МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Копнина Серафима Павловна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

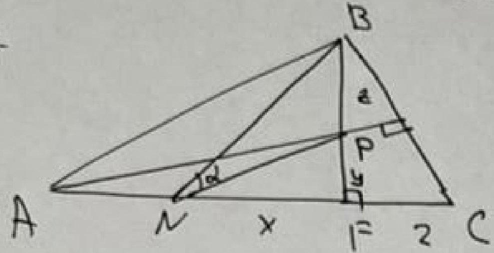
Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	10	15	0

Чистовик

⑥

№ 7



$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{z+y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$\alpha' = \frac{-1}{1+\frac{(z+y)^2}{x^2}} \cdot \frac{z+y}{x^2} + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y}{x^2} =$

$= -\frac{z+y}{x^2+(z+y)^2} + \frac{y}{x^2+y^2} = 0$

Т.к при x около 0 $\alpha \approx 0$, и при $x \to \infty$, $\alpha \to 0$ то ноль производной будет т. max (т.к у производной 1 ноль при $x \geq 0$)

$y x^2 + y(z+y)^2 - (x^2+y^2)(z+y) = 0$

$x^2(y-z-y) = -y(z+y)^2 + y^2(z+y)$

$x^2 = \frac{y(z+y)^2}{z} - \frac{y^2(z+y)}{z} = y(z+y)$

$x = \sqrt{y(z+y)}$

$NF = \sqrt{FP(BP+PF)}$

~~Ответ:~~ $\cancel{\sqrt{FP(BP+PF)}}$

Ответ: $\sqrt{FP(PB+FP)}$

~~Чистовик~~ Черновик

№5

$a = t^3 - 81t = t(t^2-81) = t(t-9)(t+9)$ $\quad$ $-\;(-9)\;+\;(0)\;-\;(9)\;+\;\to t$

$b = 11^t - 121$ $\quad$ $-\;(2)\;+\;\to t$

$\Rightarrow x_2$ среднее $\quad$ $-\;(-9)\;?\;(0)\;-\;(2)\;?\;(9)\;+$ $\qquad x_2 > 0$ при $t > 9$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$

$c > 0 \iff t \in \left(2\pi k + \frac{\pi}{6},\ 2\pi k + \frac{5\pi}{6}\right),\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$x_2 > 0$ также при $t \in \left[2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \underbrace{\left(2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)}_{<9}$

и при $t \in \left(-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$

Ответ: $t \in \left(-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$

№6

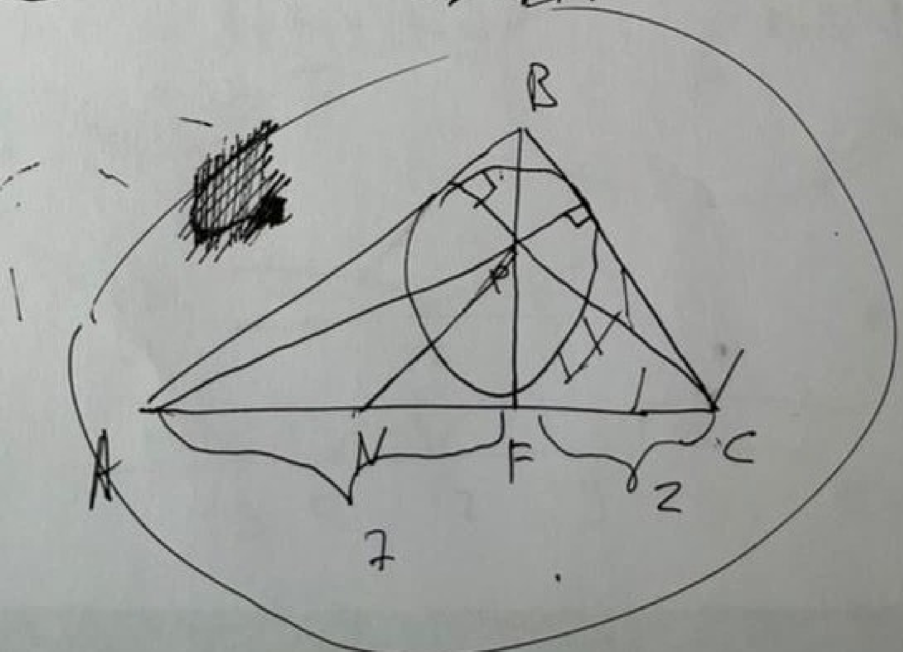
$a \in R$ $\qquad$ наименьшее значение?

$a\,\mathrm{ctg}^3 x + (2a^2 - a - 2)\,\mathrm{ctg}^2 x + (2 - 4a - 2a^2)\,\mathrm{ctg}\,x + 4a = 0$

Обозначим $\mathrm{ctg}\,x = t$

$\cancel{a t^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 + (2 - 4a - 2a^2)t + 4a = 0}$

~~Разложим на множители~~



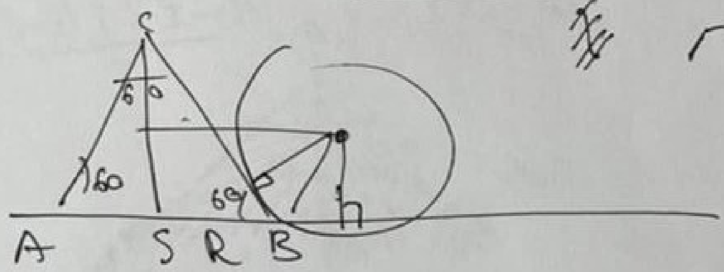
Черновик

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x}$$

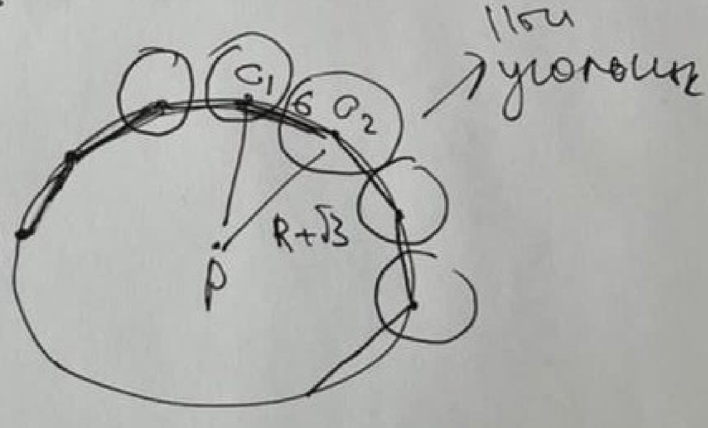
$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1-x^7}{-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{-x^7-1+x^7}{-x^7}}} = x$$

$$\Rightarrow f(f(f(x))) = x$$

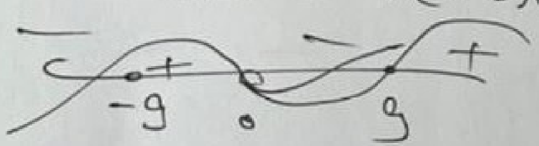
$$\underbrace{f(f\ldots(f}_{1304 \text{ раза}}(2022))\ldots) = f(f(x)) = \sqrt[7]{\frac{2022^7-1}{2022^7}} = \sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$$



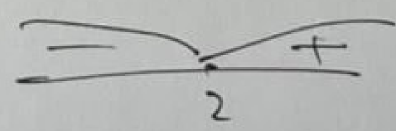
N5



$a = t^3 - 81t = t(t-9)(t+9)$

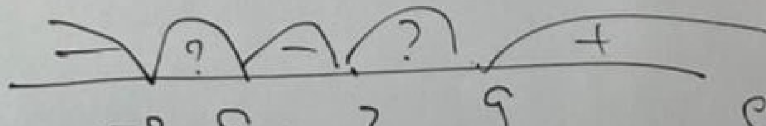


$b = 11^t - 121$



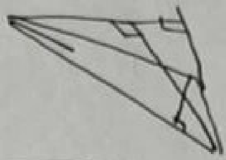
$x_2 > 0 \quad t \geq 9$

x_2



$c = \sin t - \frac{1}{2}$

~~[illegible]~~
Черновик



~~1~~

№1

$$A^3 = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}\,(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2} =$$

$$= \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow A = 1$$

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \overset{?}{=} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$B = \sum_{n=1}^{59} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{59} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(59+1)^2} < 1 = A$$

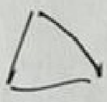
$$\Rightarrow A > B$$

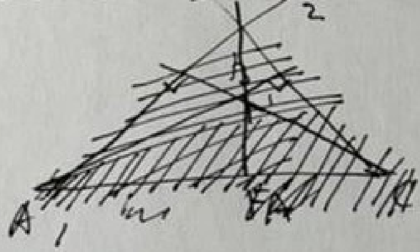
Ответ: $A > B$

$$A^4 = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}-1)^2}{4} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2}\cdot(\sqrt{3}-1)^2$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{3-1}{2}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}-1 = 1,7-1$$

$$= 0,7\ ?$$





2021

Чистовик

№1

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2}$$

$$A^3 = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}\,(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2} =$$

$$= \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow A = 1$$

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \overset{?}{=} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$B = \sum_{n=1}^{59} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{59} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(59+1)^2} < 1 = A$$

$\Rightarrow A > B$

Ответ: $A > B$ (A больше.)

№2

19 23
38 46
57 69
76 92
95

Рассмотрим возможные варианты начала ~~на~~.

469 — 238 — такого быть не может, т.к нет подходящего 2-значного числа, начинающегося на 8 (точнее может быть только в конце если после "8" ничего не должно быть)

469 — 576

Чистовик

2

№2

$\Rightarrow 4\underbrace{6957.....6957.6957}_{}$

2020 цифр т.е 505 раз идёт "6957"

или $4\underbrace{6957...6957}_{}6923$

2016 цифр т.е

504 раза "6957"

Ответ: 7 или 3

№3

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1+x^7}}$ $\qquad f(f(f(f(f(\ldots f(2022)))) \ldots))$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1 - \frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1 - \frac{1-x^7}{-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{-x^7-1+x^7}{-x^7}}} = x$$

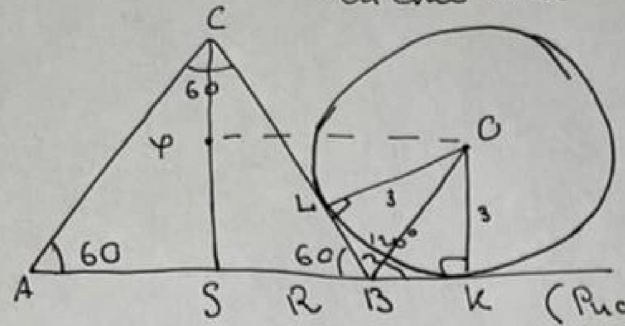
$$\Rightarrow f(f(f(x)) = x$$

$$\underbrace{f(f\ldots(f(2022))\ldots}_{1304\text{ раза}}) = f(f(x)) = \sqrt[7]{\frac{2022^7-1}{2022^7}}$$

$$= \sqrt[7]{1 - \frac{1}{2022^7}}$$

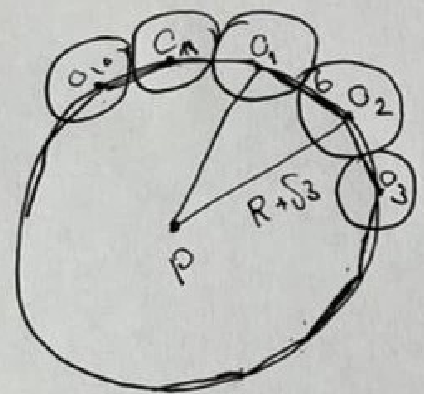
Ответ: $\sqrt[7]{1 - \frac{1}{2022^7}}$

№4



(Рис 1)

Рассмотрим осевое сечение конуса, проходящее через один из центров шаров (см. рис. 1) Из $\triangle OBK$: $\angle OBK = 60^\circ$ $\frac{BK}{OK} = ctg\, 60^\circ \Rightarrow BK = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ Пусть R - радиус основания конуса



Рассмотрим еще плоскость, проходящую через все 11 центров шаров. Она находится на расстоянии 3 от плоскости основания конуса. Центры шаров находятся в вершинах 11-угольника (правильного) вписанного в окружность радиуса $PC = R+\sqrt{3}$

из $\triangle PO_1O_2$: $\frac{O_1O_2 = 6}{2(R+\sqrt{3})} = \sin\frac{\pi}{11} \Rightarrow R+\sqrt{3} = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{11}}$

$\Rightarrow R = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{11}} - \sqrt{3}$

Ответ: $R = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{11}} - \sqrt{3}$

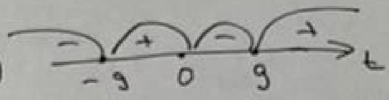
№5

$a = t^3 - 81t$

$b = 11^t - 121$

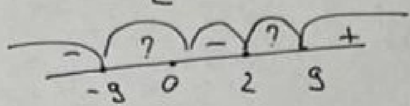
$c = \sin t - \frac{1}{2}$

$a = t^3 - 81t = t(t^2-81) = t(t-9)(t+9)$



$b = 11^t - 121$

$\Rightarrow x_2$ средние



$x_2 > 0$ при $t > 9$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$

$c > 0 \Leftrightarrow t \in \left(2\pi k + \frac{\pi}{6}, 2\pi k + \frac{5\pi}{6}\right), k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$x_2 > 0$ также при $t \in \left[2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(2\pi + \frac{\pi}{6}; \underbrace{2\pi + \frac{5\pi}{6}}_{<9}\right)$

и при $t \in \left(-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$

Ответ: $t \in \left(-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$

№6

$a \in \mathbb{R}$ интервал $(0; \pi)$, (принимает наименьшее значение)

$a \operatorname{ctg}^3 x + (2a^2 - a - 2)\operatorname{ctg}^2 x + (2 - 4a - 2a^2)\operatorname{ctg} x + 4a = 0$

$y = \operatorname{ctg} x$

$$ay^3 + (2a^2 - a - 2)y^2 + (2 - 4a - 2a^2)y + 4a = 0$$

Если $a = 0$, то уравнение имеет вид $-2y^2 + 2y = 0$

$y(-y+1) = 0$ $\quad y = 0$ и $y = 1$

Тогда

$\operatorname{ctg} x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ (т.к смотрим корни $\in (0; \pi)$

$\operatorname{ctg} x = 1$

$x = \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ расст между корнями $= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

№6

Если $a \neq 0$

То $y=1$ является корнем (метод подбора)

$$ay^3+(2a^2-a-2)y^2+(2-4a-2a^2)y+4a \;\Big|\; \underline{y-1}$$
$$- \; ay^3-ay^2 \qquad\qquad ay^2+(2a^2-2)y-4a$$

$$(2a^2-2)y^2+(2-4a-2a^2)y+4a$$
$$-\;(2a^2-2)y^2-(2a^2-2)y$$

$$-4ay+4a$$

=> уравнение имеет вид: $(y-1)(ay^2+(2a^2-2)y-4a)=0$

$ay^2+(2a^2-2)y-4a=0$

$$y=\frac{-2a^2+2\pm\sqrt{4a^4-8a^2+4+16a^2}}{2a}=\frac{-2a^2+2\pm\sqrt{(2a^2+2)^2}}{2a}=($$

(т.к $2a^2+2>0$) $=\dfrac{-2a^2+2\pm(2a^2+2)}{2a}=\dfrac{2}{a}$ или $-2a$

При $a\neq 0$: корни $x=\operatorname{arcctg}\frac{2}{a}$ и $x=\operatorname{arcctg}-2a$

При $a\in(0;2]$: $\operatorname{arcctg}\frac{2}{a}\leq\operatorname{arcctg}1<\operatorname{arcctg}0<\operatorname{arcctg}-2a$

=> Это хуже чем при случае $a=0$

При $a>2$: $\operatorname{arcctg}\frac{2}{a}<\operatorname{arcctg}0<\operatorname{arcctg}-4<\operatorname{arcct}-2a$

Тогда расстояние $>\operatorname{arcctg}-4-\operatorname{arcctg}0=\operatorname{arcctg}-4-\frac{\pi}{2}>$

$>\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$ $\quad \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=-1$ => $\operatorname{arcctg}-4>\operatorname{arcct}-1=\frac{3\pi}{4}$

При $a\in[-2;0)$: $\operatorname{arcctg}-2a<\operatorname{arcctg}0<\operatorname{arcctg}-1\leq\operatorname{arcctg}\frac{2}{a}$

Расстояние $>\operatorname{arcctg}-1-\operatorname{arcctg}0=\frac{\pi}{4}$

При $a<-2$:

$\operatorname{arcctg}-2a<\operatorname{arcctg}4<\operatorname{arcctg}0<\operatorname{arcctg}\frac{2}{a}$

Аналогично $a>2$ получаем расстояние $>\frac{\pi}{4}$

Председателю апелляционной
комиссии олимпиады школьников
"Ломоносов" Ректору МГУ
имени М.В Ломоносова
академику В.А Садовничему
ученицы 11 "А" класса
ГБОУ города Москвы
"Школы № 1579" (Москва,
Пролетарский проспект
дом 7 корпус 9)

Конина Серафима Павловна

апелляция

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы 80 (баллов) за мою работу заключительного этапа по Математике 10-11 класс 2021-2022, поскольку не согласна с выставленными мне баллами.

26.03.2022

Конина С.П.