МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Коган Анна Алексеевна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	15

Чистовик

№1

Рассмотрим число A. В нем каждое слагаемое есть $\frac{2k+1}{(k(k+1))^2}$, где $k \in \mathbb{N}$, $44 \geq k \geq 1$

Заметим, что $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1 \Rightarrow$

$$\frac{2k+1}{(k^2(k+1))^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2 \cdot (k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

Значит, $A = \frac{1}{1^2} \underbrace{- \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}}_{\text{в сумме } 0} \underbrace{- \frac{1}{3^2} + \ldots}_{} \underbrace{\ldots + \frac{1}{43^2}}_{} \underbrace{- \frac{1}{44^2} + \frac{1}{44^2}}_{\text{в сумме } 0} - \frac{1}{45^2} = 1 - \frac{1}{45^2}$, т.к.

все „внутренние" члены встречаются с „+" и „−" по 1 разу и сокращаются.

Рассмотрим число B. $B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(3-2\sqrt{3}+1)} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$$= \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = 1$$

Значит, $B > A$

Ответ: число B больше

№2

Двузначные числа, делящиеся на 19:

$19 \cdot 1 = 19$; $19 \cdot 2 = 38$; $19 \cdot 3 = 57$; $19 \cdot 4 = 76$; $19 \cdot 5 = 95$

($19 \cdot 6 = 114$ – не двузн.)

А двузн. числа, делящиеся на 23: $23 \cdot 1 = 23$; $23 \cdot 2 = 46$; $23 \cdot 3 = 69$; $23 \cdot 4 = 92$ ($23 \cdot 5 = 115$ – не двузн.)

Т.е. 2 любые соседние цифры числа образуют числа 19, 23, 38, 46, 57, 69, 76, 92, 95. Заметим, что среди них нет числа, заканчивающегося на 1 и числа, начинающегося на 8 ⇒ единица в нашем числе встречается лишь на первой позиции, а восьмерка может быть только самой последней.

Чистовик

№2 (продолжение)

Вторая цифра числа 9. ~~Рассмотрим~~ ~~На 9~~ После 9 могут идти 2 или 5. Рассмотрим возможные последовательности $92-23-38$ и $95-5\cancel{7}-76-69$. Первая из них ~~…~~ соотв. числу 9238 в записи, а вторая — 95769 ~~Во второй~~ Первая ~~за~~ последовательность может встретится лишь в качестве 4 последних символов (или в виде 9, 92, 923 тоже в самом конце) $\Rightarrow$ после первой цифры числа идет повторение блоков 9576. ~~Они состоят из 4~~

$2021 = 1 + 4 \cdot 505$, значит, т.к. первая цифра 1, а после неё блоки 9576 по 4 цифра (и только последний блок может быть другим в силу выше вышесказанного)

Значит, число есть $1\underbrace{9576\,.\,9576\ldots\quad 9576}_{504 \cdot 4 \text{ символа}}\underbrace{\cancel{9238}}_{\text{ещё 4 символа}}$ После 6 идет 9. А вот после последней 9 может идти либо 238, либо 576. Значит, последняя цифра либо 6, либо 8.

Ответ: 6 или 8.

№3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}; \quad f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{-x^9}{1-x^9}}} = \frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{-x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1-x^9}{-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{x^9+1-x^9}{x^9}}} = \frac{x}{\sqrt[9]{1}} = x$$

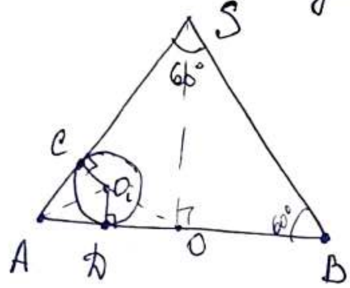
Значит при применении функции f 3 раза получаем исходное число $\Rightarrow$ применяя функцию $3 \cdot k$, $k \in N$ раз получаем исходное число. $1305 = 3 \cdot 435 \Rightarrow$ в итоге получится исходное число.

Ответ: 2022

Чистовик

№4

$r = 3$ – радиус шаров, $O_1, O_2, \ldots, O_{19}$ – их центры, S – вершина конуса. O – центр основания, R – радиус основания конуса. Рассмотрим осевое сечение конуса, проходящее через O_i, где i – натуральное число от 1 до 19. ~~AB = eR~~ $AB = 2R$; $AS = SB$ как образующие $\Rightarrow \triangle SAB$ равнобедренный. ($\Rightarrow$ т.к. $\angle ASB = 60^\circ$, $\triangle SAB$ равносторонний)



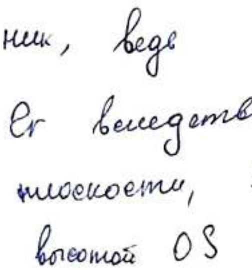
Сечение шара плоскостью – окружность. При таком сечении окружность касается AB и AS в точках D и C и её радиус r.

Тогда $\triangle AO_iD = \triangle AO_iC$ (AO_i общая, $O_iD = O_iC = r$) по катету и гипотенузе $\Rightarrow \angle CAO_i = \angle DAO_i = \frac{\angle A}{2} = 30^\circ \Rightarrow$

$AD = O_iD \cdot tg30^\circ = r\sqrt{3}$; $AC = O_iC \cdot tg30^\circ = \sqrt{3}r$; а $OO_i = \sqrt{(R-\sqrt{3}r)^2 + r^2}$ (не зависит от i) и $\angle O_iOD = arctg\frac{r}{R-\sqrt{3}r}$ не зависит от i $\Rightarrow \angle O_iOS$ не завис. от i

Заметим, что т.к. все 19 шаров касаются основания, то все их центры удалены от него на $r \Rightarrow O_1, O_2, \ldots, O_{19}$ лежат в 1 плоскости, ~~~~ параллельной ~~~~ плоскости основания и лежащей на расстоянии r от неё. Рассмотрим эту плоскость. В ней вершины $O_1, \ldots, O_{19}$ образуют правильный девятнадцатиугольник, ведь расстояние между 2 соседними вершинами $2r$ вследствие касания соседних шаров и все вершины лежат на пересечении плоскости, в которой они лежат, и конуса с вершиной O, высотой OS и образующей $OO_1 = OO_2 = \ldots = OO_{19} \Rightarrow O_1, \ldots, O_{19}$ лежат на окружности $\Rightarrow O_1O_2\ldots O_{19}$ – правильный 19-ти угольник.

Найдем радиус R_{19} окр., на которой лежат точки $O_1, \ldots O_{19}$.



O' – её центр; $\triangle O_1O'O_{19}$ равнобедренный с углом $\alpha = \frac{2\pi}{19}$

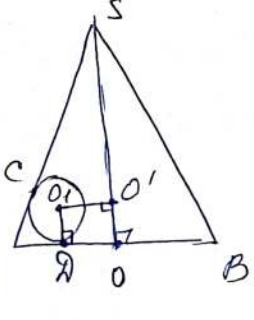
$\Rightarrow O_1O_{19} = 2 \cdot O_1O' \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2R_{19} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{19}\right) \Rightarrow$

$2r = 2R_{19} \sin\left(\frac{\pi}{19}\right) \Rightarrow R_{19} = \frac{r}{\sin\left(\frac{\pi}{19}\right)}$

Чистовик

№ 4 (продолжение)

Заметим, что в силу симметрии $O' \in OS$



Рассмотрим осевое сечение конуса, содержащее O_1. 2 Параллельные плоскости секутся третьей плоскостью по параллельным прямым $\Rightarrow O_1O' \parallel AO \Rightarrow DOO'O_1$ прямоугольник (т.к. $O_1O' \parallel DO$ и $O'O \parallel O_1D$ и $\angle O_1DO = 90^\circ$ вследствие касания) $\Rightarrow DO = O'O_1 = R_{19} = \dfrac{r}{\sin\left(\frac{\pi}{19}\right)} \Rightarrow OA = R = \sqrt{3}r + \dfrac{r}{\sin\frac{\pi}{19}} =$

$$= 3\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{19}}\right)$$

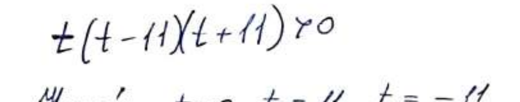
Ответ: $R = 3\cdot\left(\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{19}}\right)$

№ 5

Если в тройке чисел среднее положительно, то и число ≥ не менее положительно $\Rightarrow$ мин в тройках, где 2 или 3 положительных числа, среднее положительно. Рассмотрим поотдельности все 3 числа и поймём, когда они положительны.

1) $a > 0$; $t(t-11)(t+11) > 0$

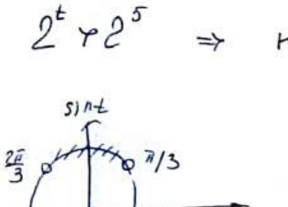
Нули: $t=0$, $t=11$, $t=-11$



$\Rightarrow a > 0$ при $t \in (-11; 0) \cup (11; +\infty)$

2) $b > 0$; $2^t - 2^5 > 0$; $2^t > 2^5 \Rightarrow$ нер-во верно при $t \in (5; +\infty)$ т.к. основание $2 > 1$

3) $c > 0$, $\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$



нер-ву удовлетворяют $t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$

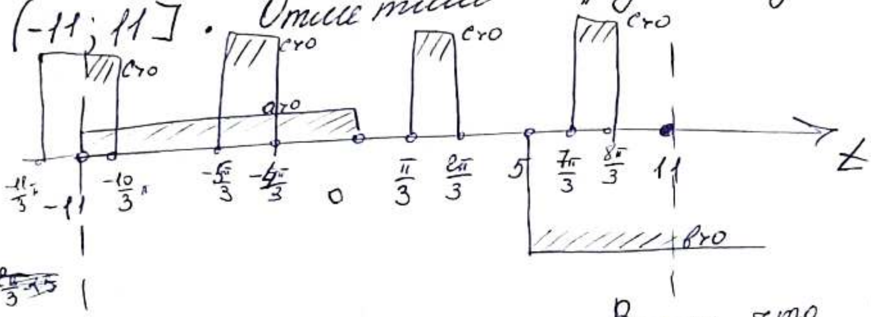
$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Чистовик

№5 (продолжение)

Заметим, что при $t \leq -11$ $a \leq 0$ и $b \leq 0$ => ~~...~~ при таких t среднее не положительно. При $t > 11$ $a > 0$ и $b < 0$ => при таких t среднее положительно. Рассмотрим промежуток $t \in (-11; 11]$. Отметим „нули" для 3 нер-в.



Видим, что при $t \in (-11; 11]$ ~~з~~ 2 или 3 числа из a, b, c положительны при $t \in (-11; -\frac{10}{3}\pi) \vee (-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}) \vee (\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3})$

Использовали след. нер-ва при расстановке точек:

$0 < \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3} < 5$

$5 < \frac{7\pi}{3} < \frac{8\pi}{3} < 11$

$11 < \frac{\pi}{3} + 4\pi$

$-11 < -\frac{10}{3}\pi < -\frac{5\pi}{3} < -\frac{4\pi}{3} < 0$

$\frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11}{3}\pi < -11$

=> Итоговый ответ:

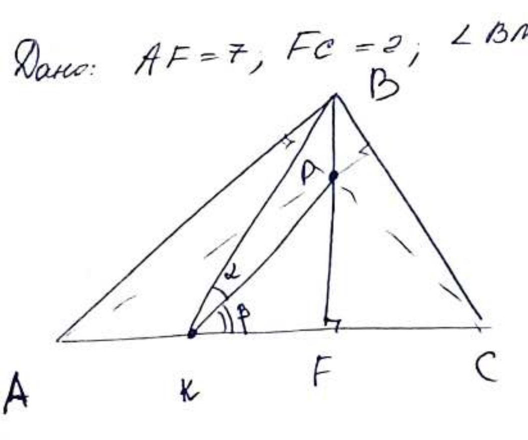
условие выполняется при

$t \in (-11; -\frac{10}{3}\pi) \vee (-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}) \vee (\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}) \cup (11; +\infty)$

~~Отв~~ Это и есть ответ.

N 7

Дано: $AF = 7$, $FC = 2$; $\angle BNP -$ max.



Рассмотрим (·) $K \in AC$. ~~Но~~ Пусть $\angle BKP = \alpha$; $\angle PKF = \beta$ $(90° > \alpha, \beta > 0)$ ~~$\alpha + \beta \neq 90°$ вследствие геометрии~~

Из прямоуг. $\triangle BKF$ и $\triangle PKF$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{PF}{KF}; \quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{BF}{KF}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}((\alpha+\beta) - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$\boxed{\text{При max } \alpha \quad K = N}$

Считаем, что $\alpha+\beta \neq 90°$ и $\alpha \neq 90°$, $\beta \neq 90°$, т.к. $\alpha+\beta = 90°$ или $\beta = 90°$ при $K = F$, $\alpha = 0°$ — не может быть макс. углом; $\alpha = 90°$ только если $F = P$, а это не так => все тангенсы существуют

Чистовик

№7 (продолжение)

$$tg\alpha_{(k)} = \frac{\frac{BF}{KF} - \frac{PF}{KF}}{1 + \frac{BF \cdot PF}{KF^2}} = \frac{KF(BF-PF)}{KF^2 + BF \cdot PF} = \frac{KF \cdot BP}{KF^2 + BF \cdot PF}$$

Заметим, что ~~$\angle BAC =$~~ $\angle BAP = \angle BCP = 90^\circ - \angle ABC \Rightarrow$

При $K = A$ и $K = C$, $tg\alpha(A) = tg\alpha(C) \Rightarrow$

$$\frac{AF \cdot BP}{AF^2 + BF \cdot PF} = \frac{CF \cdot BP}{CF^2 + BF \cdot PF} \quad \Big| : BP \neq 0$$ и подставим $AF = 7$, $CF = 2$

$$7(4 + BF \cdot PF) = 2(49 + BF \cdot PF) \Rightarrow$$

$$5\,BF \cdot PF = 98 - 28; \quad BF \cdot PF = 14$$

$$\Rightarrow tg\alpha(k) = \frac{KF \cdot BP}{KF^2 + 14}$$

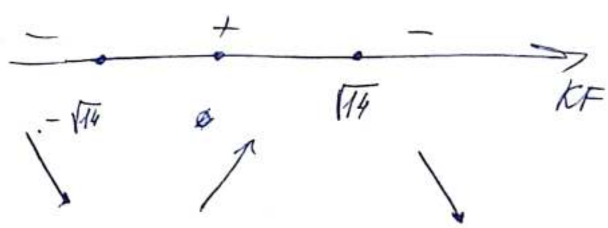
Заметим, что $KF \in (0; 7]$ (K лежит на отрезке $AC \Rightarrow FK \leq AF$) ($KF = 0$ отбросили выше)

а при росте $\alpha > 0$ $tg(\alpha)$ растет $\Rightarrow$ max α соответствует max $tg\alpha$ (а при max α $K = N$ по условию) $\Rightarrow$

$$\left(tg\alpha(k)\right)' = \frac{BP(KF^2+14) - KF \cdot BP \cdot 2KF}{(KF^2+14)^2} = \frac{-BP \cdot KF^2 + 14BP}{(KF^2+14)^2}$$

„Нули" числителя: $KF = \pm\sqrt{14}$

„Нулей" знаменателя нет



$\Rightarrow$ т.к. $KF \in (0; 7]$, $\sqrt{14} < 7$ то на этом промежутке $tg\alpha(k)$ растет при KF от 0 до $\sqrt{14}$, а потом падает. Значит максимум достигается при $KF = \sqrt{14} \Rightarrow NF = \sqrt{14}$

Ответ: $NF = \sqrt{14}$

Чистовик

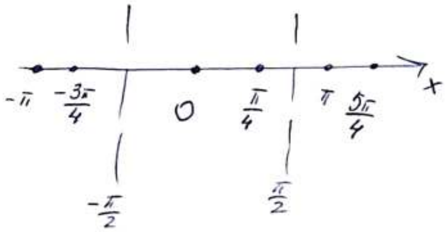
Рассмотрим несколько случаев. №6 ~~За~~ И заменим в ур-ии $tgx = t$.

1) $a = 0 \Rightarrow$

$$1t^2 - t = 0$$
$$t(t-1) = 0$$
$$\Updownarrow$$

$\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ вернемся к прежней переменной (дали ВПП):

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 0 \\ tgx = \frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \ n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z \end{array}\right.$$



Интервалу $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ принадлежат лишь 0 и $\frac{\pi}{4}$. Расстояние между ними $\frac{\pi}{4}$

2) $a \neq 0$

$$at^3 + t^2 - at^2 - 2a^2t^2 + 2a^2t - 2at - t + 2a = 0$$
$$\cancel{t(at^2 + t - at - 2a) - 2a(}$$
$$(at^3 + t^2 - at^2 - t) - (2a^2t^2 - 2a^2t + 2at - 2a) = 0$$
$$t(at^2 + t - at - 1) - 2a(at^2 - at + t - 1) = 0$$
$$(t - 2a)(at^2 + t(1-a) - 1) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[\begin{array}{ll} t = 2a & (I) \\ at^2 + t(1-a) - 1 = 0 & (II) \end{array}\right.$$

Решим (II): $D = (1-a)^2 + 4a = 1 - 2a + a^2 + 4a = (1+a)^2 \geq 0$ при всех a

С учетом того, что $a \neq 0$

$$\Rightarrow t = \frac{a - 1 \pm |1+a|}{2a} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{a - 1 + 1 + a}{2a} \\ t_2 = \frac{a - 1 - 1 - a}{2a} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{1}{a} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ у исходного ур-я 3 корня: $\left[\begin{array}{l} t = 2a \\ t = 1 \\ t = -\frac{1}{a} \end{array}\right.$

Рассмотрим случаи их попарного равенства

1) $2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Корни: $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$

Чистовик

№6 (продолжение)

ВПП: $\left[\begin{array}{l} tg x = 1 \\ tg x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \\ x = arctg(-2) + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$

т.к. $arctg(\alpha) \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, то в ~~промежутку~~ интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ лежат корни $\frac{\pi}{4}$ и $arctg(-2) < 0$.

Расстояние между корнями $\frac{\pi}{4} - arctg(-2) = \frac{\pi}{4} + arctg\, 2 > \frac{\pi}{4}$ (которое при $a=0$)

2) $2a = -\frac{1}{a}$; $2a^2 = -1$ – невозможно, т.к. $a^2 \geq 0$

3) $1 = -\frac{1}{a} \Rightarrow a = -1$

Корни ур-я: $\left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \end{array}\right.$, ~~ВПП: tg~~ Аналогично п.1

В всех остальных случаях у ур-я 3 различных корня.

$\left[\begin{array}{l} t = 2a \\ t = 1 \\ t = -\frac{1}{a} \end{array}\right.$ ВПП: $\left[\begin{array}{l} tg x = 2a \\ tg x = 1 \\ tg x = -\frac{1}{a} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = arctg(2a) + \pi n, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \\ x = arctg(-\frac{1}{a}) + \pi m, m \in Z \end{array}\right.$

$arctg\,\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

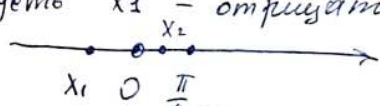
$\Rightarrow$ в интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ попадают корни $arctg(2a)$; $\frac{\pi}{4}$; $arctg(-\frac{1}{a})$

Т.к. функция $arctg\,\alpha$ монотонно возрастает, то ~~а то~~ больше то значение функции, аргумент которой больше.

Заметим, что $2a$ и $-\frac{1}{a}$ разных знаков $\Rightarrow$ одно из них всегда отрицательно $\Rightarrow$ один из корней ур-я на инт. $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ всегда отрицателен.

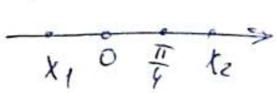
Пусть x_1 – отрицательный корень ($arctg(2a)$ или $arctg(-\frac{1}{a})$) и x_2 – корень, который не x_1 и не $\frac{\pi}{4}$

~~1)~~ 1)



$\boxed{\frac{\pi}{4} > x_2 > 0} \Rightarrow$ наибольшее расстояние между корнями от $\frac{\pi}{4}$ до x_1, оно больше $\frac{\pi}{4}$

2) $x_2 > \frac{\pi}{4}$



Наибольшее расстояние между корнями – между x_1 и x_2. Оно содержит в себе промеж. $[0; \pi/4] \Rightarrow$ это расст. $> \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ наименьшее расстояние между корнями $= \frac{\pi}{4}$. Оно достигается только при $a = 0$.

Ответ: при $a = 0$

Черновик

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2} =$$

$$= \frac{3}{1\cdot 4} + \frac{5}{4\cdot 9} + \ldots + \frac{89}{44^2\cdot 45^2} =$$

$$= \frac{4-1}{1\cdot 4} + \frac{9-4}{4\cdot 9} + \ldots + \frac{45^2-44^2}{44^2\cdot 45^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2} = \boxed{1-\frac{1}{45^2}}$$

$$(k+1)^2 = k^2+2k+1$$

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = 1$$

$$(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3} \qquad (4-2\sqrt{3})^{\frac{1}{6}} = (\sqrt{3}-1)^{\frac{2}{6}} = (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{3}}$$

19
38
57
76
95

23
46
69
92

$92 \,|\, 4$, 23

$2021 = 4\cdot 505 + 1$

19

1|9576|9 | 4 шт → last (6)

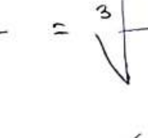
19 | 23 | 38 | 46 | 57 | 69 | 76 | ~~8~~ | 95/92

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{-x^9}{1-x^9}}} = \frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{-x}$$

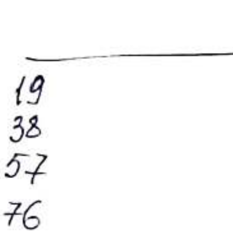
$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{x^9+1-x^9}{x^9}}} = x$$

Дальше очев

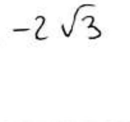


$\alpha = 60^\circ$ $r = 3$

19ш.



$\boxed{AO = 2r \quad l = \sqrt{3}r}$



$2r\sin 60$

19уг и осн — конц. окр при этом из R ращ на $\sqrt{3}r$

$$R_{19}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{19\cdot 2}\right) = r$$

$$R_{19} = \frac{r}{\sin\left(\frac{\pi}{19}\right)} \qquad R_{осн} = \sqrt{3}r + \frac{r}{\sin(\pi/19)}$$

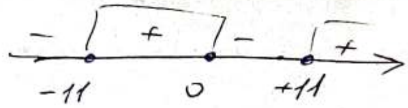
>0

Черновик

$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$

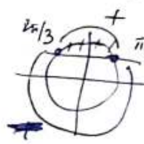
$2\pi = 6{,}28\ldots$

$a = t(t-11)(t+11)$



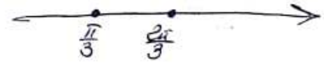
$b = 2^t - 32$

$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$



$t = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

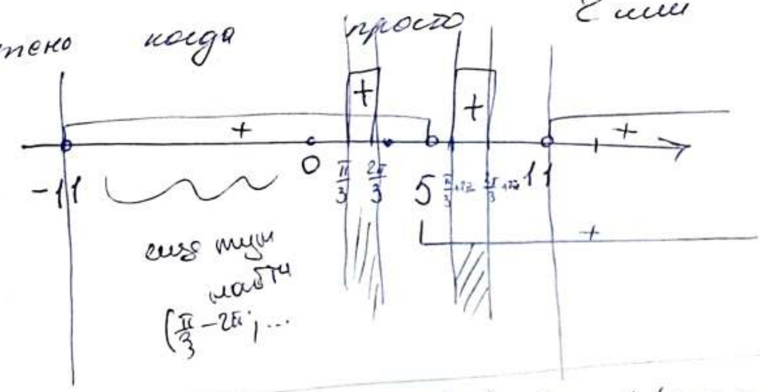
$t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$



Если среднее >0, то 2 или 3 >0

2 или 3 числа $>0 \Rightarrow$

нужно когда просто



При $t \leqslant -11$

$a \leqslant 0,\ b \leqslant 0$ ⊖

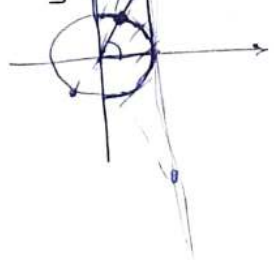
При $t > 11$ $a > 0,\ b > 0$

$\Rightarrow$ ⊕

$a\,tg^3x + (1 - a - 2a^2)\,tg^2x + (2a^2 - 2a - 1)\,tg\,x + 2a = 0$

$tg\,x = t$

решено свернутся



$a\,tg\,x(tg^2x - tg\,x - 2) - 2a\,tg\,x\,(a\,tg$

$at^3 + t^2 - at^2 - 2a^2t^2 + 2a^2t - 2at - t + 2a = 0$

$\cancel{at^3}\ t(at^2 + t - at - 1) - 2a(at^2 - at + t - 1) = 0$

$(t - 2a)(at^2 + t(1-a) - 1) = 0$

Если $D = (1-a)^2 + 4a = (1+a)^2 \Rightarrow$ корни всегда есть

$$\left[\begin{array}{l} t = 2a \\ t = \dfrac{a - 1 \pm |a+1|}{2a} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{a-1-a-1}{2a} = -\dfrac{1}{a} \\ \dfrac{a-1+a+1}{2a} = 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

+ $\boxed{\text{рассм. } a = 0}$

рассм. $\cancel{a = -1}$; $-\frac{1}{a} = 1$; $2a = 1$; $2a = -\frac{1}{a}$

ин. 3 корня

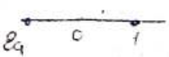
1) $2a > 1 \Rightarrow$ $x_3 = \operatorname{arctg}(2a)$, $x_1 = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{a}) \Rightarrow \delta =$ расст. между ними

$a > \frac{1}{2}$ $\delta > \frac{\pi}{4}$

2) $1 > 2a > 0$

$\delta > \frac{\pi}{4}$

3) $2a < 0$



Черновик

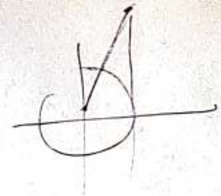
$\frac{\pi}{3} \approx 1$

$2\pi \approx 6 \dots$

$\angle BNP - max$

$AF = 7,\ CF = 2$

$FN - ?$



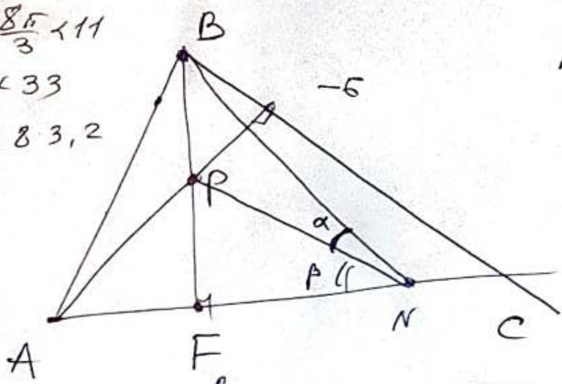
чем aT, тем dT

$\cancel{7}\ \frac{8\pi}{3} < 11$

$8 \cdot \pi < 33$

$8 \cdot \pi < 8 \cdot 3{,}2$

-6

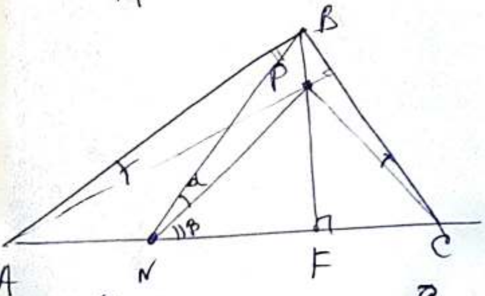


$tg\beta = \frac{PF}{FN}$

$\frac{2\pi}{3} - 2\pi = 2 -$

$2 - 12 = -\frac{10}{3}\pi$

$\frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11}{3}\pi$



$tg\beta = \frac{PF}{FN} = b$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{BF}{FN} = c$

a

$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$

$c(1 - ab) = a + b$

$a = \frac{c - b}{1 + bc} = \frac{\frac{BF}{FN} - \frac{PF}{FN}}{1 + \frac{BF \cdot PF}{FN^2}} = \frac{BF - PF}{FN + \frac{BF \cdot PF}{FN}} = \frac{BP \cdot FN}{FN^2 + BF \cdot PF}$

$\frac{7x}{\cancel{49+14}}_{63} = \frac{x}{9}$

$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{4+14}}_{18}$

При $NF = 7$ и $NF = 2$ (x) а равна $\Rightarrow$

$\frac{BP \cdot 7}{49 + BF \cdot FP} = \frac{2BP}{4 + BF \cdot FP} \Rightarrow$ ($BF \cdot FP$ — y)

$tg\alpha = \frac{FN \cdot BP}{FN^2 + 14}$

a $\boxed{FN \in [0; 7]}$

$7x(4 + y) = 2x(49 + y);$

$28x + 7xy = 98x + 2xy$

$5xy = 70x$

$xy = 14x$ $\quad x \neq 0 \Rightarrow$

$\boxed{y = 14}$

$a' = \frac{BP(FN^2+14) - FN \cdot BP \cdot 2FN}{(FN^2+14)^2} =$

$= \frac{14BP - FN^2 \cdot BP}{(FN^2+14)^2}$ $\quad FN = \sqrt{14}$

9 - 95 - 57 - 76 - 69

18 - 92 - 23 - 38