МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Колтаков Максим Константинович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	0	15	15	15

Черновик 1

$at^3+(a^2-a-3)\ t^2+(-a^2-3a+3)t\ +3a=0$

$a=0 \quad -3t^2+3t=0$

at^3+

$-t^2+t=0$

$t=\frac{3}{a}$

$t^2=t$

$\operatorname{ctg} x=0$

$\cos x$

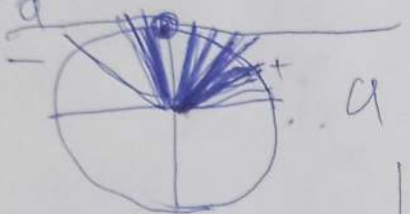
$t=-a \quad 1+a-3=$

$5+4-3$

$\cancel{t=0}$

$-\frac{3}{a}$

$x=\frac{\pi}{2}. \quad \frac{\pi}{4}.$



$t=1$

$t=0$

$..a$

$\operatorname{ctg} x=1 \quad x=\frac{\pi}{4}$

$t^3+\cancel{a}\frac{1}{a}\ (a-\frac{3}{a}-1)t^2+(-a-3+\frac{3}{a})t+3=0$

$a\geq 0.$

$\operatorname{arcctg}-\frac{3}{a}$

$at^3+(a^2-3)\ t^2-at^2+(3-a^2)\cdot t$

$\cancel{+}3at+3a$

при $a\in(1;+\infty)$ $\cancel{a4}$

наст...

$(a^2-3)t^2-(a^2-3)t\ .+at^3-at^2.$

$+3a-3at.$

$(t-1)\ ((a^2-3)t+at^2-3a)$

$(a^2-3)t\ (t-1)+at^2(t-1)$

$(t-1)(\ at^2+(a^2-3)t-3a)$

$-3a(t-1)$

$D=a^{\cancel{4}}-6a^2+5+12a^2$

$-\frac{3}{a}=1$

$(t-1)($

-3

$a^2+6a^2+5=$

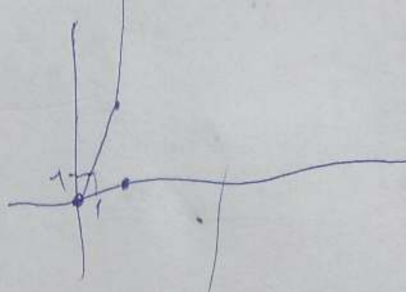
$(a^2+3)^2.$

$a=-3.$

Исковин 2.

$a \in R.$

$a t^3 + (a^2 - a - 3) \cdot t^2 + (3 \cdot 3a - a^2) t + 3a = 0.$



$a = n^3 - 144n.$ $n(n^2 - 144)$ $n = 12.$ $-12.$

$2^n - 256$ $2^8.$

144
128
16

$3n^2 - 144.$

$\sin n - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $8 \cdot 256$ $3(n^2 - 48)$

$n^3 - 144n$ $2^n - 256$ $-8 + 288$

$3n^2 - 144$

$6n \cdot h > 0.$

$n^2 = 48$

$n = \pm 4\sqrt{3}$

$\ln 2 \cdot 2^n)'$

$\ln 2 (2^n)' =$

$\sin n > \frac{\sqrt{3}}{2}$ > 0

$2^n - 256 = \ln 2 \cdot 2^n \cdot t$

$\ln 2 \cdot \ln 2 \cdot 2^n =$

$\ln^2 2 \cdot 2^n$

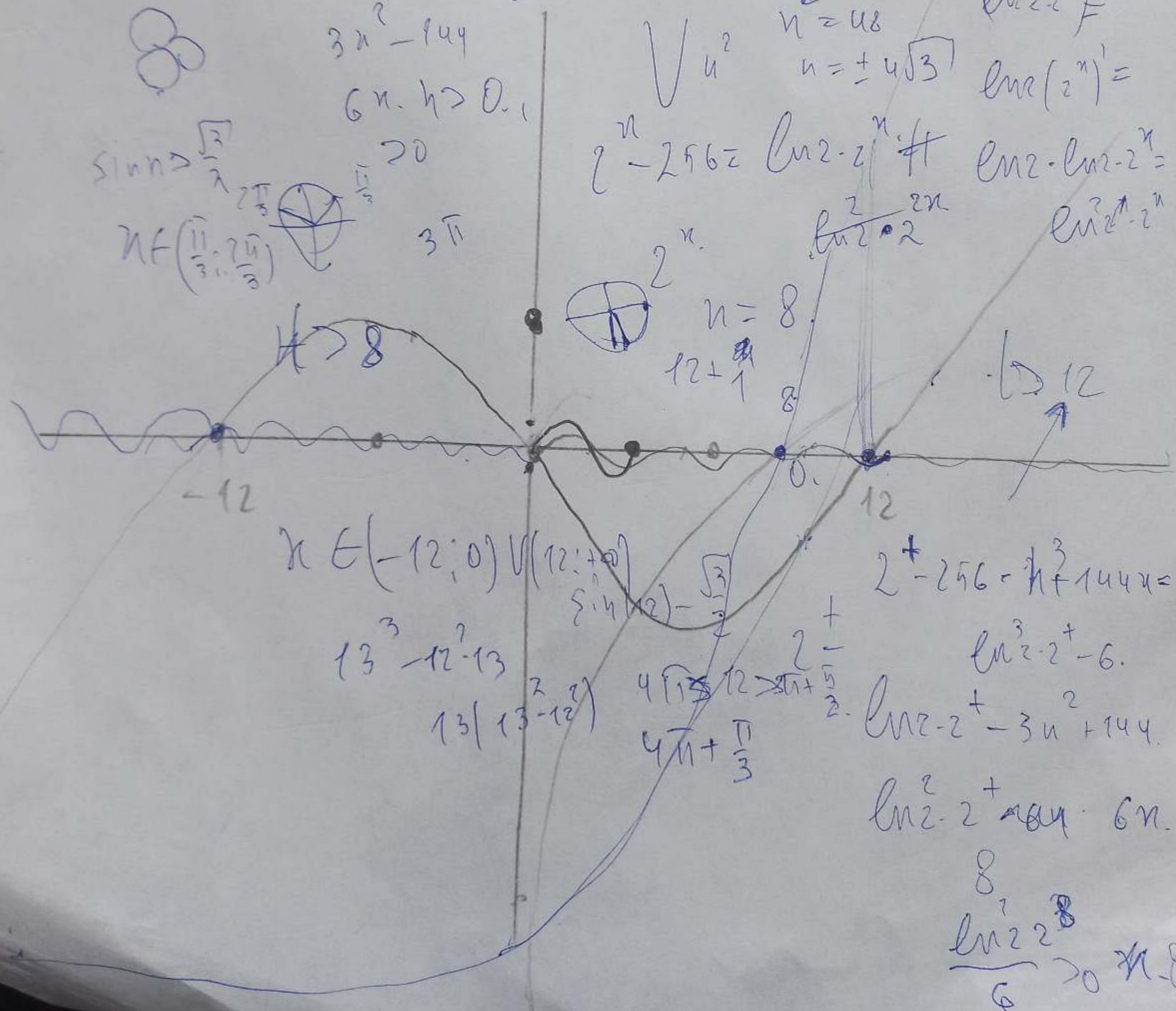
$n \in \left(\frac{11}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ 3π

$\ln^2 2 \cdot 2^{2n}$

$2^n.$

$n = 8.$

$12 + \frac{4}{1}$



$n > 8$

$n > 12$

-12 $0.$ 12

$n \in (-12; 0) \cup (12; +\infty)$

$\sin(12) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2^t - 256 - n^3 + 144n =$

$13^3 - 12^2 \cdot 13$

$\ln^3 2 \cdot 2^t - 6.$

$13(13^2 - 12^2)$

$4\pi 12 > 3\pi + \frac{\pi}{3}$

$2^{\frac{t}{2}}$

$\ln 2 \cdot 2^t - 3n^2 + 144.$

$4\pi + \frac{\pi}{3}$

$\ln^2 2 \cdot 2^t - 144 \cdot 6n.$

$8,$

$\frac{\ln^2 2 \cdot 2^8}{6} > 0$ $n - 8$

Игровик 3

15238

195769 32

15

15 + 6 = 95.

246

15 + 3 = 87.

15

40 − 36 = 6

15 + 3 = 57

23 + 4

23 + 3

80 − 12 = 68

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5}} =$$

$$\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{1-x^5}\right)} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}} = -1\sqrt[5]{\frac{x^5}{1-x^5}} = -\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}} \quad \left(\sqrt[5]{1-x^5}\right)^{-\frac{1}{5}} = -\frac{1}{5\sqrt[5]{(1-x^5)^6}} \cdot (-5x^4)$$

$$\frac{1}{(t)^{\frac{1}{5}}} \quad (t)^{-\frac{1}{5}} = -\frac{1}{5} \cdot t^{-\frac{6}{5}}$$

$$-\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x} = -\frac{\sqrt[5]{\frac{x^5}{1-x^5}} \cdot \sqrt[5]{1-x^5}}{} \cdot \frac{1}{5\sqrt[5]{t^6}}$$

$-x^5$

Черновик 4Б

$$\frac{\quad}{(1\cdot 2)^2} = \frac{\quad}{1\cdot 2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} \qquad \frac{3^2\cdot 3+5}{2^2\cdot 3^2} \qquad 9\cdot 3 \;\; 27 \;\; \frac{32}{2^2\cdot 3^2}$$

$$\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \qquad \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \qquad \sqrt[3]{2}$$

1

$$\frac{7}{3^2\cdot 4^2} \quad \frac{2^3\cdot 4^2}{3^2} \quad \sqrt[6]{1-2\sqrt{3}+3} = \sqrt[3]{1-\sqrt{3}} =$$

$$\sqrt[3]{1-3} = \sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{2}$$

$$\frac{2^3}{3^2}$$

$$\frac{1}{n^2\cdot(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2\cdot(n+2)^2} \qquad \sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$$

2π

$$n \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

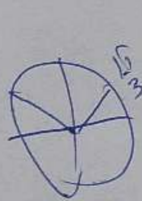
$6 \quad -\frac{5\pi}{3} \quad -\frac{4\pi}{3}$

$-\frac{11\pi}{3} \quad -\frac{10\pi}{3}.$

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$-\frac{17\pi}{3}$

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$



$\frac{6\pi}{3}$ $\quad \frac{11\pi}{3} \quad 12 \quad \pi = 3,\frac{3}{11}.$

$$\pi \quad \frac{12\cdot 3}{11} = \frac{36}{11}$$

0 $\quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{2\pi}{3} \quad \frac{4\pi}{3}. \quad \frac{5\pi}{3} \quad \frac{7\pi}{3} \quad \frac{8\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$

$\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}.$

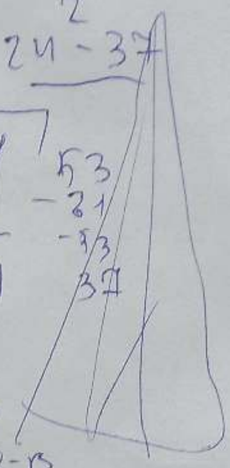
$\frac{13\pi}{3}$

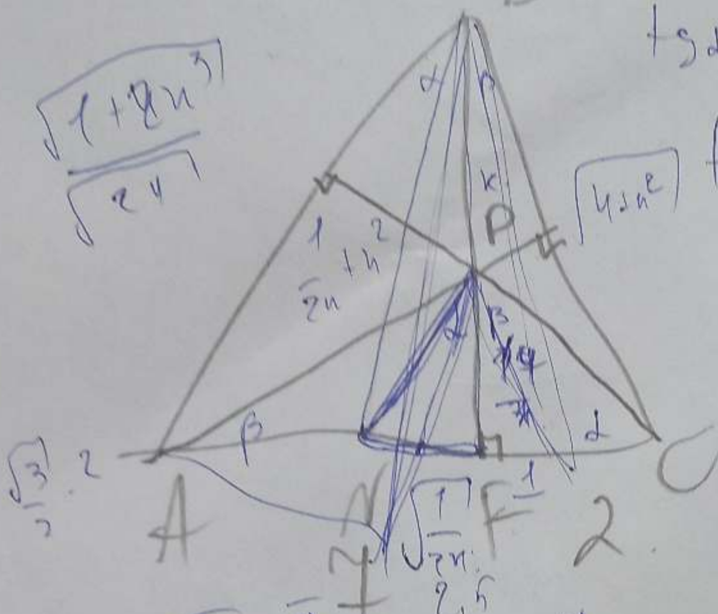
$\frac{\pi}{3} \quad \frac{2\pi}{3} \qquad \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$

Черновик 5

$$\cancel{144} = \frac{4+n^2+45+n^2-81}{2\sqrt{4+n^2}\cdot\sqrt{45+n^2}} = \frac{2n^2-37}{\sqrt{\frac{1}{24}}}$$

53
−31
−53
37





$tg\,\alpha = \frac{7}{x}$

$tg\,\beta = \frac{2}{x}$

50 − α − β

50 − β

$\frac{PF}{7} = tg\,\beta$

$tg\,\beta = \frac{2}{x}$

$PF = tg\,\beta \cdot 7 = \frac{2}{x}\cdot 7$

$tg\,PNF = \frac{7\,tg\,\beta}{NF} = \frac{7\cdot 2}{x\cdot NF}$

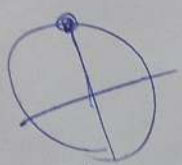
$tg\,BNF = \frac{x}{NF} = \frac{x}{NF}$

$1 \quad \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

$\alpha = \frac{7}{x}$

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin}{\cancel{\sin\alpha\,\sin\beta}\ \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\sin\alpha}$$

~~tg β~~



$$\sqrt{\frac{1}{24}} = 2{,}5\,\frac{\sqrt3}{2} = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\, tg\,\beta}\ tg\,(tg\,BNF - tg\,PNF)$$

$$arctg\,\frac{x}{y} - arctg\,\frac{14}{xy}$$

$$\frac{\sqrt3 - \frac{1}{\sqrt3}}{1+\frac{\sqrt3}{\sqrt3}} = \frac{\frac{3-1}{2\sqrt3}}{\cancel{2}} = \frac{2}{2\sqrt3} = \frac{1}{\sqrt3}$$

$\frac{l}{2n} = \frac{25}{4}$

x

$$\frac{(x^2-14)\cdot y}{(y^2+14x)x^2}\quad \frac{x^2y-14y}{y^2x+14x^2}$$

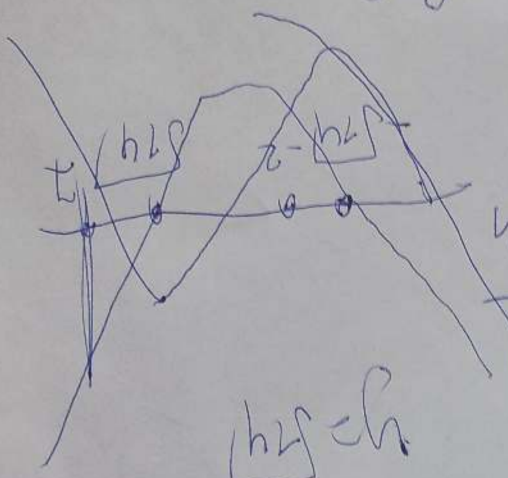
$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{14}{xy}}{1+\frac{14x}{y^2}} = \frac{\cancel{x^2y-14y}\ \frac{x^2-14}{xy}}{\frac{y^2+14x}{y^2}}$$

$$\frac{(x^2-14)\cdot y^2}{(y^2+14x)xy} =$$

Черновик.

$$2xy(y^2x+14x^2)-(y^2+28x)(x^2y-14y)$$

$$y\left(2x(y^2x+14x^2)-(y^2+28x)(x^2-14)\right)$$



$$\frac{x^2y-14y}{y^2x+14x^2} \qquad \left|\frac{y(x^2-14)}{y^2x+14x^2}\right|$$

$$\frac{(x^2-14)-y(x^2-14)\cdot 2xy}{(y^2x+14x)^2}=$$

$$(2xy-14y)$$

$$2xy(y^2x+14x^2$$

$$(x^2-14)(1-2xy^2)$$

$$\frac{(x^2-14)\cdot 1}{\sqrt{2x}\cdot\left(\frac{x}{2x}+14x^2\right)}=$$

$$1=2xy^2$$

$$y^2=\frac{1}{2x}.$$

$$\frac{x^2-14}{\sqrt{2x}\cdot\left(\frac{1}{2}+14x^2\right)}=\frac{x^2-14}{\sqrt{2x}\,\frac{1+28x^2}{2}}$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{2x}}$$

$$\sqrt{2x}+28\sqrt{2}$$

Чистовик 1

№1

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

~~A~~ Заметим, что

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2},$$ то есть $$A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \ldots \cancel{\text{и т.д.}} + \frac{1}{(49)^2} - \frac{1}{(50)^2} = 1 - \frac{1}{(50)^2} < 1$$

Значит $A < B$

Ответ: $A < B$

№2

Второй цифрой может быть только 9. ~~так~~

3-й цифрой или 2 или 5 т.к. $92 = 23 \cdot 4$ и $95 = 19 \cdot 5$

I сл. 192

~~ну~~ 4-й цифрой только 3

1923, 5-й цифрой будет 8, т.к. $38 = 2 \cdot 19$, а нет 2 двузначных чисел начинающихся с 3 и делящихся на 23

II случай. 195769

а) 4-й цифрой только 7 т.к. $19 \cdot 3 = 57$, а $23 \cdot 2 = 46$, $23 \cdot 3 = 69$.

б) 5-й цифрой только 6 т.к. ~~19~~ ~~23·4=6~~ $19 \cdot 4 = 76$, а $23 \cdot 3 = 69$, $23 \cdot 4 = 92$

~~Настя~~ Шестович лист 2

19238, на 8 не нет ни одного числа делящегося на 19 или на 23

т.к. $23\cdot3=69$, $23\cdot4=92$.

$19\cdot4=76$, $19\cdot5=95$.

Поэтому этот случай отбрасываем

в) 6-й цифрой только 9 т.к. $69=23\cdot3$, а $19\cdot4=76$ $19\cdot3=57$.

наше число 1957695769... дальше будет выглядеть циклически, первые четыре числа отбросим

$\underbrace{69\cancel{5}769\ldots}_{2013}$ ~~они~~ и цифры повторяются через 4

$2017 \equiv 1 \pmod 4$, значит последней будет 6.

Ответ: 6.

№3.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}} \qquad f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1^5}{(\sqrt[5]{1-x^5})^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt[5]{-x^5}}{\sqrt[5]{1-x^5}}}=\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}.$$

$$f(f(f(x)))=\frac{-1\cdot\left(\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}\right)}{\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}}=-1\cdot\left(\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}\cdot\sqrt[5]{1-x^5}\right.$$

Чистовик лист 3

№ 3

$$= -1 \cdot \frac{(-x)\cdot\left(\sqrt[5]{1-x^5}\right)}{\sqrt[5]{1-x^5}} = x \text{ , то есть}$$

$$f(f(f(x))) = x.$$

$$f(f(f(f(f(f(x)))))) = x,$$ то есть через каждые 3 будет повторяться значение

$$1303 \equiv 1 \pmod 3,$$

то есть выражение равно $f(x)$

~~$f(x)$~~ $f(2022) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$ Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$.

№ 6.

Пусть $\operatorname{tg} x = t$.

$$at^3 + (a^2-a-3)t^2 + (3-3a-a^2)t + 3a = 0$$

$$at^3 + (a^2-3)t^2 - at^2 + (3-a^2)t - 3at + 3a = 0.$$

~~$at^3 - at^2$~~ $at^2(t-1) + t(a^2-3)(t-1) - 3a(t-1) = 0$

$$(t-1)\left(at^2 + (a^2-3)t - 3a\right) = 0.$$

$at^2 + (a^2-3)t - 3a = 0$, $a \neq 0$.

$$D = a^4 - 6a^2 + 9 + 12a^2 = (a^2+3)^2$$

$t_{1,2} = \frac{3-a^2 \pm (a^2+3)}{2a}$ — модуля не надо т.к. $\pm$

Чистовик лист 4

$$t_1 = \frac{3-a^2-a^2-3}{2a} = \frac{-2a^2}{2a} = -a. \quad t_2 = \frac{3-a^2+a^2+3}{2a} = \frac{3}{a}.$$

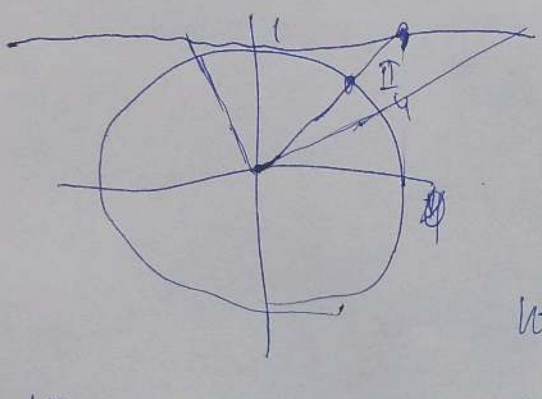
$$(t-1)(t+a)\left(t-\frac{3}{a}\right)=0, \quad \text{при } a=0.$$

получаем из исходного:

$$-3t^2+3t=0, \quad t^2=t, \quad t=0; \quad t=1.$$

$x=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{4}$, расстояние $\frac{\pi}{4}$.

~~При a больше~~ 0 корень $x=\frac{\pi}{4}$ подходит всегда, два других корня имеют разные знаки, поэтому один корень будет ~~от~~ $\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, а другой от $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$



Заметим, что когда один из корней будет от ~~от~~ $\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right]$, то второй корень будет от $\frac{\pi}{2}$ до π ~~поэто~~ и это расстояние будет наибольшим между корнями ~~, оно бу~~ , расстояние будет всегда больше $\geq \frac{\pi}{4}$. Если же положительный корень будет от $\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ то расстояние между ~~отрицательным~~ наход $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ корнем

Чистовик лист 5

и $\frac{\pi}{4}$ будет больше $\frac{\pi}{4}$,

когда $\frac{3}{a}=1$, $a=3$, второй корень будет -3.

расстояние будет больше $\frac{\pi}{4}$

$\frac{3}{a}\neq 0$ и когда $a=-1$, то $\frac{3}{a}=-3$, поэтому

подходит только $a=0$.

Ответ: $a=0$; расстояние $\frac{\pi}{4}$

№6.

Изобразим схематично графики. $y=2^t-256$

$y=t^3-144t=0$, ~~$t_1 = t=$~~

$t=0$; $t=12$; -12.

при $t\in(-12;0)\cup(12;+\infty)$ то

$t^3-144t>0$.

$t=8$, $2^t-256=0$

при $t>8$ ~~то~~ $2^t-256>0$.

При $t<-12$, два числа будут меньше 0, поэтому не подходит

Заметим что нам подходят значения только когда два и более ~~чисел~~ чисел положительные.

При $t > 12$. два числа больше 0, поэтому нам подходят все значения $t > 12$

$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$ будет > 0, при $t \in$ $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right) + 2\pi n$, при $t > 0$, есть два промежутка $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$; и $\left(\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right)$, при $t \in 0; 8$, a и $b < 0$, $(0; 8)$ не подходит.

при ~~a~~ $t \in \left(8; \frac{8\pi}{3}\right)$ два числа больше 0, поэтому эти значения подходят, а при $t \in \left(\frac{8\pi}{3}; 12\right)$

c и a отрицательные.

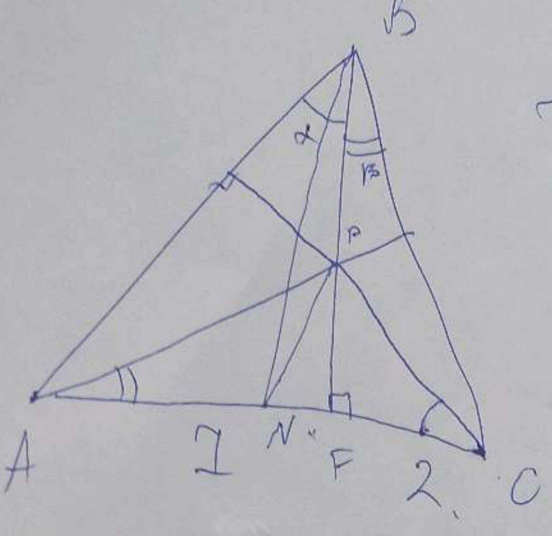
2) при $t \in \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right)$ положительны и. a и. c.

при $t \in \left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right)$ ~~два числа~~: положительны a и c., при этом $-\frac{11\pi}{3} > -12$, а

Следующий раз синус положителен только при $t \in \left(-\frac{17\pi}{3}; -\frac{16\pi}{3}\right)$ $-\frac{16\pi}{3} < -12$, остальные промежутки не подходят т.к на них два и более числа отрицательные

Ответ: $t \in \left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(8; \frac{8\pi}{3}\right)$ $\cup\ (12; +\infty)$

Чистовик лист 7



№7.

Пусть $BF = x$. ~~пусть~~

$ABF = \alpha$. $CBF = \beta$

$tg\, ABF = \frac{7}{x}$ $tg\, CBF = \frac{2}{x}$

$\frac{PF}{2} = tg\,\alpha$ $PF = \frac{14}{x}$

$tg\, PNF = \frac{14}{x \cdot NF}$ $tg\, BNF = \frac{x}{NF}$

пусть $NF = y$, $tg \angle BNP = arctg\, BNF - arctg\, PNF$.
$(y \in -2; 7)$

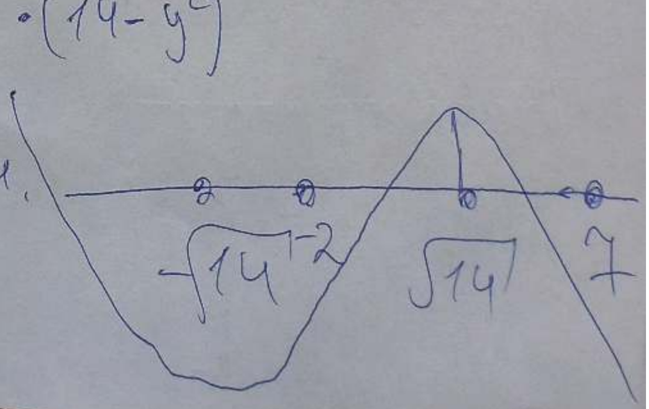
$tg\angle BNP = \frac{tg\, BNF - tg\, PNF}{1 + tg\, BNF \cdot tg\, PNF} = \frac{\frac{x}{y} - \frac{14}{xy}}{1 + \frac{x}{y} \cdot \frac{14}{xy}} = \frac{\frac{x^2 - 14}{xy}}{\frac{y^2+14}{y^2}} =$

$\frac{(x^2-14) \cdot y^2}{(y^2+14) \cdot xy} = \frac{(x^2-14) \cdot y}{(y^2+14) \cdot x}$

$f(y) = \left|\frac{(x^2-14)y}{(y^2+14) \cdot x}\right|$ $f'(y) = \frac{(x^2-14)(y^2+14) \cdot x - (x^2-14) \cdot y \cdot x \cdot 2y}{(y^2+14) \cdot x^2} =$

$\frac{(x^2-14) \cdot x \, (y^2+14-2y^2)}{(y^2+14) \cdot x^2} = \frac{(x^2-14) \cdot x}{(y^2+14) \cdot x^2} \cdot (14 - y^2)$

$y = -\sqrt{14}$; $\sqrt{14}$ – экстремумы.



~~при~~

Чистовик. Лист 8

В точке $y=\sqrt{14}$ - максимум функции на отрезке.
$(-2;7)$, чем больше тангенс угла, тем больше угол, $\angle BNP < \frac{\pi}{2}$, по этому берем модуль от тангенса. и в зависимости от к $y=\sqrt{14}$ будет либо минимумом или максимумом, но $|f(y)|$ будет максимальным

Ответ: $y=\sqrt{14}$ $FN=\sqrt{14}$