МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кольцов Артём Алексеевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	0	15	15	15

5. $\sin b - \frac{1}{2}$ Черновик 1 2 3 4 5 6 7 (1)

(1.) $A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$

$1{,}5 \qquad \frac{5}{36}$

$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$

$(1\cdot 2)^2 = 2^2 - \cancel{2}$ $\qquad (48\cdot 49)^2 = 49^2 - 49$

(1) $B = \frac{\sqrt[6]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt[3]{2}}$

$B^6 = \frac{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)^2}{4} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)^2}{2} =$

$= \frac{(2-\sqrt{3})(3+2\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}{4} =$

$= \frac{16-12}{4} = 1$

$B = 1$

$A > 0{,}75$

$\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3} + \frac{7}{3}\cdot\frac{7}{4} + \frac{9}{4}\cdot\frac{9}{5}$

$\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3} + \frac{5}{3}$

$\frac{3}{2}\left(1+\frac{5}{3}\right)$

$\frac{14}{4} \quad \frac{4}{56}$

~~$A > B$~~

(2) Заметим что $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{(n\cdot(n+1))^2}$

Поэтому A можно записать так:

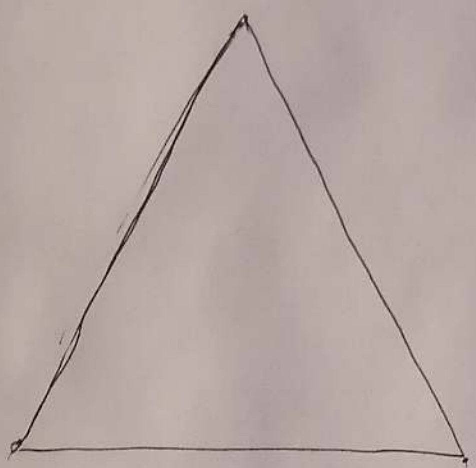
$A = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)$ и т.д.

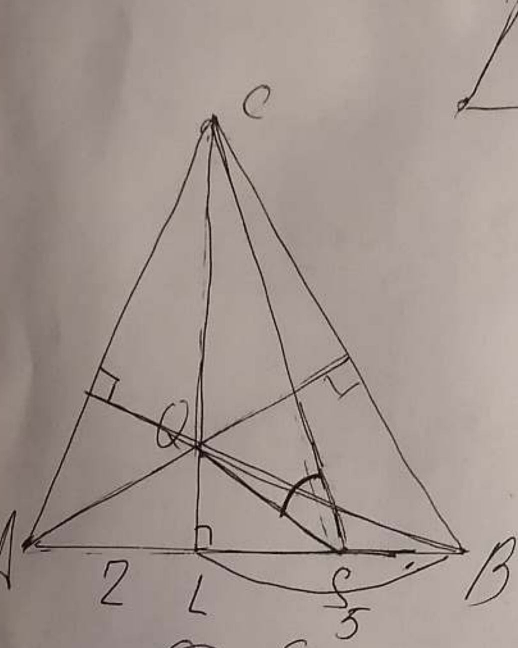
При раскр. скобок сокр.: $A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{50^2}$ (21) $\ldots + \left(\frac{1}{49^2} - \frac{1}{50^2}\right)$

Черновик

(2.)

(7.)





$\angle S - ?$

① Заметим, что S — т. касания окружности проходящей через C и Q, и кас. AB. Как известно, если точка S' будет находиться вне касающейся окружности, то угол $CS'Q$ будет меньше. Поэтому точка S именно такая.

② Отразим точку B относительно точки L (попадём на пр. AB) получим B'. Из симметрии $\angle BCL = \angle B'CL$, а по свойству ортоцентра $\angle BCL = \angle QAL$. Тогда четырёхугольник $B'CQA$ — впис., т.к. угол $\angle B'CQ = \angle QAL$.

③. По степени т. L относительно $B'CQA$ $LA \cdot LB' = LQ \cdot LC$. По степени точки L относ. CQS $LQ \cdot LC = LS^2$. Т.к. $LB' = LB = 5$ $LS = \sqrt{10}$. Это и есть ответ.

④. Заметим, что факт из шага ① верен только для точек по одну сторону от QC, но очевидно, что по другую сторону от CQ существует аналогичная касающаяся окружность, симметричная нашей. Тогда для неё LS тоже равно $\sqrt{10}$. ~~Поэтому~~ эта точка S выпадает за отрезок AB.

$\frac{5\pi}{6} - 4\pi = -\frac{19\pi}{6}$

Ответ: $\sqrt{10}$

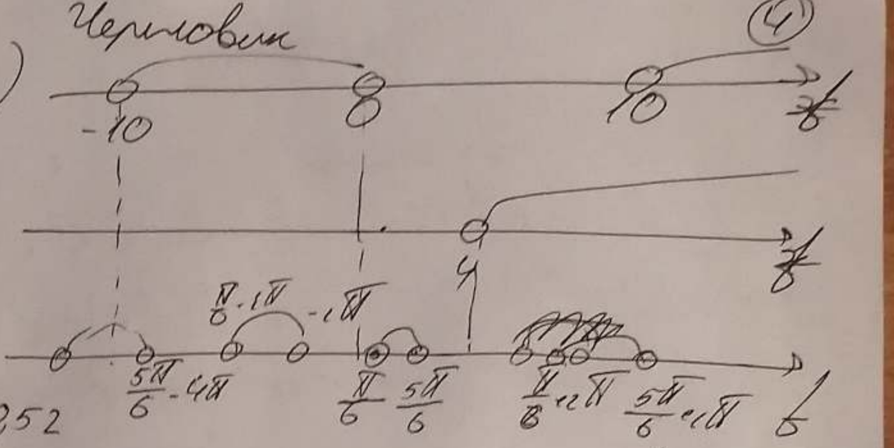
⑤ ① Чтобы среднее число было положительным, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы два из 3 чисел были положительными. Найдём участки, где a, b, c — положительны.

② $a > 0$ при $t \in (-10; 0) \cup (10; +\infty)$.

$b > 0$ при $t \in (4; +\infty)$

$c > 0$ при $t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

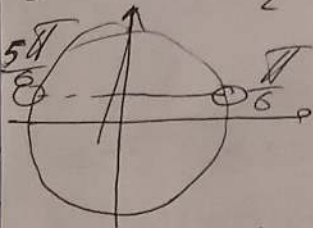
Черновик (4)



$a = t(t-10)(t+10)$

$b = (2-1)(t-4)$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$



$\frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{6}$ 0,52

$\frac{5\pi}{6} \approx 2,6$

$12,56 - 2,6 = 9,96$

$13,56 - 3,65 = 9,91$

$-4\pi \approx -12,56$

при $k \in [1; +\infty)$

$\left((-10; \frac{5\pi}{6} - 4\pi) \cup (\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi) \cup \cup (\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)\right) \setminus (10; +\infty)$

③ 1) Заметим что $f(f(f(x))) = x$ (проверить)

2) Тогда $f(f(f(2022))) = 2022$, т.е. 3-х кратное применение f ничего не меняет

3) т.к. 1305 : 3 (1+3+5 = 9) то ответ: 2022.

② Ответ ~~2022~~ ~5 ?

① Выпишем все двузначные числа, кратные 19 или 23. 19; 23; 38; 46; 57; 69; 76; 92; 95.

② После первой девятки может быть либо 2, либо 5. Если 2, то потом точно 3, потом точно 8, дальше облом...

Если 5, то потом точно 7, потом точно 6 потом точно 9. Цикл дальше так и будет повторяться должен...

Чистовик (7)

9,5,7,6. Черновик (5)

Т.к 2022 даёт остаток 2 от деления и заканчивается на 5

Ответ: 5

(3).

$$\left(\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\right)^9 = \frac{1}{1-x^9}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}}\right)^9 = \frac{1}{\frac{\cancel{1}-x^9-\cancel{1}}{1-x^9}} =$$

$$= -\frac{1-x^9}{x^9}$$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{\cancel{x^9}+1\cancel{-x^9}}{x^9}}} = x$$

Чистовик

(6)

1. (1) Рассмотрим число B

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$B^6 = \frac{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)^2}{4} = \frac{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}{4} = \frac{16-12}{4} = 1$$

(2) Рассмотрим число A

Заметим что $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$

Поэтому A можно записать так:

$$A = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{49^2} - \frac{1}{50^2}\right)$$

При раскрытии скобок сократятся все числа, кроме 1 и $\left(-\frac{1}{50^2}\right)$. Значит

$$A = 1 - \frac{1}{50^2} < 1 = B$$

$$A < B$$

Ответ: B.

Чистовик

7

2. ① Выпишем все двузначные числа, кратные 19 или 23: 19; 23; 38; 46; 57; 69; 76; 92; 95.

② После первой девятки может быть либо 2, либо 5. Если 2, то потом 3, затем 8, а дальше не подходит

Если 5, то потом 7, затем 6; 9. Значит получаем цикл, дальше будет повторяться фрагмент: 9;5;7;6.

③ Т.к 2022 даёт остаток 2 от деления на 4, то число заканчивается цифрой 5.

Ответ: 5

③ 3. Рассмотрим $f(f(f(x)))$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1-x^9-1}{1-x^9}}} = -\sqrt[9]{\frac{1-x^9}{x^9}}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{x^9+1-x^9}{x^9}}} = x$$

Значит можно заметить, что $f(f(f(x))) = x$

Чистовик

8

② Тогда $f(f(f(2022))) = 2022$, т.е., ~~т.к.~~ 3-х кратное применение f ничего не меняет, а т.к. $1305 \vdots 3$ $(1+3+5=9 \vdots 3)$, то искомое число 2022

Ответ: 2022.

5. ① Чтобы среднее число было положит., необходимо и достаточно, чтобы хотя бы 2 из 3 чисел были положительными

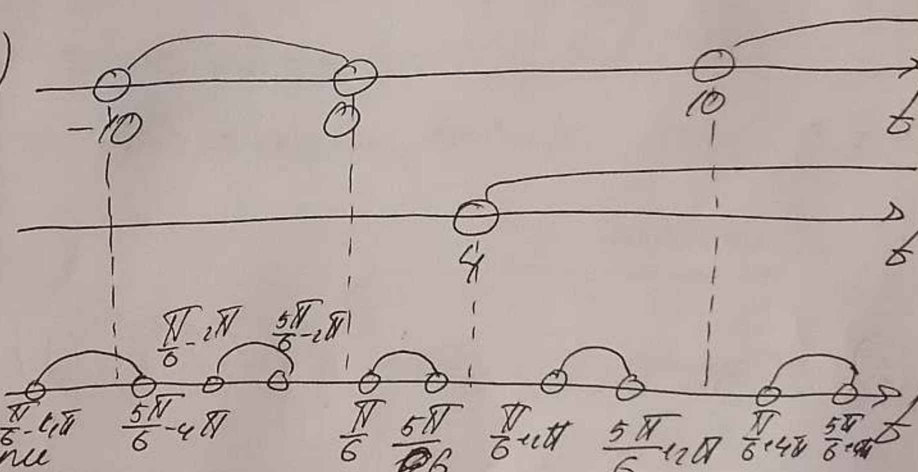
②

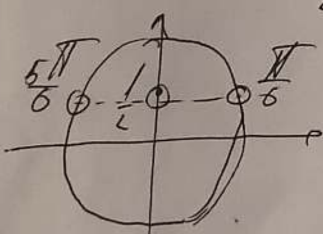
$a = t(t-10)(t+10)$

рационализировал

$b = (2-1)(t-4)$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$





$c > 0$ при $t \in \left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right), k \in Z$

$0{,}52 < \frac{\pi}{6} < 0{,}53$

$2{,}6 < \frac{5\pi}{6} < 2{,}65$

$-9{,}96 < \frac{5\pi}{6} - 4\pi < -9{,}91$

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi < 10$

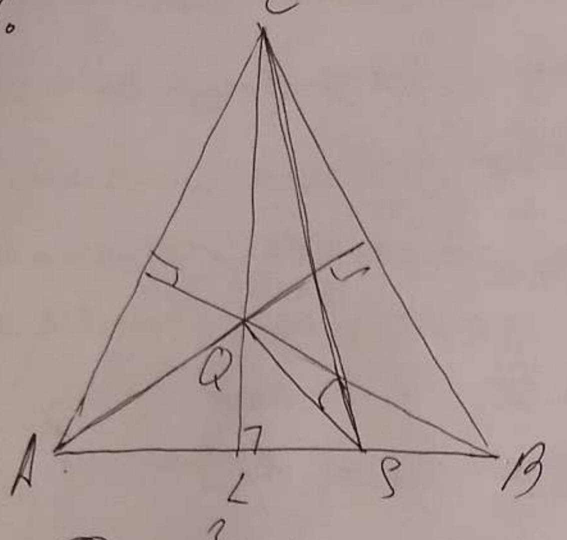
$$\left[\begin{array}{l} -10 < t < -\frac{19\pi}{6} \\ -\frac{11\pi}{6} < t < -\frac{7\pi}{6} \\ \frac{13\pi}{6} < t < \frac{17\pi}{6} \\ t > 10 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-10; -\frac{19\pi}{6}\right) \cup \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (10; +\infty)$.

4 Чистовик

9

7.



LS – ?

① Заметим, что S — т. касания окружности, проходящей через C и Q и кас. AB. Как известно, если точка S' будет находиться вне упомянутой окружности, то $\angle CS'Q$ будет меньше $\angle CSQ$. Поэтому точка S именно такая.

② Отразим точку B относительно точки L (попадём на прямую AB), получим B'. Из симметрии $\angle BCL = \angle B'CL$, а по св-ву ортоцентра $\angle BCL = \angle QAL$. Тогда 4-угольник $B'CQA$ — впис., т.к. $\angle B'CQ = \angle QAL$.

③ По степени точки L относительно $B'CQA$ $LA \cdot LB' = LQ \cdot LC$. По степени точки L относительно CQS $LQ \cdot LC = LS^2$.
Т.к. $LB' = LB = 5$ $\underline{LS = \sqrt{10}}$

Чистов.

Чистовик

(4) Заметим, что факт из шага (1) верен только для точек по одну сторону от QC. Однако очевидно, что по другую сторону от QC существует аналогичная касающаяся окружность, симметричная нашей. Тогда для неё $\angle S$ тоже равно $\sqrt{10}$. Потому эта точка S выпадает за отрезок AB.

Ответ: $\sqrt{10}$.

6. (1) Данный многочлен раскладывается на множители так

$$(\operatorname{tg} x - 1)(a \operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - 2a) = 0 \quad *$$

см. стр. 11

(2) Тогда есть корень: $\operatorname{tg} x = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{4}$

если $a \neq 0$: $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{a}$ $\quad x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{a}\right)$

$\operatorname{tg} x = 2a$ $\quad x = \operatorname{arctg}(2a)$

Заметим, что $2a$ и $-\frac{1}{a}$ – разных знаков, т.е. среди них есть отриц. Но тогда и его $\operatorname{arctg} < 0$. Это значит, что расстояние от $x = \frac{\pi}{4}$ до этого arctg уже $> \frac{\pi}{4}$. Потому в этом случае расстояние между корнями $> \frac{\pi}{4}$

(3) Если $a=0$, то наше ур-е принимает вид $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x-1)$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4} \\ x=0 \end{array}\right.$$

Поэтому в этом случае расст между корнями $=\frac{\pi}{4}$

Ответ: $a=0$.

* $a\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x-a\operatorname{tg}^2 x-2a^2\operatorname{tg}^2 x+2a^2\operatorname{tg} x-2a\operatorname{tg} x-$
$-\operatorname{tg} x+2a=0$

$2a(a\operatorname{tg} x+1)-2a\operatorname{tg} x(a\operatorname{tg} x+1)+\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x-1)+$
$+a\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x-1)=0$

$(a\operatorname{tg} x+1)(\operatorname{tg} x-1)(-2a)+(\operatorname{tg} x-1)(a\operatorname{tg} x+1)\operatorname{tg} x=0$

$(\operatorname{tg} x-1)(a\operatorname{tg} x+1)(\operatorname{tg} x-2a)$

Черновик

(12)

$a\,tg^3x + tg^2x - a\,tg^2x - 2a^2tg^2x + 2a^2tg\,x - 2a\,tg\,x -$

$- tg\,x + 2a = 0$

$2a(a\,tg\,x + 1) - 2a\,tg\,x(a\,tg\,x + 1) =$

$= (a\,tg\,x + 1)(tg\,x - 1) \cdot (-2a)$

$tg\,x\,(tg\,x - 1) + a\,tg^2x\,(tg\,x - 1) =$

$= (tg\,x - 1)(a\,tg\,x + 1)\,tg\,x$

$(tg\,x - 1)(a\,tg\,x + 1)(tg\,x - 2a) = 0$

~~Черновик~~
Черновик

(13)

6. ① $(\operatorname{tg} x - 1)(a \operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - 2a) = 0$

② Точно есть корень $\operatorname{tg} x = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

если $a \neq 0$ если $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{a}$ $x = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{a})$

$\operatorname{tg} x = 2a$ $x = \operatorname{arctg}(2a)$

③ Заметим, что $2a$ и $-\frac{1}{a}$ – разного зн. т.е. среди них есть отриц. Но тогда и его $\operatorname{arctg} < 0$. Это значит, что расстояние от $x = \frac{\pi}{4}$ до этого arctg уже $> \frac{\pi}{4}$. Поэтому в этом случае наиб. расстояние между корнями $> \frac{\pi}{4}$.

④ Если $a = 0$ то наше ур-е $(\operatorname{tg} x - 1)\operatorname{tg} x$
У него есть два корня $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \\ x = 0 \end{array}\right.$

Поэтому в этом случае наиб расст между корнями равно $\frac{\pi}{4}$

Ответ: при $a = 0$ будет $\frac{\pi}{4}$.