**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Латыпов Анвар Рустамович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

**Результаты проверки:**

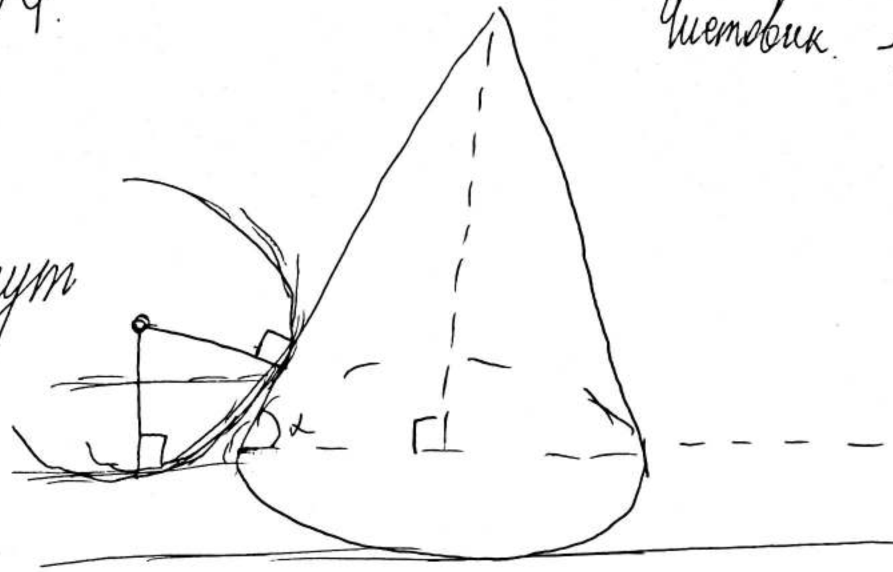
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | 15 | 15 | 15 | 0 | 10 | 10 | 15 |

№4.

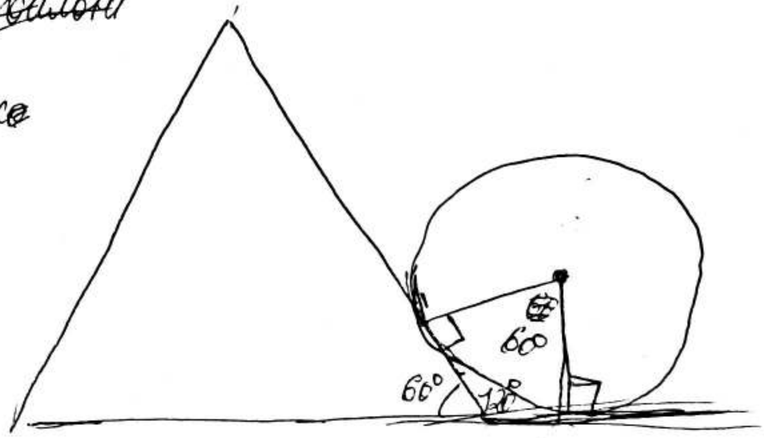
Чистовик 1

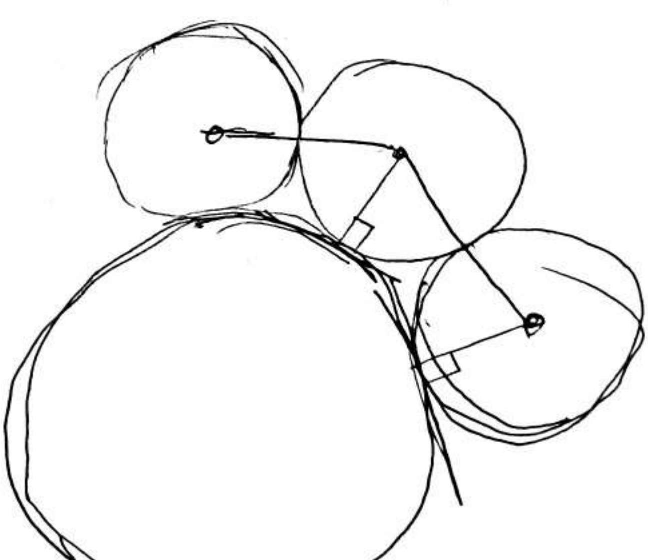
Дано: $\alpha = 60^\circ$

Решение: Шары могут касаться и основа




Шары образовывают ~~правильн~~ шестнадцати угольнико



№6. Чистовик 2 Все $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$:

$$a\,tg^3x+(2-a-a^2)tg^2x+(a^2-2a-2)tg\,x+2a=0$$

$$(tg\,x-a)(tg\,x-1)(a\,tg\,x+2)=0$$

1сл) $a=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\cancel{\pi k, k\in Z} \\ x=0+\cancel{\pi k, k\in Z} \end{array}\right.$$

т.к. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то ~~р~~ расстояние $\frac{\pi}{4}$.

2сл) $a\neq 0$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{x=\frac{\pi}{4}} \\ \cancel{x=arctg\,a} \\ \cancel{x=arctg\left(-\frac{2}{a}\right)} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} tg\,x=1 \\ tg\,x=-\frac{2}{a} \\ tg\,x=a \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z \\ x=arctg\left(-\frac{2}{a}\right)+\pi k, k\in Z \\ x=arctg(a)+\pi k, k\in Z \end{array}\right.$$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Заметим, что $arctg\,-\frac{2}{a}$ и $arctg\,a$ ~~при~~ ~~приближении~~ ~~одного~~ расстояние между ними $\geq \frac{\pi}{4}$, ~~...~~, а max расстояние до $\frac{\pi}{4}$ ~~от~~ среди ст каждого ~~его~~ тоже $\geq \frac{\pi}{4}$. Т.е $\frac{\pi}{4}$ – наименьшее.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

№5. Чистовик. 3

Заданные условия говорят по сути, что хотя бы 2 числа из $a, b, c$ должны быть $>0$.

1сл.) $a, b > 0$. $\begin{cases} t^3-81t>0 \\ 11^t-121>0 \end{cases}$ $\begin{cases} t \in (-9;0) \cup (9;\infty) \\ t>2 \end{cases}$ $t>9$.

2сл) $b, c > 0$. $\begin{cases} 11^t-121>0 \\ \sin t - \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t>2. \\ t \in (\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k / k \in Z). \end{cases}$

$(2; \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{6}+2\pi l; \frac{5\pi}{6}+2\pi l / l \in Z$

$l \geq 1)$.

3сл) $a, c > 0$. $\begin{cases} t^3-81t>0 \\ \sin t - \frac{1}{2} > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} t \in (-9;0) \cup (9;\infty). \\ t \in (\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k / k \in Z) \end{cases}$

$\cancel{(2; \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{}}$

$\frac{5\pi}{6}+2\pi k < 9$. $\frac{5}{6}\pi + 2\pi \approx 8{,}9$.

$(\frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k / k \in Z, k \geq 2)$.

Объединение: $(2; \frac{5\pi}{6}) \cup (2\frac{1}{6}\pi; 2\frac{5}{6}\pi) \cup (9; \infty)$.

Ответ: $(2; \frac{5\pi}{6}) \cup (2\frac{1}{6}\pi; 2\frac{5}{6}\pi) \cup (9; \infty)$.

Чистовик 4.

№1.

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=1.$$

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$B=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\ldots+\frac{79}{(39\cdot40)^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\ldots-\frac{1}{39^2}+\frac{1}{39^2}-\frac{1}{40^2}=$$

$$=1-\frac{1}{40^2}\qquad 1>1-\frac{1}{40^2}, \text{ т.е } A>B.$$

Ответ: A больше B.

№2.

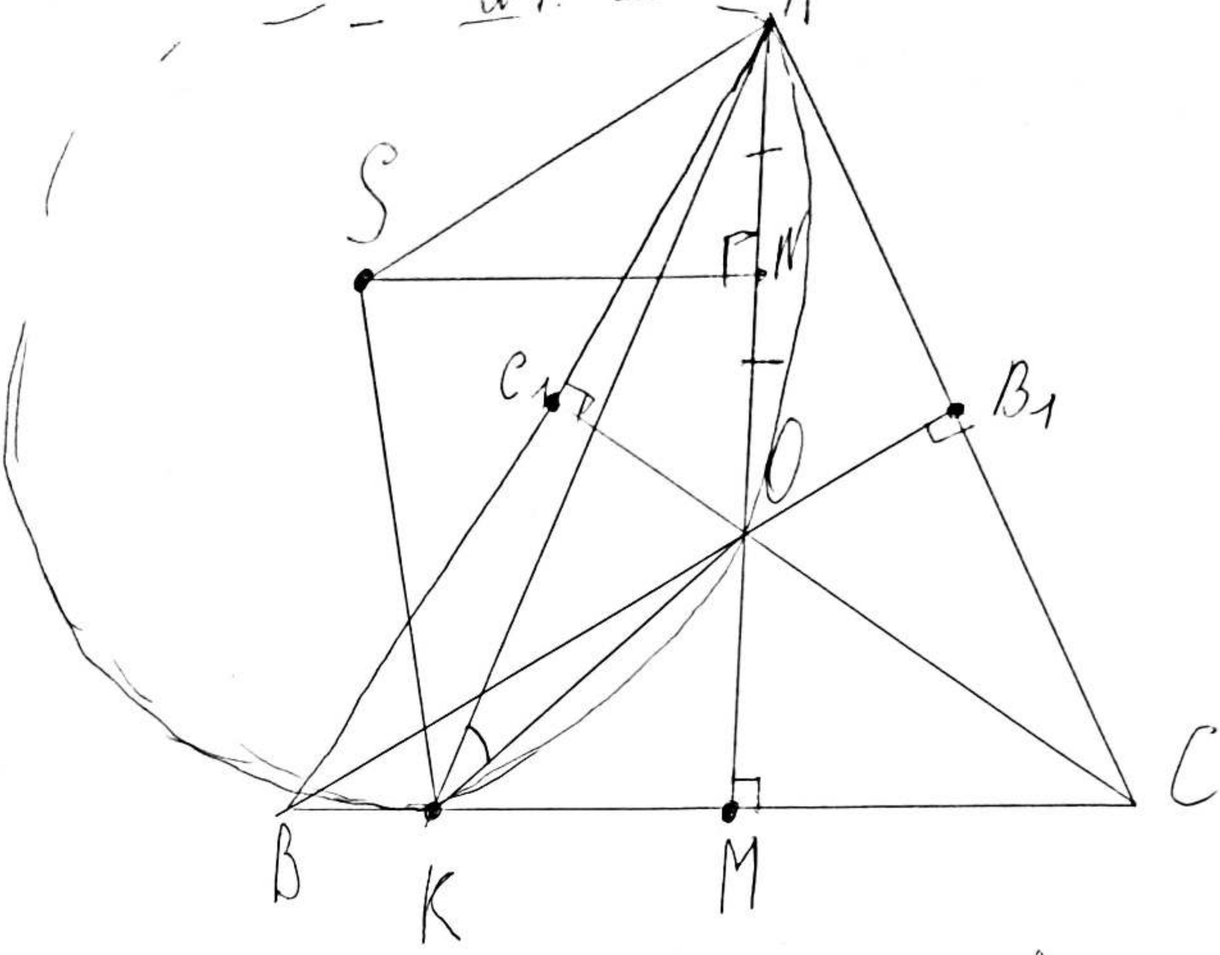
| | | |
|---|---|---|
| | 19 | 23. |
| 1 | 19 | 23. |
| 2 | 38 | 46 |
| 3 | 57 | 69 |
| 4 | 76 | 92 |
| 5 | 95 | 115. |

Из таблицы составляется два варианта: 4695769...
либо 469238, но во втором варианте после 8 нет больше, т.к в таблице таких начинающихся на 8 чисел нет (двузн.). Т.е. идёт вариант 4695769576 9.... по 4 цифры. В конце останется ~~10~~ 4 цифры. и пойдёт либо 6923, либо 6957. Т.е последняя цифра или 7 или 3.

Ответ: 7 или 3.

Чистовик 5

№7.




Рассмотрим окружность описанную ~~возле~~ около $\triangle AKO$. Её центр $S$ лежит на сер. перпендикуляре $SN$ отрезка $AO$. Т.к. $AO \perp BC$, то $SN \parallel BC$. Пусть радиус окружности равен $R$. Тогда $\frac{AO}{\sin\angle AKO} = 2R$. $\sin\angle AKO = \frac{AO}{2R}$, Т.к. $y = \sin x$ возрастает на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\angle AKO$ максимален $\iff$ $R$ — минимальна, то есть тогда рассматриваем окружность касается $BC$ (ввиду $SN \parallel BC$).

Участник 6

Пусть $AM = h$.

Тогда $tg\angle MAB = \frac{5}{h}$, $tg\angle MAC = \frac{3}{h}$.

$$tg\angle BAC = tg(\angle MAB + \angle MAC) = \frac{\frac{5}{h}+\frac{3}{h}}{1-\frac{5}{h}\cdot\frac{3}{h}} =$$

$$= \frac{8h}{h^2-15}.$$ Известно, что $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$.

$k = \cos\angle A$.

Тогда $\tilde{R}$ – радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, то $\frac{BC}{\sin\angle A} = 2\tilde{R}$ $AO = 2\tilde{R}\cdot\cos\angle A =$

$$= \frac{BC}{tg\angle A} = \frac{8}{\left(\frac{8h}{h^2-15}\right)} = \frac{h^2-15}{h}.$$

$SO = SK$, т.к радиусы окружностей $(AKO)$.

$$SO^2 = SN^2 + NO^2 = KM^2 + \left(\frac{AO}{2}\right)^2.$$

$$SK = AM - \frac{AO}{2}$$

Тогда $KM^2 + \left(\frac{AO}{2}\right)^2 = \left(AM - \frac{AO}{2}\right)^2$ $KM^2 + \left(\frac{AO}{2}\right)^2 = AM^2 - AM\cdot AO + \left(AO\cdot\frac{1}{2}\right)^2$.

$$KM^2 = AM^2 - AM\cdot AO = h^2 - h\,\frac{h^2-15}{h} = 15.$$

$$KM = \sqrt{15}.$$

Ответ: $\sqrt{15}$!

№3. Чистовик.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[11]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}\right)^{11}}}=\frac{1}{\sqrt[11]{1-\frac{1}{1-x^{11}}}}=-\frac{\sqrt[11]{1-x^{11}}}{x}$$

$$f(f(f(x)))=-\frac{\sqrt[11]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}\right)^{11}}}{x}=\cancel{\ldots}=\cancel{\ldots}\,x.$$

$$f(f(f(x)))=f(x).$$

$$\underbrace{f(f(\ldots f(2022)\ldots))}_{1306 \,\vdots\, 3 \; 1}=f(2022)=\cancel{-\frac{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}{2022}}\;\frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$$

Ответ: $\cancel{-\frac{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}{2022}}\;\frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$

т.е нужно найти когда ~~либо~~ все 3 числа положительные или
~~или~~ 2 числа положительные, а 1 неположительное. Черновик № 8

3,14.

а) $t\in(-9;0)\cup(9;\infty)$.

б) $t\in(2;\infty)$.

в) $t\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k \mid k\in Z\right)$. $\frac{\pi}{6}+2\pi k>9$.

1сл.) Когда все 3 положительные. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k \mid k\in Z, k\geq 2\right)$, все 3 положительные

2сл) Когда 2 положительные, 1 ~~не отр~~ неполож.

2а) ~~a<0~~ $b,c>0$.

т.е

$\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k \mid k\in Z, k\geq 1\right)$.

Достаточно когда 2 положительные

2б) $a,c>0$.

2в) $a,b>0$

$(9;\infty)$.

$\left(-1\frac{5}{6}\pi;-1\frac{1}{6}\pi\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5}{6}\pi+2\pi k \mid k\in Z, k\geq 2\right)$

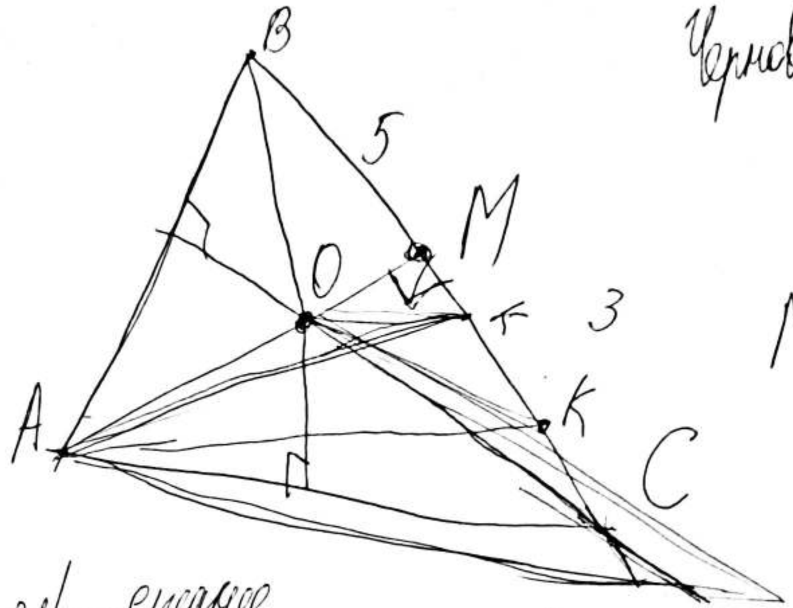
$\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{7}{6}\pi=-1\frac{1}{6}\pi$

$\frac{\pi}{6}-2\pi=-1\frac{5}{6}\pi=-\frac{11}{6}\pi$

$\frac{5\cdot 3{,}14}{6}+6{,}28$ $\frac{5}{6}\pi\approx 2{,}5$

$15{,}7 : 6 = 2{,}6$; $15{,}7-12=3{,}7$

Черновик 9




$MK = 5.$

1а) $a = t^3 - 81t$ — среднее.

1а) $b \le a \le c$.

$11^t - 121 \le \underbrace{t^3 - 81t}_{\ge 0} \le \sin t - \frac{1}{2}.$

$11^t - 121 \le t^3 - 81t.$

а) $t^3 - 81t = 0.$

$t(t^2 - 81) = 0$

$t(t-9)(t+9) = 0.$

$t \in (-9; 0) \cup (9; \infty)$ $\left[\begin{array}{l} t = -9 \\ t = 0 \\ t = 9 \end{array}\right.$

$-9 \quad 0 \quad 9$

$- \quad + \quad - \quad +$

б) $11^t - 121 = 0.$

$11^t - 11^2 = 0.$

$t \in (2; \infty)$ $t = 2.$

$2$

$- \quad +$

в) $\sin t - \frac{1}{2} = 0.$

$\sin t = \frac{1}{2}.$

$t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right)$ $\left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

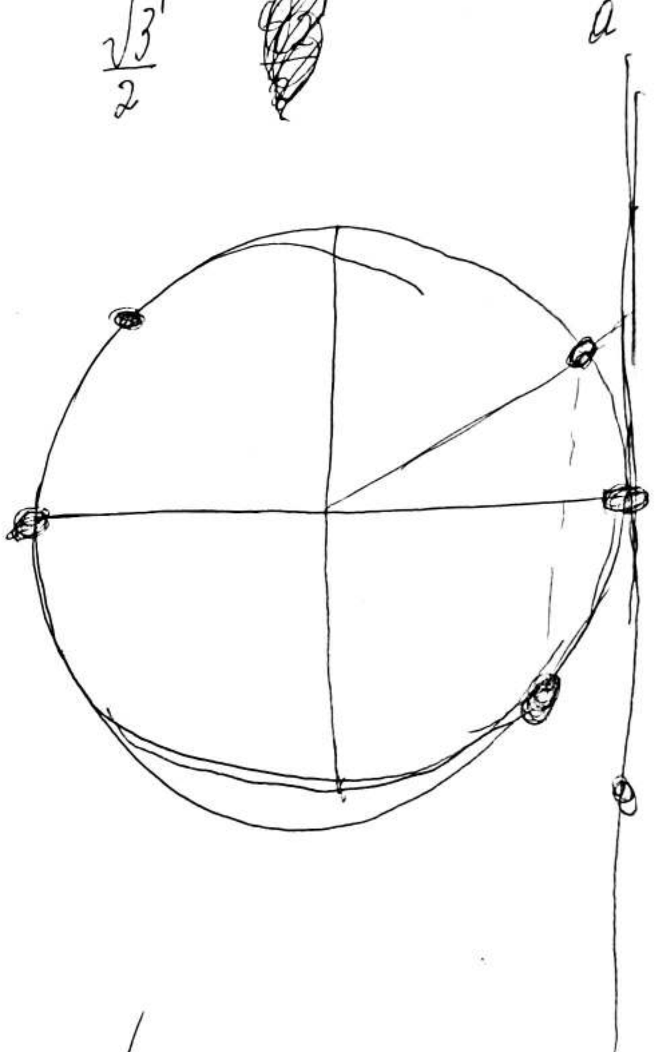
Чорновик 10

2е1) $a \neq 0.$

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=a. \\ t=-\frac{2}{a}. \end{array}\right. \qquad x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]. \quad \left[\begin{array}{l} tg\,x=1 \\ tg\,\cancel{x}=a. \\ tg\,x=-\frac{2}{a}. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4} \\ x=\operatorname{arctg} a. \\ x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{a}\right) \end{array}\right.$$

$\sqrt{2}$ $\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\sqrt{2}.$




$f(f(f(x)))=$

$1$

Nб.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}} \qquad f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[11]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}\right)^{11}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[11]{1-\frac{1}{1-x^{11}}}}=\frac{1}{\sqrt[11]{\frac{-x^{11}}{1-x^{11}}}}=\frac{\sqrt{1-x^{11}}}{-}$$

№6. Черновик-11

$a\,tg^3x+(2-a-a^2)tg^2x+(a^2-2a-2)\,tgx+2a=0.$

$at^3+(2-a-a^2)t^2+(a^2-2a-2)t+2a=0.$ $tgx=t.$

$t=1.$

$\cancel{a}+\cancel{2}-\cancel{a}-\cancel{a^2}+\cancel{a^2}-\cancel{2a}-\cancel{2}+\cancel{2a}=0.$

$t=1$ - корень.

$$\begin{array}{l|l} at^3+(2-a-a^2)t^2+(a^2-2a-2)t+2a & t-1 \\ \hline -\;at^3-at^2 & at^2+(2-a^2)t-2a \\ \hline (2-a^2)t^2+(a^2-2a-2)t+2a & \\ -\;(2-a^2)t^2-(2-a^2)t & \\ \hline -2at+2a & \\ -\;-2at+2a & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$(t-1)(at^2+(2-a^2)t-2a)=0.$

$(t-1)(t-a)(at+2)=0.$ $at^2+(2-a^2)t-2a\overset{t=a}{=}a^3+2a-a^3-2a=0.$

$$\begin{array}{l|l} at^2+(2-a^2)t-2a & t-a \\ \hline -\;at^2-a^2t & at+2 \\ \hline 2t-2a & \\ -\;2t-2a & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$a=0.$

$\left[\begin{array}{l} t=1. \\ t=0. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} tgx=1. \\ tgx=0. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z \\ x=0+\pi k,\ k\in Z \end{array}\right.$

Расстояние между $x_1$ и $x_2=\frac{\pi}{4}.$

№2. либо 19, либо 23. Черновик 12

4695769

| | | |
|---|---|---|
| | ~~38~~ | ~~46~~ |
| 1 | 19 | 23 |
| 2 | 38 | 46 |
| 3 | 57 | 69 |
| 4 | 76 | 92 |
| 5 | 95 | 115 |

$2021-1=2020:4 \Rightarrow$ последняя цифра это 7.

№3.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}$ $\quad f(2022)=\frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$

$f(f(x))=f(\ldots f(x)\ldots)$

~~четн~~ ~~нечет~~ $f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[11]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}\right)^{11}}}=$

$f(f(f(x)))=f(x)$

$= \frac{1}{\sqrt[11]{1-\frac{1}{1-x^{11}}}}=$

$\Longrightarrow -\frac{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}{2022}$

$f(2022)=$

$=\frac{1}{\sqrt[11]{\frac{1-x^{11}-1}{1-x^{11}}}}=$

$f(f(f(x)))=-\frac{\sqrt[11]{1-\left(\frac{1}{1-x^{11}}\right)^{11}}}{x}$ $\frac{1}{\sqrt[11]{\frac{-x^{11}}{1-x^{11}}}}=-\frac{\sqrt[11]{1-x^{11}}}{x}=$

$=-\frac{\sqrt[11]{\frac{1-x^{11}-1}{1-x^{11}}}}{x}=\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}$

№1

Черновик. 13.

$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$= \frac{\sqrt[6]{3+2\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1.$

$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{77}{(38\cdot 39)^2} + \frac{79}{(39\cdot 40)^2} =$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \ldots - \frac{1}{39^2} + \frac{1}{39^2} - \frac{1}{40^2} =$

$\frac{x+y}{x^2y^2} = \frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y}$

$= 1 - \frac{1}{40^2}$

$f(f(f(x))) = f(x)$

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 2^2}$

$f(f(x)) = x$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$1 > 1 - \frac{1}{40^2},$

т. е. $A > B$.

$\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \boxed{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}} =$

$= \frac{x^2+2x+1-x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$