МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кравацкий Алексей Юрьевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	15	15	15

Задача 1

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2} \qquad B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$4-2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2 \to \sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \quad (\text{т.к. } \sqrt{3} > 1)$$

Тогда $B = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = 1$

Заметим, что $A = \sum\limits_{1 \le a \le 44} \frac{2a+1}{a^2(a+1)^2}$

Заметим, что первый член суммы (S_1) $= 1 - \frac{1}{4}$; второй $\to \frac{1}{4} - \frac{1}{9}$; третий $\to \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ и т.д., т.е. $S_i = \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2}$. Докажем это:

$$S_i = \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} \overset{?}{=} \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2} \Leftrightarrow \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} \overset{?}{=} \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}$$

Значит, $A = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2} = 1 - \frac{1}{45^2} < 1 = B.$

$\boxed{\text{Ответ: } A < B \text{, т.е. } B \text{ больше}}$

Задача 2

1-я цифра – 1 → вторая – 9 (∄ числа вида $\overline{1y}$ $\vdots\, 23$)

$\underbrace{\overline{1\ldots\ \ldots}}_{\text{2021 цифра}}$ $\qquad \overline{19}$

Какие есть двузначные числа, $\vdots\, 19$: 19, 38, 57, 76, 95

$\vdots\, 23$: 23, 46, 69, 92

Если третья цифра – это 2, то последовательность такая: $19\overbrace{2\underbrace{38}_{\text{только } 38}}^{\text{только } 23}?$

Нет числа, вида $\overline{8*}$, $\vdots$ на 19 или 23

Значит, третья цифра – это 5:

195769, а дальше по циклу (опять 9 появилась)

цикл длины 4.

~~тогда цифра, i-я по счёту, такая же, как и~~ $\cancel{(i-1)\,\%\,4+2}$~~-я по счёту. Т.е. 2021-я такая же, как~~

остаток при делении на 4

~~2020 % 4 + 1, т.е. как первая. Тогда~~

Тогда 2021-я цифра такая же, как $2021-4\cdot d$ (если $2021-4d \geqslant 2$)-я, т.е.

такая же, как $2021-4\cdot 504 = 5$-я, т.е. 2021-я цифра – это $\boxed{6}$

Ответ: 6

Задача 3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

f 1305 раз от x (вложенно)

$$g(x)=f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}}=\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{\sqrt[9]{-x^9}}=\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{-x}=\sqrt[9]{1-\frac{1}{x^9}}$$

$$\cancel{f(f(f(f(x))))=g(g(x))=\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x^9}}}=\sqrt[9]{1-\frac{x^9}{x^9-1}}=\sqrt[9]{\frac{-1}{x^9-1}}}=$$

$$f(f(f(x)))=f(g(x))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-1+\frac{1}{x^9}}}=x$$

Задача 3 Продолжение

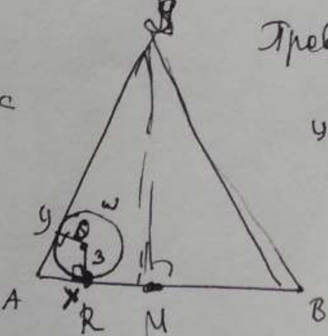
Тогда $\underbrace{f(f\dots(x))}_{3k \text{ раз},\ k\in N} = x$. ~~Поэтому~~ А $1305 = 435\cdot 3$, поэтому

$\underbrace{f(f(f\dots(x)))}_{1305 \text{ раз}} = x$, т.е. искомое значение $= 2022$

$\boxed{\text{Ответ: } 2022}$

Задача 4

Пусть радиус основания конуса $= R$



Проведём плоскость (ε) через ось конуса и центр одного из шаров $(Ш_1)$. Так как эта плоскость (ε) через центр шара (O), то она пересекает его по окружности радиуса 3. Так как ε проходит через ось ~~цилиндра~~, то $\varepsilon \perp$ основанию конуса. конуса. Тогда перпендикуляр из O (центра шара) на основание $\in \varepsilon \to$ окр-сть (ω) — сечение шара касается ~~его~~ отрезка-сечения основания. (в точке X)

~~Если все объекты спроецировать на ε, то точка касания $Ш_1$ и боковой пов-ти конуса будет удалена от O не более, чем на 3, т.е. лежать внутри ω или на.~~

~~Если провести касательную~~ Здесь будет вставка B

~~ω не пересекает в 2 точках SA, иначе $Ш_1$ не касался бы бок. пов-ти.~~

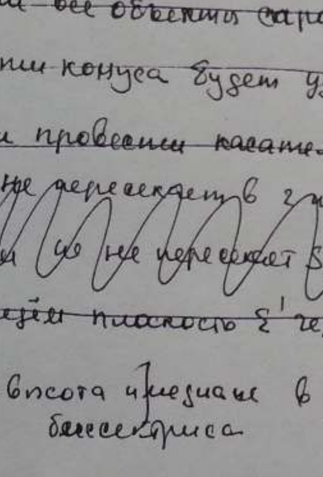
~~Если ω не пересекает SA, то она не будет касаться боковой пов-ти:~~

~~Проведём плоскость ε' через O, A и точку касания ω боковой пов-ти~~

SM — высота и медиана, биссектриса в равнобедр. $\Delta SAB \to \angle ASM = \frac{\angle ASB}{2} = 30^\circ \to \angle YAX = 60^\circ \to$

~~$\angle OX$~~ $\angle AOX = 30^\circ$ ($\Delta AYO = \Delta AXO$: $YO = XO$ как радиусы, AO общая, $AY = AX$ как кас-е к окр-сти) $\to AX = \frac{3}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 3\sqrt{3}$

Спроецируем всё на плоскость основания.



Шары будут окр-стями радиуса 3, причём соответственно касающимися (точки пересечения будут, т.к. было касание), а 2 пересечений не будет, иначе расст. между центрами < 6, т.е. не было касания)

~~Так как шаров~~ 19, и

Задача 4: продолжение

Пусть ~~O_i - центр i-го шара~~ X_i - точка X i-го шара. Это проекция O_i - центра i-го шара.

$MX_i = MA_i - \cancel{A_i}X_i = R - 3\sqrt{3}$. Значит, у нас $X_1X_2\ldots X_{19}$ - правильный 19-угольник с центром в M $\to$ $\angle X_1MX_2 = \frac{2\pi}{19} \to X_1X_2 = 2X_1M\sin\left(\frac{\pi}{19}\right) \Rightarrow$

$\overset{3}{\cancel{6}} = \cancel{2}\cdot(R-3\sqrt{3})\sin\frac{\pi}{19} \to R-3\sqrt{3} = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}} \to R = 3\sqrt{3} + \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}}$

$\boxed{\text{Ответ: } 3\sqrt{3} + \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}}}$

Вставка В. (см. решение, где она есть)

Заметим, что Σ - ~~ось~~ плоскость симметрии конуса и $Ш_T$ $\to$ точка касания шара вообще ~~плоск~~ пов-ти $(Y) \in \Sigma$.

То же верно и для X.

Задача 5

$a = t^3 - 121t$

$b = 2^t - 32$

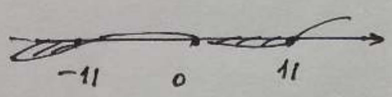
$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Если среднее из чисел >0, то наибольшее тоже >0, поэтому среди 3 чисел не более одного ≤ 0.

Если среди 3 чисел не более одного ≤ 0, то второе по величине >0, т.е. среднее положительно.

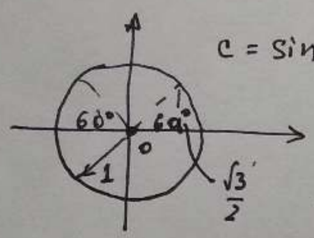
Тогда условие задачи $\Leftrightarrow$ тому, что среди a, b, c не более одного ~~отрица~~ неположительного

$a = t^3 - 121t = t(t-11)(t+11)$



По методу интервалов $a \le 0$, когда $t \in (-\infty; -11] \cup [0; 11]$

$b = 2^t - 32 \le 0$, когда $t \le 5$, т.е. когда $t \in (-\infty; 5]$



$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \le 0$, когда $\exists k:\ 2\pi k + \frac{2\pi}{3} \le t \le 2\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

(это следует из чертежа на тригонометр. окр-сти)

$t \in (-\infty; -11]$ и $t \in [0; 5]$ не подходят, так как при них $a \le 0$ и $b \le 0$.

~~Если $k=-2$:~~ $\underbrace{-4\pi + \frac{2\pi}{3}}_{-\frac{10}{3}\pi} > -11$, т.к. ~~$-4\pi >$~~ $-4 \cdot 3{,}14 < -12{,}5$, участок $[-4\pi + \frac{2\pi}{3}; -2\pi + \frac{\pi}{3}]$ больше -11

~~а $\frac{2\pi}{3} < \frac{2 \cdot 3{,}3}{3} = 2{,}2$~~

$-4\pi > -4 \cdot 3{,}15 = -12{,}6$, а $\frac{2\pi}{3} > \frac{2 \cdot 3{,}12}{3} = 2 \cdot 1{,}04 = 2{,}08$, т.е. $-4\pi + \frac{2\pi}{3} > -12{,}6 + 2{,}08 > -11$

В то же время

$-6\pi + 2\pi + \frac{\pi}{3} = -4\pi + \frac{\pi}{3} < -11$, так как $-4\pi < -4 \cdot 3{,}14 < -12{,}5$,

а $\frac{\pi}{3} < \frac{3{,}3}{3} = 1{,}1$, т.е. $-4\pi + \frac{\pi}{3} < -12{,}5 + 1{,}1 = -11{,}4 < -11$ $\Rightarrow$ весь ~~интервал~~ участок $[-6\pi + \frac{2\pi}{3}; -4\pi + \frac{\pi}{3}]$ меньше -11.

- это значит, что участок $t \in (-11; -\frac{10}{3}\pi)$ нам подходит: на нём только $b<0$.
- участок $t \in [-\frac{10}{3}\pi; -\frac{5\pi}{3}]$ не подходит: на нём $c<0$ и $b<0$.
- участок $t \in$ ~~$(-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3})$~~ $(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3})$ подходит: лишь $b<0$.
- участок $t \in [-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$ точно не подходит: $b<0$ и $c>0$

Задача 5. Продолжение

• ~~при~~ как было сказано, $t \in [0;5]$ тоже не подходит.

При $t \geq 5$ и ≤ 11: $a<0$, $b>0$. Необходимо тогда $c>0$,

т.е. ~~$t\in$~~ чтобы $\exists k$: $2\pi k+\frac{\pi}{3}<t<2\pi k+\frac{2\pi}{3}$

При $k=0$ такой интервал $<\frac{2\pi}{3}<\frac{2\cdot 4}{3}<5$

При $k=1$ такой интервал $>2\pi>6 \Rightarrow t\in\left(\frac{7\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right)$ подходит

$8\pi/3<\frac{8\cdot 3{,}15}{3}=8+\frac{8\cdot 0{,}15}{3}=8+0{,}4<11$. Всё хорошо.

При $k=2$ такой интервал $>4\pi>12 \Rightarrow$ не подходит для $t\leq 11$.

Значит, при $t\in[5;11]$ $t\in\left(\frac{7\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right)$

А $t>11$ подходит: $a>0$ и $b>0$

Тогда приходим к ответу:

$$\boxed{t\in\left(-11;-\frac{10}{3}\pi\right)\cup\left(-\frac{5\pi}{3};-\frac{4\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right)\cup(11;+\infty)}$$

Ответ

Задача 6

$$a\,tg^3x+(1-a-2a^2)\,tg^2x+(2a^2-2a-1)\,tgx+2a=0$$

a: ~~наибольшее~~ наименьшее расстояние между крайними корнями, $\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

назовём его S

Заметим, что tgx на участке $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ строго монотонно возрастает с ростом x. Это означает, что если мы решим ур-ние отн. tgx, то "коренное" значение tgx даст однозначное для "коренного" x ~~отн.~~ в ур-нии отн. x.

tgx принимает любые значения

Ур-ние отн. $t\equiv tgx$:

$$at^3+(1-a-2a^2)t^2+(2a^2-2a-1)t+2a=0$$

$t=1$ подходит: $\cancel{a}+(\cancel{1}-\cancel{a}-\cancel{2a^2})+(\cancel{2a^2}-\cancel{2a}-\cancel{1})+\cancel{2a}=0$

* Если $a=0$ ур-ние примет вид: $tg^2x-tgx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=0 \\ tgx=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{\pi}{4}\end{array}\right. \rightarrow$

$S=\frac{\pi}{4}$

Задача 6 Продолжение

* Если $a \neq 0$:

$$\begin{array}{l|l} at^3+(1-a-2a^2)t^2+(2a^2-2a-1)t+2a & t-1 \\ \hline -\ at^3-at^2 & at^2+(1-2a^2)t-2a \\ \quad \cancel{1-a}\ a & \\ \quad (1-2a^2)t^2+(2a^2-2a-1)t & \\ -\ (1-2a^2)t^2+(2a^2-1)t & \\ \qquad -2at+2a & \\ -\ \ -2at+2a & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Т.е. ур-ние отн. $t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ at^2+(1-2a^2)t-2a=0 \Leftrightarrow \end{array}\right.$ $a \neq 0$ по предположению

$$t=\frac{2a^2-1\pm\sqrt{4a^4-4a^2+1+8a^2}}{2a}=\frac{2a^2-1\pm(2a^2+1)}{2a}=\frac{4a^{\cancel{2}}}{2a};\ -\frac{2}{2a}=$$

$$=\frac{2a^{\cancel{2}}}{a};\ -\frac{1}{a}=2a;\ -\frac{1}{a}$$

Тогда мы хотим минимизировать расстояние между корнями $\operatorname{arctg}(2a)$; $-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a}\right)$ и $\frac{\pi}{4}$.

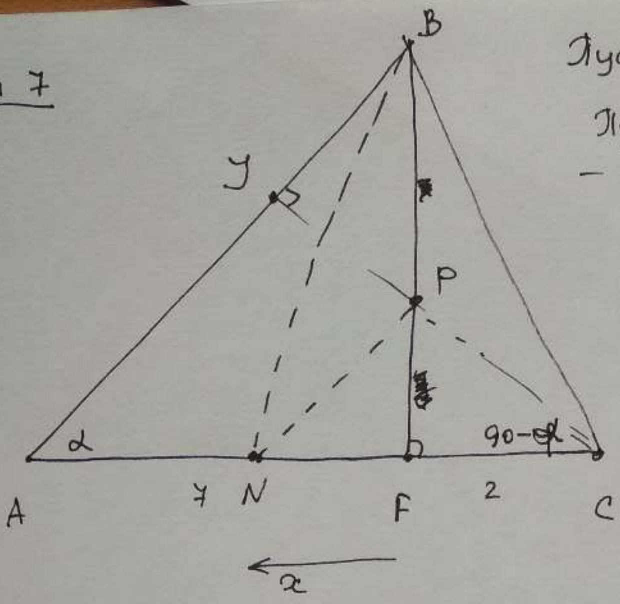
→ Если $a>0$, то $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a}\right)>0 \to -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a}\right)<0 \to$ расстояние между $-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a}\right)$ и $\frac{\pi}{4}>\frac{\pi}{4} \to S>\frac{\pi}{4}$

→ Если $a<0$, то $\operatorname{arctg}(2a)<0 \to$ расстояние между $\operatorname{arctg}(2a)$ и $\frac{\pi}{4}>\frac{\pi}{4} \to$ $S>\frac{\pi}{4}$

То есть при $a\neq 0$ $S>\frac{\pi}{4}$. А мы знаем, что при $a=0$ $S=\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\boxed{a=0 \text{ и } S=\frac{\pi}{4} \text{ — ответ}}$

Задача 7



Пусть $BP = x$, а $PF = y$.

Пусть CY - высота из C на AB.

$\Delta PFC \sim \Delta PYB$ по 2 углам (2 по $90°$ и $\angle BPY = \angle CPF$ как вертикальные)

$$\frac{BP}{CP} = \frac{BY}{CF} = \frac{PY}{PF} \to$$

$$\frac{x}{\sqrt{4+y^2}} = \frac{BY}{2} = \frac{PY}{y} \to$$

из т. Пифагора

$$BY = \frac{2x}{\sqrt{4+y^2}}\ ;\ PY = \frac{yx}{\sqrt{4+y^2}} \to CY = \sqrt{4+y^2} + \frac{yx}{\sqrt{4+y^2}}$$

теор. Пифагора

$$AB^2 = (x+y)^2 + 49 = (AY + BY)^2 \Rightarrow (4+y^2)\left((x+y)^2 + 49\right) = \left(2x + \sqrt{81(4+y^2) - (4+y^2+yx)^2}\right)^2$$

из теоремы Пифагора

$$AY = \sqrt{81 - \left(\sqrt{4+y^2} + \frac{yx}{\sqrt{4+y^2}}\right)^2}, \quad BY = \frac{2x}{\sqrt{4+y^2}}$$

~~Пусть $\angle ACP = \varphi$.~~ Тогда $PF = 2\operatorname{tg}\varphi$

Пусть $\angle YAC = \alpha$. Тогда $\angle ACY = 90° - \alpha \to PF = 2\operatorname{ctg}\alpha$, а $BF = 7\operatorname{tg}\alpha$

~~Пусть $FN = x$ (направленная) (если $N \in$ отрезку AF, то $x > 0$, иначе < 0)~~.

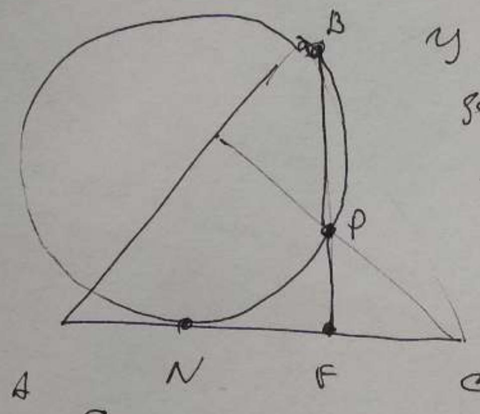
По теореме синусов для ΔBNP $\dfrac{BP}{\sin\angle BNP} = 2R$ ← радиус описанной вокруг BNP окр-сти → при максимальном угле (он $< 90°$), когда $\sin$ угла $= \max$, $R = \min$

$\angle BNP < 90°$, иначе, по теореме о внешнем угле $\angle NPF > 90° \to$ $N \notin AC$, что неверно

То есть $N \in$ окр-сти минимального радиуса, проходящей через BP и отрезок AC. ~~Радиус так~~ Центр такой окр-сти $\in$ сер. перп. к $BP \to$ удалён от AC на $PF + \dfrac{PB}{2}$. Чтобы пересечение с AC было, $R \geq PF + \dfrac{PB}{2}$. Т.к. $R = \min$, то $R = \dfrac{PF+PB}{2}$ и мы наблюдаем касание.

Задача 7 Продолжение

Это так, если касание на отрезке AC (другой случай потом рассмотрим).



У нас $\exists$ 2 окр-сти, подходящие. Одна даёт N „слева" от F, другая „справа".

Так как из симметрии они дают равные (и равные углы) отрезки, то можем всегда рассматривать слева: Там тем более $N \in$ отрезку AC, т.к. $AF > FC$. (если принадлежала раньше)

Степень точки F отн. окр-сти $= FN^2 = FP \cdot FB =$

$= 2\operatorname{ctg}\alpha \cdot 7\operatorname{tg}\alpha = 14 \Rightarrow FN = \sqrt{14} < 7$. Значит, случай, когда минимальный радиус давал точку не на отрезке AC, можно не рассматривать.

$\boxed{\text{Ответ: } FN = \sqrt{14}}$

Черновик

$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+$ 4 $\sum\limits_{1\le a\le 44}\frac{(2a+1)}{a(a+1)}$

19

19 • 5 = 95

23×4 = 92

5

23 · 2 = 46

23×n ≠ 5

23 • 3 = 69

19 • 3 = 57

$\frac{(2a+1)\cdot(a-1)!}{45!}$

$\frac{2a+1}{a(a+1)}=\frac{2+\frac{1}{a}}{a+1}$

$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}$ 3^3

$\frac{\frac{2(a+1)+1}{(a+1)(a+2)}}{\frac{2a+2a+1}{(a+1)a}}=\frac{a}{a+2}\cdot\frac{2a+3}{2a+1}=\frac{2a^2+3a}{2a^2+5a+2}=1-\frac{2a+2}{2a^2+5a+2}=$

$\frac{7}{(3\cdot 4)^2}=\frac{7}{144}$

$\frac{32}{36}=-\frac{2a+3}{(a+1)(a+2)}+\frac{2a+1}{(a+1)a}=\frac{-2a^2-3a+2a^2+5a+2}{(a+1)(a+2)a}=$

$=\frac{2a+2}{(a+1)(a+2)a}=\frac{2}{(a+2)(a)}$

$\sqrt{a(a+2)}<\frac{a+1}{2}$

$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$

19238

$\frac{2}{a(a+2)}>\frac{2}{(a+1)^2}$

$\frac{2a+1}{a(a+1)}$

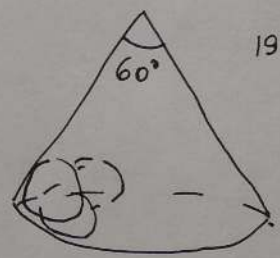
1 9 5 7 6

2020-е : 6

2020 = 505·4

$(1-x^9)=(1-x^9)^{-1/9}$

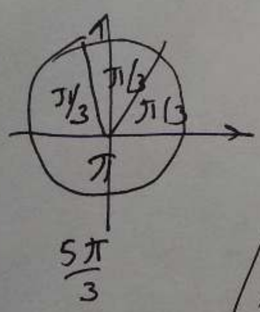
19 шаров радиуса 3

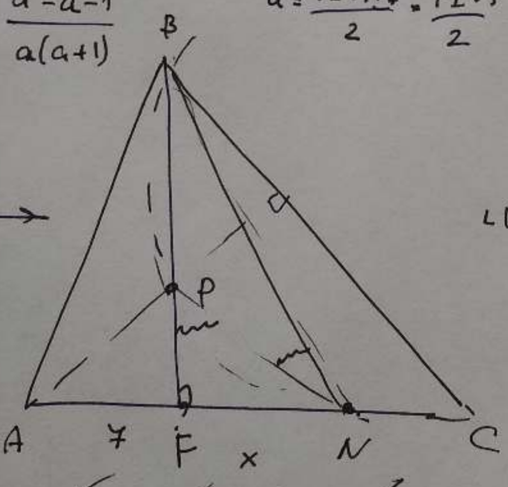


$a^2-a-1=0$

$a=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$1-\frac{2a+1}{a^2+a}=\frac{a^2-a-1}{a(a+1)}$





$\sin\angle BNP=max \Rightarrow R(BPN)=max$

∠BNP - максимален

FN - ?

AF = 7

FC = 2

$a=\frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{4}$

$\cancel{a}+1-a-\cancel{2a^2}+\cancel{2a^2}-\cancel{2a}-1+\cancel{2a}$

$\frac{2a+1}{a(a+1)}+\frac{2a+3}{(a+1)(a+2)}=\frac{2a^2+3a+2a^2+5a+2}{a(a+1)(a+2)}=\frac{4a^2+8a+2}{a(a+1)(a+2)}=\frac{2(2a^2+4a+1)}{a(a+1)(a+2)}$

Черновик

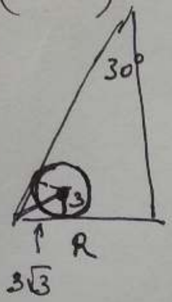
$\frac{3}{4} > \frac{16}{27}$

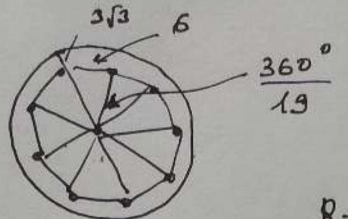
$\cancel{1-x^9} = ($ $\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{\sqrt[9]{-x^9}} = -$ $\sqrt[9]{1-\frac{1}{x^9}}$

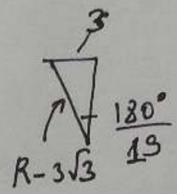
$\frac{2a+1}{a^2(a+1)^2}$

$\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x^9}}} = \sqrt[9]{\frac{-\frac{1}{x^9}}{1-\frac{1}{x^9}}} =$

$\frac{2a+1}{\left(\frac{2a+1}{2}\right)^4} = \frac{16}{(2a+1)^3}$ $= \sqrt[9]{\frac{-1}{x^9-1}}$





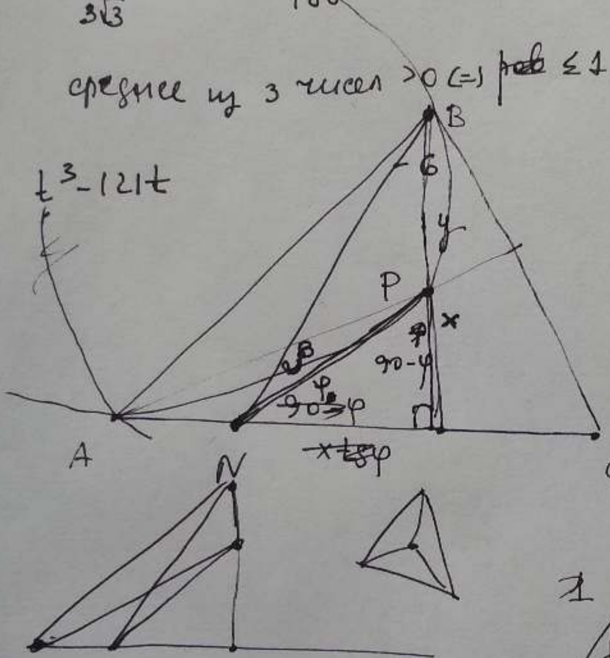


$R - 3\sqrt{3} = \frac{3}{\sin\left(\frac{180^\circ}{19}\right)}$

среднее из 3 чисел $>0 \Leftrightarrow$ ≤ 1 число ≤ 0

$t^3 - 121t$

$\angle BNP - max$



$\frac{x+y}{tg(\beta+\varphi)} = \frac{x}{tg\varphi} \Rightarrow$

$\downarrow max$

$\frac{2a+1}{a^2(a+1)^2} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a}$

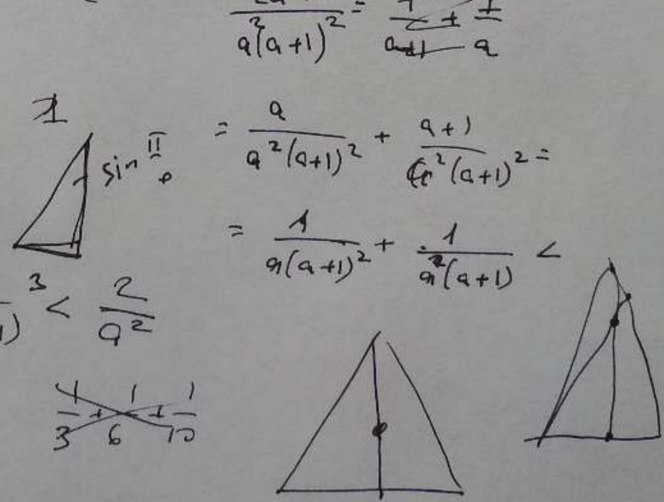
$= \frac{a}{a^2(a+1)^2} + \frac{a+1}{a^2(a+1)^2} =$

$= \frac{1}{a(a+1)^2} + \frac{1}{a^2(a+1)} <$

$\frac{2}{3} + \frac{2}{3\cdot4} + \frac{2}{4\cdot5} + \dots$

$\frac{2}{2a(a+1)}^3 < \frac{2}{a^2}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$

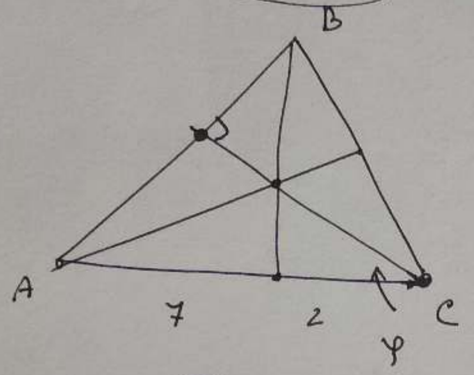


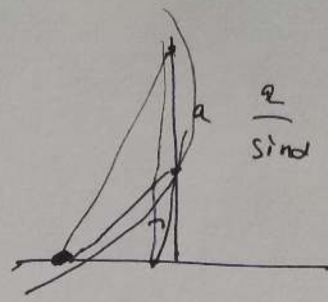
$\frac{(2a+3)\,a^2}{(a+2)^2\,(2a+1)} = \frac{2a^3+3a^2}{2a^3+a^2+8a^2+4a+8a+4} < \frac{2a^3+3a^2}{2a^3+9a^2} = \frac{2a+3}{2a+9}$

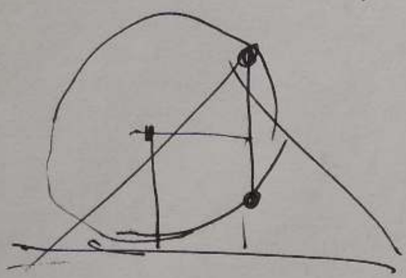
a^2+4a+4

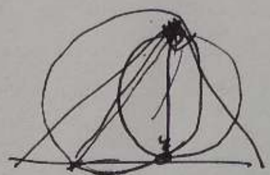
$2a^3+9a^2+12a+4$

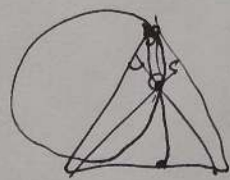
Черновик











$(a+2)^2 = a^2+4a+4$

$\cancel{2(a}\ \frac{2a+3}{(a+1)^2(a+2)^2} - \frac{2a+1}{(a+1)^2 a^2} = \frac{2a^3+3a^2-\cancel{2a^3}-9a^2-4-12a}{a^2(a+1)^2(a+2)^2} =$

$(a^2+4a+4)(2a+1) =$
$= 2a^3+9a^2+4$
$+12a$

$= -\frac{6a^2+12a+4}{a^2(a+1)^2(a+2)^2} = -2\frac{3a^2+6a+2}{a^2(a+1)^2(a+2)^2}$

$3a^2+6a+2=0$ $\quad a = \frac{-6\pm\sqrt{36-24}}{}$

$\cancel{a = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{}}$

$\frac{2a+1}{a^4+2a^3+a^2}$ $\quad (a+1)^4-a^4$

$(a+1)^4 = .$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$\frac{3}{4} = 1-\frac{1}{4}$

$\frac{5}{36} = 1-3$ $\quad \frac{3}{4}\ \ \frac{5}{36}\ \ \frac{7}{144}$

$a_i = b_i - b_{i-1}$

$1-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}-\frac{1}{9} \quad \frac{1}{9}-\frac{1}{16}$

9.16

$a_1 = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$

$a_1 =$