"}\;\underset{2018}{6}\;\underset{2019}{9}\;\underset{2020}{\_}\;\underset{2021}{\_}\;\underset{2022}{\_}$$

↑ осталось 5 мест в числе

После девятки на 2019 месте может идти 238, а может 576.

⇓

на 2022 месте стоит 8 или 6.

Только после „9" возможны варианты выбора следующей цифры

Ответ: 8;6.

№3

~~$f(n)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-n^7}}$~~ $f(n)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-n^7}}$, где $n=2022$

$$f(f(n))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-n^7}}\right)^7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-n^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-n^7-1}{1-n^7}}}=\frac{1}{\frac{-n}{\sqrt[7]{1-n^7}}}=\frac{\sqrt[7]{1-n^7}}{-n}$$

$$f(f(f(n)))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{\sqrt[7]{1-n^7}}{-n}\right)^7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1-n^7}{-n^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1+\frac{1-n^7}{n^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{n^7+1-n^7}{n^7}}}=\frac{1}{\frac{1}{n}}=n$$

Применяя функцию f три раза, мы получаем ~~~~ преобразование, оставляющее число из ОДЗ таким же. Значит, применив функцию f 1302 раза (1302⋮3), мы (из суммы цифр) получим просто значение аргумента.

$$\underbrace{f(f(f(\dots f(2022))\dots))}_{1304 \text{ раза}}=f(f(2022))=\frac{\sqrt[7]{1-2022^7}}{-2022}=\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$$

Ответ: $\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

№6

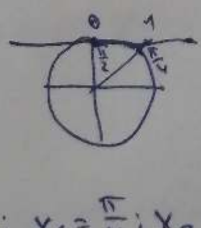
$$a\,ctg^3x+(2a^2-a-2)ctg^2x+(2-4a-2a^2)ctg\,x+4a=0$$

1 случай $a=0$:

$-2ctg^2x+2ctg\,x=0$

~~ctg x = 0;1~~

$ctg\,x=0;1$



На интервале $(0;\pi)$ только два корня: $x_1=\frac{\pi}{4}$; $x_2=\frac{\pi}{2}$

$r_{max}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ – наибольшее расстояние

Чистовик ③

№6-продолжение

2 случай $a \neq 0$: Пусть $t = ctg\, x$.

$$a t^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 + (2 - 4a - 2a^2)t + 4a = 0$$

$$a t^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 - t(2a^2 - a - 2) - 5at + 4a = 0$$

$$\left| \; t^3 - 5t + 4 = (t-1)(t^2 + t - 4) \right.$$

$$a(t^3 - 5t + 4) + (t^2 - t)(2a^2 - a - 2) = 0$$

$$(t-1)\big(a(t^2 + t - 4) + t(2a^2 - a - 2)\big) = 0$$

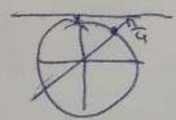
$$(t-1)\big(at^2 + (2a^2 - 2)t - 4a\big) = 0$$

$$D/4 = (a^2 - 1)^2 + 4a^2 = a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2 = (a^2 + 1)^2 > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-a^2 + 1 \pm (a^2 + 1)}{a} = \frac{2}{a}; \frac{-2a^2}{a} = \frac{2}{a}; -2a$$ т.к. $a \neq 0$.

$$a(t-1)\left(t - \frac{2}{a}\right)(t + 2a) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} ctg\, x_1 = 1 \\ ctg\, x = \frac{2}{a} \\ ctg\, x = -2a \end{array}\right.$$



На отрезке $(0;\pi)$: $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = arcctg\, \frac{2}{a}$; $x_3 = arcctg(-2a)$

Т.к. $a \neq 0$, то один из корней x_2 или x_3 будет $> \frac{\pi}{2}$ (т.к. $\left[\begin{array}{l} \frac{2}{a} < 0 \\ -2a < 0 \end{array}\right.$)

$\Downarrow$

$r_{max} > \frac{\pi}{4}$ (есть корень $\frac{\pi}{4}$)

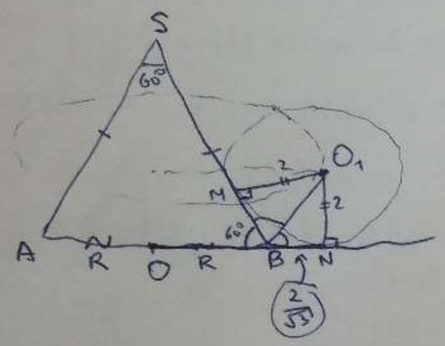
• Значит, наименьшим наиб. расстояние между корнями будет в случае 1 ($\underline{a=0}$).

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Чистовик ④

№4

• Рассмотрим сечение конуса плоскостью, перпендикулярной основанию и проходящей через вершину конуса и центр одного из шаров. (S – вершина конуса, R – радиус основания)



1) $\triangle SAB$ – р/б; $\angle ASB = 60^\circ \Rightarrow \triangle ASB$ – р/с

$\angle SBA = 60^\circ$

$\Downarrow$ } смежные

$\angle SBN = 120^\circ$

2) $\triangle O_1BN = \triangle O_1BM$ (по двум катетам)

• $MB = BN$ как отрезки касательных

• $O_1M = O_1N$ как радиусы

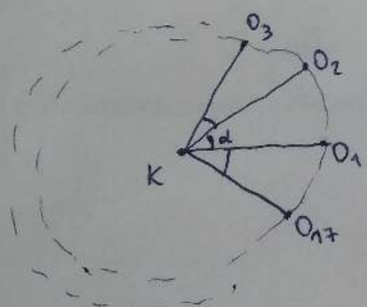
$\Downarrow$

$\angle O_1BN = \angle O_1BM = 60^\circ$

$$\underline{BN} = \frac{O_1N}{tg\angle O_1BN} = \underline{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

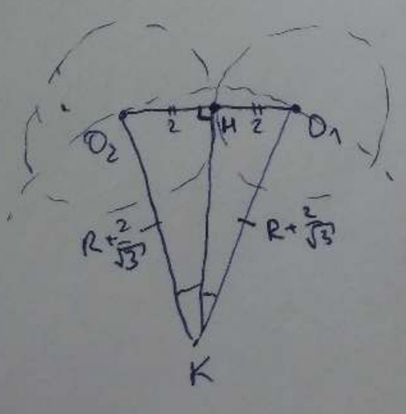
• Так как шары одинакового радиуса, то точки их касания (между собой) и центры лежат на одинаковой высоте над плоскостью основания (эта высота равна 2).

Если провести окружность через центры шаров, то ее радиус будет равен $R + \frac{2}{\sqrt{3}}$.



– вид сверху

$$\underline{\alpha = \frac{2\pi}{17}}$$



H – точка касания 1 и 2 шара

K – центр окружности, проходящей через центры шаров.

$\triangle O_2KO_1$ – р/б ($O_2K = O_1K$ – равны как радиусы)

$O_2H = HO_1 \Rightarrow KH$ – медиана, высота и биссек. $\triangle O_2KO_1$

$\quad = 2$

$$\angle O_1KH = \frac{\angle O_1KO_2}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{17}$$

$$\sin\angle O_1KH = \frac{2}{R + \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$R + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} \Rightarrow \boxed{R = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Ответ: $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

Чистовик (5)

№5

$a = t^3 - 144t = t(t-12)(t+12) > 0$ при $t \in (-12;0) \cup (12;+\infty)$

$b = 2^t - 256 > 0$ при $t \in (8;+\infty)$.

$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ при $t \in (\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n), n \in \mathbb{Z}$. → ... $(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}); (-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}); (\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}); (\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}); (\frac{13\pi}{3}; \frac{14\pi}{3})$

1 случай $t \leq -12$: $a \leq 0, b < 0$. Значит, $x_{сред} \leq 0$. Не подходит.

2 случай $t \in (-12;0)$: $a > 0, b < 0$. Значит $x_{сред} > 0 \Leftrightarrow c > 0$ (на $(-12;0)$)

~~$c>0$ при~~ $-\frac{11\pi}{3} \overset{>}{\vee} -12$

$11\pi \overset{<}{\wedge} 36$

$11\pi < 11 \cdot 3{,}2 = 35{,}2 < 36$

$\Rightarrow (-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}) \in (-12;0)$

$(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}) \in (-12;0)$

$\frac{\pi}{3} > 0$

подходящие интервалы

3 случай $t = 0$: $a = 0, b < 0 \Rightarrow x_{сред} \leq 0$. (X) не подх.

4 случай $t \in (0;8]$: $a < 0, b \leq 0 \Rightarrow x_{сред} \leq 0$ – не подх.

5 случай $t \in (8;12)$: $b > 0, a < 0$.

$x_{сред} > 0 \Leftrightarrow c > 0$.

$\frac{7\pi}{3} \overset{<}{\vee} 8$

$7\pi \overset{<}{\vee} 24$

$7\pi < 7 \cdot 3{,}2 = 22{,}4 < 24$

$\frac{8\pi}{3} > 8$ $\frac{13\pi}{3} > 12$

$(8; \frac{8\pi}{3})$ – подходит

6 случай $t = 12$: $b > 0, a = 0, c < 0$ $x_{сред} < 0$.

7 случай $t > 12$: $b > 0, a > 0, \Rightarrow x_{сред} > 0$.

Ответ: $(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}) \cup (-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}) \cup (8; \frac{8\pi}{3}) \cup (12;+\infty)$.

Черновик ~~4~~ 6

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = \underline{1}$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2}$$

$$\frac{n}{\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\right)^2} + \ldots \qquad \frac{n}{\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\right)^2} + \frac{n+2}{\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+3}{2}\right)^2}$$

$2 : -1$

$(n-2)(n+1)$

$$\frac{n}{\left(\frac{n^2-1}{4}\right)^2} = \frac{16n}{(n^2-1)^2} = \frac{16n}{n^4-2n^2+1}$$

$$\sqrt{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}} \le \frac{\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}}{2} = \frac{n}{2}$$

$$f(n) = \frac{16n}{(n^2-1)^2}$$

$9\cdot 16 = 144$

$$\frac{n}{\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\right)^2} \qquad \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}$$

$n(4 = 9 + 3 = 12$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400}$$

$$\frac{4}{4} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{4}{16}$$

n^2+6n+9

$$\frac{16}{144} - \frac{7}{144}$$

$(n-1)(n+1)(n+3) = t$

$(n+2)(n^2-2n+1)$

$$1 - \frac{n}{\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\right)^2} = 1 - \frac{16n}{n^4-2n^2+1} = \frac{n^4-2n^2+1-16n}{n^4-2n^2+1}$$

$$\frac{n}{\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\right)^2} - \frac{n+2}{\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+3}{2}\right)^2} = \frac{n(n+3)-(n-1)(n+2)}{\left(\frac{(n-1)(n+1)(n+3)}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{n^2+3n-n^2-n+2}{\left(\frac{(n-1)(n+1)(n+3)}{4}\right)^2} = \frac{32(n+1)}{(n-1)^2(n+1)^2(n+3)^2} =$$

$$\frac{16n}{(n^2-1)^2} - \frac{16(n+2)}{((n+2)^2-1)^2}$$

$$\frac{16(n(n+3)^2 - (n+2)(n-1)^2)}{t^2} = \frac{16(n^3+6n^2+9n-n^3+2n^2}{}$$

$$\frac{-n-2n^2+4n-2)}{t^2} = \frac{16(6n^2+12n-2)}{t^2} =$$

$$= \frac{32(3n^2+6n-1)}{t^2}$$

Черновик (7)

$\frac{31}{4} - \frac{5}{36} = \frac{27-5}{36} = \frac{22}{36}$ $\qquad \frac{5}{36} - \frac{3}{4} = \frac{5-27}{36} = -$

$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} = \frac{27+5}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

$\frac{\pi}{3} - 4\pi = \frac{\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} = -\frac{11\pi}{3}$ v -12

$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$

$(n+1)(n^2-2n+1)-3(n+1)$

$n^3+3n+3n+1 =$

$7 \cdot 3, 2 = 21$

$$\frac{16n}{(n-1)^2(n+1)^2} + \frac{16(n+2)}{(n+1)^2(n+3)^2} = \frac{16\left(n^3+6n^2+9n+(n+2)(n^2-2n+1)\right)}{\left((n-1)(n+1)(n+3)\right)^2} = \frac{16(n^3+6n^2+9n+n^3-2n^2+n+2n^2-4n+2)}{t^2} =$$

$$= \frac{16(2n^3+6n^2+6n+2)}{t^2} = \frac{32\left((n+1)(n^2-n-2)\right)}{t^2} = \frac{32(n+1)^2(n-2)}{(n-1)^2(n+1)^2(n+3)^2} = \frac{32(n-2)}{(n-1)^2(n+3)^2} = \frac{32(n-2)}{}$$

$$\frac{16n}{(n-1)^2(n+1)^2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} = \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n-1)^2(n+1)^2} = \frac{4n}{}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{n+3}{2}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(\frac{n+115}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{n+117}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{n+117}{2}\right)^2} = \frac{1}{}$$

$86 + 9 = 95$

---

46 ~~43,87~~, $\qquad$ 23, 46, 69, 92 $\qquad$ 19, 23, 38, 46, 57, 69, 76, 92, 95

19, 38, 57, 76, 95 $\qquad$ только в конце может быть

9238

$\underbrace{4695}\underbrace{76957}6957 \ldots 6957\,6\,9 \to 238$, $\to 576$

2017 . . . .

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right)^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{1-x^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1-x^3-1}{1-x^3}}} = \frac{1}{\frac{-x}{\sqrt[3]{1-x^3}}} = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{-x}$$

Черновик (8)

$a\,ctg^3x+(2a^2-a-2)ctg^2x+(2-4a-2a^2)ctg\,x+4a=0$

При $a=0$:

$-2ctg^2x+2ctg\,x=0$

$ctg\,x=0;-1$

$r=\frac{\pi}{4}$

$-4at$ | $at-5at$

При $a\neq0$: $t=ctg\,x$

$at^3+(2a^2-a-2)t^2+(2-4a-2a^2)t+4a=0$

$at^3+(2a^2-a-2)t^2-t(2a^2-a-2)-5at+4a=0$

$a(t^3-5t+4)+(t^2-t)(2a^2-a-2)=0$

$a(t-1)(t^2+t-4)+(t-1)t(2a^2-a-2)=0$

$(t-1)(at^2+\cancel{at}-4a+2a^2t-\cancel{at}-2t)=0$

$(t-1)(at^2+(2a^2-2)t-4a)=0$

$D/4=(a^2-1)^2+4a^2=(a^2+1)^2$

$t_{1,2}=\frac{1-a^2\pm(a^2+1)}{a}=\frac{2}{a};-\frac{2a^2}{a}=\frac{2}{a};-2a$

$(t-1)(t^2+t-4)$

$ctg\,x_1=1;$

$ctg\,x_2=\frac{2}{a}$

$ctg\,x_3=-2a$

$x_1=\frac{\pi}{4};$

$x_2=arcctg\frac{2}{a}$

$x_3=arcctg(-2a)$

$\frac{2}{a}\vee1$

$0\vee\frac{a-2}{a}$

$0;2$

$a<2$

$\frac{2}{a}\vee-2a$

$\frac{2+2a^2}{a}\vee0$

$-2a\vee1$

$0\vee(2a+1)$

При $a>-\frac{1}{2}$

$\boxed{-\frac{1}{2};0;2}$

Черновик

9

$f(f(x)) = \dfrac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x}$

$f(f(f(x))) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x}\right)^7}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1+\frac{1-x^7}{x^7}}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7+1-x^7}{x^7}}} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$

1302 раза - несущ.

$f(f(x)) = -\dfrac{\sqrt[7]{1-2022^7}}{2022}$

При $a < -\frac{1}{2}$: $ctg\, x_2 < ctg\, x_1 < ctg\, x_3$

$x_3 < x_1 < x_2$

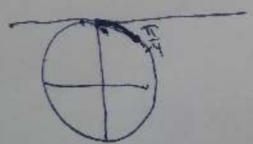
$r_{max} = |x_2 - x_3| \to min$

$ctg(x_2 - x_3) = \dfrac{ctg\, x_3 \cdot ctg\, x_2 + 1}{ctg\, x_2 - ctg\, x_3} = \dfrac{-2a \cdot \frac{2}{a} + 1}{\frac{2}{a} + 2a} = \dfrac{1-4}{\frac{2}{a}+2a} = \dfrac{-3}{\frac{2}{a}+2a} = \dfrac{3}{-\frac{2}{a}-2a} \leq \dfrac{3}{4}$

$(x_2 - x_3) \geq arcctg\, \frac{3}{4}$

$-\frac{2}{a} - 2a \geq 2\sqrt{4} = 4$

$\frac{2}{a} + 2a \leq -4$



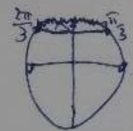
~~$b>0$ при $t>8$~~

$b > 0$ при $t > 8$

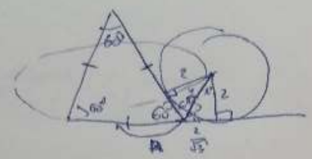
$a > 0$ при $t \in (-12; 0) \cup (12; +\infty)$

$c > 0$ при $t \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$

$t(t-12)(t+12) > 0$

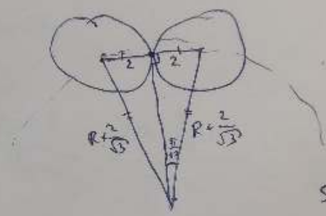


Черновик 10



$4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$

$\alpha=\frac{360^\circ}{17}=\frac{2\pi}{17}$.



$\sin\frac{\pi}{17}=\frac{2}{R+\frac{2}{\sqrt3}}$

$R+\frac{2}{\sqrt3}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}}$

$R=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}}-\frac{2}{\sqrt3}$

При $t\le -12$: $b\le 0, a\le 0$ $x_{сред}\le 0$.

При ~~$t<-12$~~ $t\in(-12;0)$: $a>0, b<0$.

среднее положительно, при $c>0$