МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кистин Илья Александрович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	10	15

Чистовик

№1)
$$A=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\dots+\frac{89}{(44\cdot 45)^2}$$

$$A=\sum_{n=1}^{44}\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}=\sum_{n=1}^{44}\left(\frac{1}{n^2(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)^2}\right)=\sum_{n=1}^{44}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\frac{2n+1}{(n^2\cdot(n+1)^2)}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$A=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{43^2}-\frac{1}{44^2}+\frac{1}{44^2}-\frac{1}{45^2}=1-\frac{1}{45^2}=\frac{44\cdot 46}{45^2}$$

$$B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{3-2\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}\underset{\substack{(\sqrt{3}>1)\\ 3>1}}{=}\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3})^2-1^2}}{\sqrt[3]{2}}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=1$$

Итого: $A=1-\frac{1}{45^2}$, $B=1$, т.е. $B>A$

Ответ: $B>A$.

№2) 2021 знак пары $\vdots 19$ или $\vdots 23$

двузначные числа, которые $\vdots 19$: 19 38 57 76 95

$\vdots 23$: 23 46 69 92

Начнём заполнять число: $1\to 19\to 195\to 1957\to 19576\to 195769\to$

$19\to 192\to 1923\to 19238\not\to$ нет числа, которое начинается на 8 в нашем месте

Итак, комбинация 9238 – тупиковая, но возможно её можно применить в самом конце числа, а другие части числа заполняются наборами 9576, Итого, наше число:

$$\underbrace{1}_{2021}\underbrace{9576}_{2020-2017}\underbrace{9576}_{2016-2013}9576\dots\underbrace{9576}_{8765}\underbrace{\qquad}_{4\,3\,2\,1}$$

9576
или
9238

На последние четыре места можно поставить
9576
или
9238, ведь 8 будет последней и не будет началом числа

Ответ: или 6 или 8, оба числа приведены выше.

№3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} = (1-x^7)^{-\frac{1}{7}} = ((1-x)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1))^{-\frac{1}{7}}$ | Чистовик №2

$D: x \neq 1$

f применяется ~~1031~~ 1304 раза от $x = 2022$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1-x^7}{-x^7}} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}} =$$

$$= \sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}$$

$$f(f(f(x))) = \cancel{(1-\ldots)^{\frac{1}{7}}} = \left(1-\left(\sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}\right)^7\right)^{-\frac{1}{7}} = \left(1-\left(1-\frac{1}{x^7}\right)\right)^{-\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{x^7}\right)^{-\frac{1}{7}} = x^{-7\cdot(-\frac{1}{7})} = x$$

Итого: $f(f(f(x))) = x$, а значит $f(f(f(f(x)))) = f(x)$, т.е. после 3-ёх применений $f(x)$ на $f(x)$, $f(x)$ переходит в $f(x)$,

~~1032 : 3 ⇒ после 1032 применений~~

$1302 \vdots 3$ ⇒ после 1302 применений $\underset{1\text{ прим}}{f(x)} = \underset{1+1302=1303 \text{ прим}}{f(x)}$

0 применений $x = 2022$

~~1 прим~~

3 применения: $x = 2022$

1302 прим: $x = 2022$

1304 прим: $f(f(2022)) = \sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}} = \sqrt[7]{\frac{2022^7-1}{2022^7}} = \frac{\sqrt[7]{2021(2022^6+\ldots+1)}}{2022}$

$\frac{2022^7-1}{2022-1}$

Не совсем понятно, что именно подразумевается под применением функции 1304 раза, если всего было записано 1304 значка функции, то $\underset{1}{f}(\underset{2}{f}(\ldots(\underset{1303}{f}(\underset{1304}{f}(x)))\ldots)) = f(f(x)) = \sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}$ для $x = 2022$:

это $\frac{\sqrt[7]{2022-1}}{2022}$

если же $f(x)$ применялась не к x, а уже к $f(x)$, то:

$\underset{1}{f}(\underset{2}{f}(\ldots(\underset{1303}{f}(\underset{1304}{f}(\underset{\text{исх}}{f}(x))))\ldots)) = f(f(f(x))) = x$, для $x = 2022$:

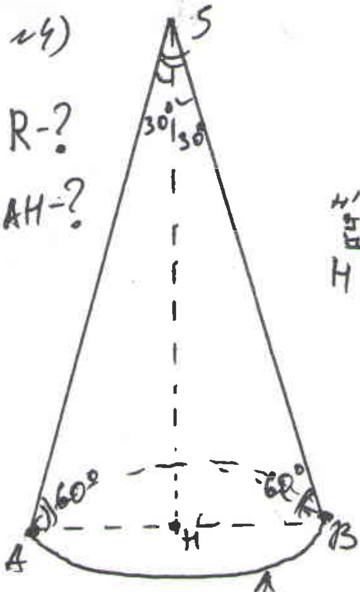
это 2022

Ответ: $\frac{\sqrt[7]{2022-1}}{2022}$ (подразумевается, что значок $f(x)$ был записан 1304 раза)

№4)

R-?

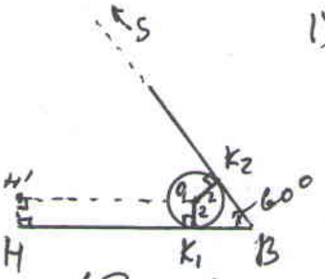
AH-?



13 шаров

с $r=2$

(Рис 1)

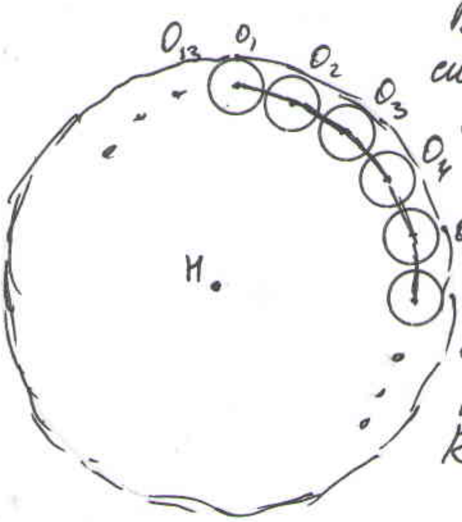


(Рис 2)

1) Фигура $BK_2O_1K_1$ симметрична, O_1 лежит на биссектрисе $\angle B \Rightarrow \angle O_1BK_1 = 30^\circ$ и $K_1B = 2\sqrt{3}$

$K_1B = O_1K_1 \operatorname{ctg} 30^\circ$

2) Изобразим проекцию конструкции на пл-ть основания



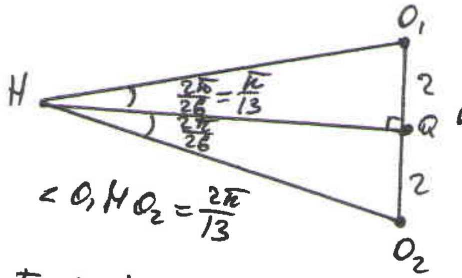
В силу радиальной симметрии конструкции получим правильный 13-ти угольник со стороной $2r = 4$ по рисункам 3 и 2 можно видеть, что

~~$R = HO_1 = H'O_1 =$~~

$R = \underset{\text{рис 3}}{HO_1} + K_1B = \underset{\text{рис 2}}{H'O_1} + K_1B = HK_1 + K_1B$

(Рис 3)

т.е. наша задача найти HO_1 - расстояние от центра до вершины в правильном 13-ти угольнике со стороной 4:



$HO_1 = \dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{13}}$ из $\triangle O_1HQ$

$\angle O_1HO_2 = \dfrac{2\pi}{13}$

т.е. $R = HO_1 + K_1B = \dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{13}} + 2\sqrt{3}$

Ответ: $R = \dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{13}} + 2\sqrt{3}$

№6) $a\,tg^3x+(1-a-2a^2)tg^2x+(2a^2-2a-1)tg\,x+2a=0$ $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ Участовка max длина

~~max длина~~

$tg\,x=1$ - ? $\cancel{a}+\cancel{1}-\cancel{a}-2a^2+2a^2-\cancel{2a}-\cancel{1}+\cancel{2a}=0$, $tg\,x=1$ - один из корней

$tg\,x\to t$ (обозначение, не замена)

$$\begin{array}{l} a t^3+(1-a-2a^2)t^2+(2a^2-2a-1)t+2a \;\Big|\; t-1 \\ -\;a t^3-a t^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Big|\; a t^2+(1-2a^2)t-2a \\ \qquad (1-2a^2)t^2+(2a^2-2a-1)t \\ \quad -\;(1-2a^2)t^2-(1-2a^2)t \\ \qquad\qquad -2at+2a \\ \qquad\qquad -2at+2a \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$(tg\,x-1)(a\,tg^2x+(1-2a^2)tg\,x-2a)=0$

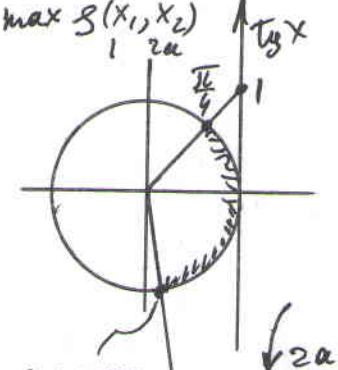
$$tg\,x=\frac{2a^2-1\pm\sqrt{(1-2a^2)^2-4\cdot a\cdot(-2a)}}{2a}=\frac{2a^2-1\pm\sqrt{(1-4a^2+4a^4)+8a^2}}{2a}=\frac{2a^2-1\pm\sqrt{(2a^2+1)^2}}{2a}=\left[\begin{array}{l}2a\\ -\frac{1}{a}\end{array}\right.$$

$$\frac{2a^2\cancel{-1}+2a^2\cancel{+1}}{2a}=2a$$

$$\frac{2a^2-1-2a^2-1}{2a}=-\frac{1}{a}$$

$(tg\,x-1)(tg\,x-2a)(tg\,x+\frac{1}{a})=0$

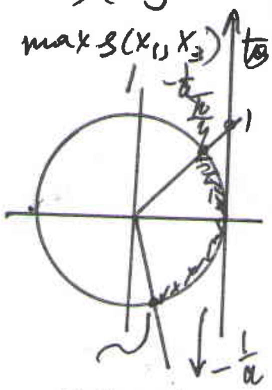
max $\rho(x_1,x_2)$
1 2a



стремится к $-\frac{\pi}{2}$;

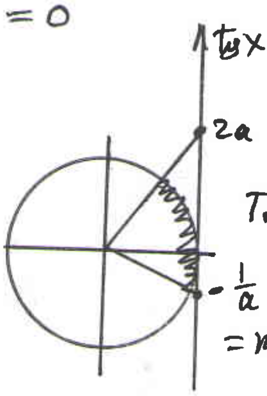
Расстояние $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$

max $\rho(x_1,x_3)$
1 $-\frac{1}{a}$



стремится к $-\frac{\pi}{2}$

Расстояние $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$



$\max\{arctg(2a)-arctg(-\frac{1}{a})\}=$

$=\max\{arctg(2a)+arctg(\frac{1}{a})\}=$

Т.к. $tg\,x$ возрастает на $x\in\mathbb{R}$ за исключением $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$=\max\{tg(arctg(2a)+arctg(+\frac{1}{a}))\}=$

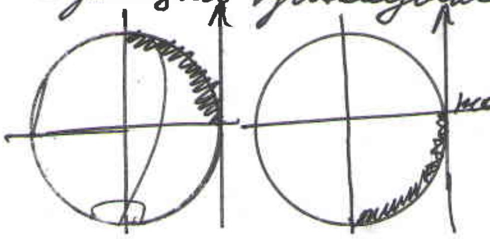
$a\neq 0$ $=\dfrac{2a+\frac{1}{a}}{1-2a\cdot\frac{1}{a}}=\dfrac{2a+\frac{1}{a}}{-1}=-(2a+\frac{1}{a})$

~~по н-ву Коши: $2a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{a}}=2\sqrt{2}$~~

а выражение $-(2a+\frac{1}{a})$ максимально когда $-(2a+\frac{1}{a})=0$; + 0 − a

либо $a\to 0^-$
$a\to 0^+$ или $a\to\infty$
$a\to-\infty$ все эти

вариации приводят к длине $\frac{\pi}{2}$:

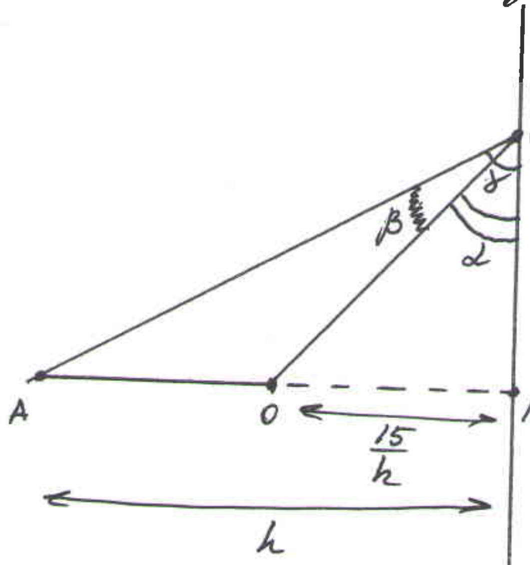


длина $\frac{\pi}{2}$
max $\rho(x_2;x_3)$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$ - максимальная длина, достигается при $a\to-\infty$ между $\frac{\pi}{4}$ и „$-\frac{\pi}{2}$" от $2a$

при $a\to^- 0$ между $\frac{\pi}{4}$ и „$-\frac{\pi}{2}$" от $-\frac{1}{a}$

№7) Задача сводится к следующей: дан отрезок и ортогональная ему прямая за его пределами, найти максимальный угол, где вершины это концы отрезка и точка на прямой:



$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{x}\right)$; $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{15}{hx}\right)$

$\angle\beta = \gamma - \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{15}{hx}\right)$

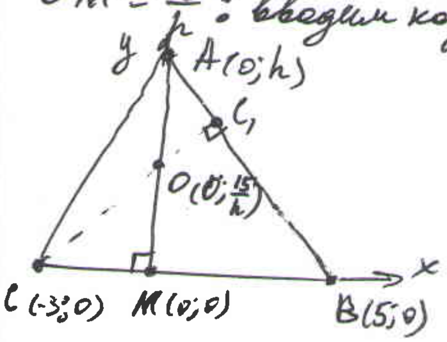
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\gamma-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{h}{x} - \frac{15}{hx}}{1+\frac{h}{x}\cdot\frac{15}{hx}} =$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{h-\frac{15}{h}}{1+\frac{15}{x^2}}\right) = \frac{h-\frac{15}{h}}{x+\frac{15}{x}}$$

Т.к. $\operatorname{tg}\beta$ монотонно возрастает на $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а $\beta < \frac{\pi}{2}$, иначе •K находилась бы в пределах окружности с диаметром AO,

т.е. $\max\{\beta\} \Rightarrow \max\{\operatorname{tg}\beta\} \to \max\left\{\frac{h-\frac{15}{h}}{x+\frac{15}{x}}\right\} \to$

Почему если $AM = h$, $OM = \frac{15}{h}$: вводим координаты



прямая AB: $y = -\frac{h}{5}x + h$

высота CC_1, имеет $k = \frac{5}{h}$, раз $CC_1 \perp AB$

т.е. $0 = -\frac{3\cdot 5}{h} + c$, $c = \frac{15}{h}$

CC_1: $y = \frac{5}{h}x + \frac{15}{h} \cap AM: (x=0)$

$y = \frac{15}{h}$, т.е. $\cdot O\left(0; \frac{15}{h}\right)$

важная ремарка: т.к. треугольник остроугольный $h > h_{\text{в прямоугольном } \Delta} = \sqrt{3\cdot 5}$,

а если $h > \sqrt{15}$, то $h - \frac{15}{h} > 0$, $h > \sqrt{15} \Rightarrow h > 0$, $h^2 - 15 > 0$ при $h > \sqrt{15}$,

тогда продолжим цепочку:

$\max\left\{\frac{h-\frac{15}{h}}{x+\frac{15}{x}}\right\} \xrightarrow{} \max\left\{\frac{1}{x+\frac{15}{x}}\right\} \to \min\left\{x+\frac{15}{x}\right\}$,

а по н-ву Коши $x + \frac{15}{x} \geq 2\sqrt{x\cdot\frac{15}{x}} = 2\sqrt{15}$,

а это достигается при $x = \frac{15}{x}$

подходит $x \geq 0$ $x = \sqrt{15}$

$x \leq 0$ $x = -\sqrt{15}$ $\varnothing$ не подходит, т.к. тогда •K уходит за пределы точки C

$5 > \sqrt{15} > 3$

Ответ: $MK = \sqrt{15}$ и (•K лежит между •M и •B)

$\underline{MK = \sqrt{15}}$

№5) $a = t^3 - 81t$, $b = 11^t - 121$; $c = \sin t - \frac{1}{2}$ | Чистовик №

$a = t(t+9)(t-9)$ $b = 11^t - 11^2$ $c = \sin t - \frac{1}{2}$

$\underset{-9}{-} \; \underset{0}{+} \; \underset{9}{-} \; + \to t$ $\quad - \underset{2}{\cdot} + \to t$ $\quad t \in (\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ +

$a \leq b \leq c$

т.е. $t > 2$, значит $c > 0$ и $t > 2 \Rightarrow$ ~~$11^{\frac{5\pi}{6}} - 11^2 \leq \sin \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2} < 0$~~

обратим внимание на то, что $2 > \frac{\pi}{2}$, а $\sin t$ на $t \in (\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6})$ убывает, $2 < \frac{5\pi}{6}$, 11^t, очевидно возрастает на $t \in R$,

а значит, что ~~после равн~~ после ситуации:

~~$11^2 - 11^2 = 0 > \sin 2 - \frac{1}{2}$~~

$11^2 - 11^2 = 0 = \sin \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2} < \sin 2 - \frac{1}{2}$

$11^t - 11^2$ будет возрастать, а $\sin t - \frac{1}{2}$ убывать

до достижения равенства на t_1

$11^{t_1} - 11^2 = \sin t_1 - \frac{1}{2}$,

т.к. $11^{\frac{5\pi}{6}} - 11^2 > 0 = \sin \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}$,

т.е. $t \in (2; t_1]$, где t_1

в это время $a < 0$ и подходит.

Тут $t \in (2; t_1]$, где t_1 - корень $11^t - 11^2 = \sin t - \frac{1}{2}$, и $2 < t_1 < \frac{5\pi}{6}$

а при иных случаях с $t > 2$ $11^t - 11^2$ уже сильно больше $\frac{1}{2} = \max\{\sin t - \frac{1}{2}\}$

$a \leq c \leq b$

если $c > 0$, то $t \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$

$b \geq c > 0 \Rightarrow t > 2$, т.е. по рассмотренному выше нам подходит промежуток $t \in [t_1; \frac{5\pi}{6})$ если же $t \in (2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6})$, ~~это тоже~~ подхо

$8,5 + 0,142 \cdot (2 + \frac{5}{6})$

$8,5$

$2\pi + \frac{5\pi}{6} \lor 9$ ($<$)

$\frac{17}{6}\pi \lor 9$ ($<$); $\pi \lor \frac{54}{17}$ ($<$) $= 3 + \frac{3}{17}$

$3,14 \lor 3 + \frac{3}{17}$ ($<$)

$3,14 < 3 + \frac{15}{100} < 3 + \frac{3}{17}$,

т.е. на всём промежутке $a < 0$, значит он нам подходит.

при $t \in (4\pi + \frac{\pi}{6}; 4\pi + \frac{5\pi}{6})$

$a > \frac{1}{2} \geq c$, т.е.

из $a \leq b \leq c$ и $a \leq c \leq b$

$t \in (2; \frac{5\pi}{6}) \cup (2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6})$

см далее

№5) продолжение

Чистовик №7

$b \le c \le a$, т.е. $t \in (\frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k)\ k\in\mathbb{Z}$

либо ~~$t\ge 9$, тогда~~

$t \ge 9$ если $t\ge 9$, то $b > \frac{1}{2} \ge c$, ведь $11^{\frac{9}{}}-11^2 > \frac{1}{2}$

либо $t\in[-9;0]$, то $b<0$

и $a \ge c$ ~~тогда~~ $a\ge c$ при ~~$t\in(-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{}$~~

$t\in\left[-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)$

если вычесть еще 2π правая граница будет левее -9, т.е. $-\frac{19\pi}{6} < -9$

$t^3 - 81t \ge \sin t - \frac{1}{2}$

$\left(-\frac{11\pi}{6}\right)^3 + 81\cdot\frac{11\pi}{6} > \frac{81\cdot 11}{2} - \frac{11^3}{6^3}\cdot 4 = \frac{81\cdot 11}{2} - \frac{11^3}{3^3\cdot 2}$, т.е. весь промежуток подойдёт, ведь a возрастает на $t\in[-9;0]$

$3^3\cdot 81\cdot 11 - 11^3$

$3^7\cdot 11 - 11^3 >$

$3\cdot 27\cdot 27\cdot 11 - 11^3 >> 54$

$\frac{11(3\cdot 27\cdot 27 - 11^2)}{54} >>> \frac{1}{2}$ много больше

$t\in\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)$

$b \le a \le c$

$a>0$ или $t\ge 9$ и $c>0$, но при $t\ge 9$ $b > \frac{1}{2} \ge c$

или $t\in[-9;0]$ для этого случая мы уже видели в пункте $b\le c\le a$, что решений нет

т.е. тут $\varnothing$

$c \le a \le b$

$a>0$ или $t>9$, т.к. показательная функция растёт быстрее степенной

$t\in[-9;0]$

и $t>2$ раз $b>0$

$a\le b$ уже при $t=9$ верно

$11^{\frac{9}{}}-11^2 > 9^3-9^3=0$,

т.е. нам подойдут все числа $t\ge 9$, ведь уже при ~~$t\in\frac{\pi}{6}$~~

$t = 4\pi + \frac{\pi}{6}$ $a \ge \frac{1}{2} > c$,

а до $t = 4\pi+\frac{\pi}{6}$ $c<0$,

т.е. $t\in[9;+\infty)$

Шестовиков

№5) продолжение

$c \le b \le a$

$b > 0$ т.е. $t > 2$

$a > 0$, т.е. $t \in (-9; 0) \varnothing t > 2$
или $t \geq 9$, что неверно по предыдущему пункту

ведь там $b \geq a$ на $t \in [9; +\infty)$ $\varnothing$

Ответ: $t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$

или иначе подходят

$t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$

Черновик 1

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\cancel{\sin\pi +}$$

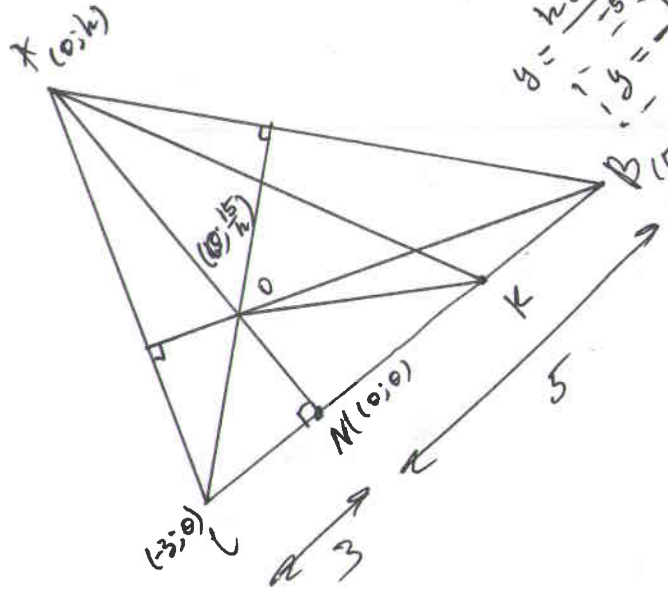
$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$1 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$$

$$\cancel{1 = \cos\frac{2\pi}{3}}$$

$$2a = \frac{1}{a}, \quad a = \sqrt{2}$$

$$2a = -\frac{1}{a}, \quad 2a^2 = -1$$



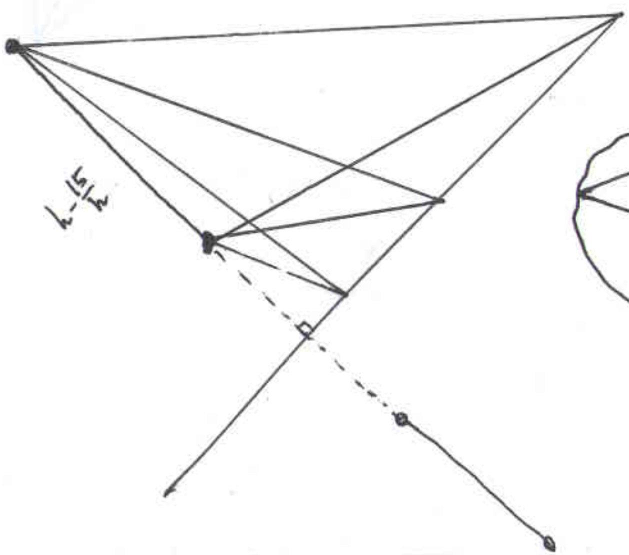
$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y}{h}$$

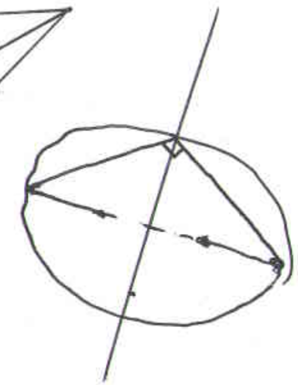
$$y = \frac{h(x-5)}{-5}$$

$$y = -\frac{h}{5}x + h$$

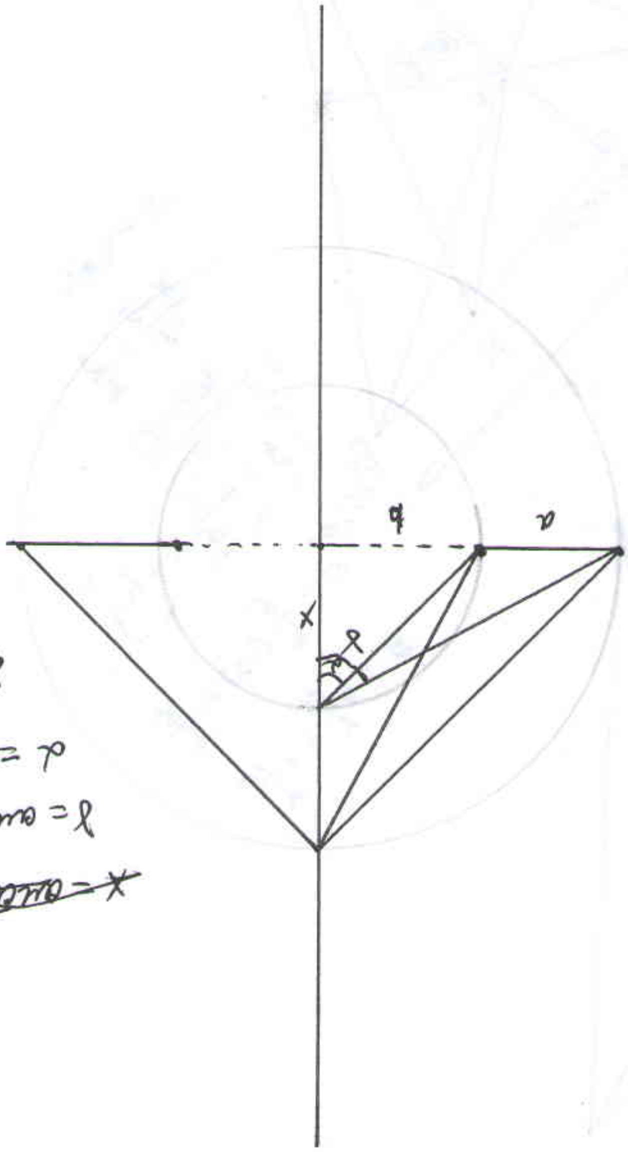
$$0 = \frac{5}{h}(-3) + \frac{15}{h}$$

$$y = \frac{5}{h}x + \frac{15}{h}$$





Черновик 2



$\cancel{x = \operatorname{arctg}}$

$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{a+b}{\gamma}\right)$

$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{x}\right)$

$\gamma - \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{a+b}{x}\right) -$

$- \operatorname{arctg}$

$\begin{array}{r} 170 \\ + 85 \\ \hline 255 \end{array}$

$3 + \frac{3}{17}$

$\frac{3}{17}$ A $\frac{15}{100}$

300 A 255