МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Лисок Никита Александрович**

Класс: **7 класс**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6
Оценка	15	10	5	15	20	0

Чистовик 1

Задача 1. Пусть А поделил x, Б – y, В – z.

Тогда $x+y=\cancel{2020}220$, $x+z=240$, $y+z=250$.

$x=x+y+z-y+z=(x+y+z)-250$, $y=(x+y+z)-240$ (аналогично)

$z=x+y+z-(x+y)=x+y+z-220$. И тогда $x<y<z$.

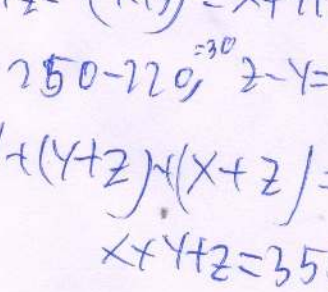
($z-x=250-220=30$, $z-y=250-240=10$). И требуется найти z. $(x+y)+(y+z)+(x+z)=2(x+y+z)=\cancel{20}\ 220+250+240=460+250=710$. $x+y+z=355$. $\cancel{x+}\ z=355-220=135$. ~~значит~~.

Ответ: 135кг.

~~Задача 3~~

~~Ответ: да.~~

~~Пример:~~

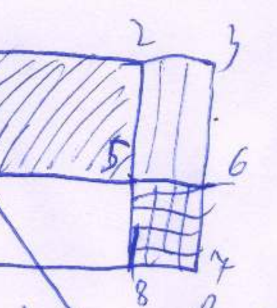


~~прямоугольники с вершинами (1,3,7,9); (1,2,5,4); (2,3,6,5); (5,6,7,8). Здесь видно что у всех есть одна вершина друг с другом, а одной у всех 4 нет, ведь тогда она входит во все 4 группы, а это не так.~~

Задача 3

Ответ: да

Пример:

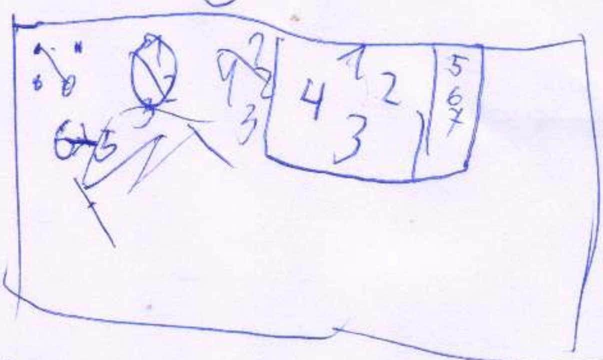


~~у в ве~~ их вершины (1,2,4,8); (9,10,11,8); (5,6,7,8); (2,3,5,10) пер. 1 и 2 группы (8) 1 и 3 (8), 2 и 3 (8), 2 и 4 (2), $\cancel{1}$ 2 и 4 (10), 3 и 4 (5) все подходит.

~~Черновик~~

Черновик

①



Задача 1

~~А А+Б~~ а+б А−x, Б−y, В−z.

$x+y=220; x+z=240, y+z=250.$

~~x+~~ сл. ~~все~~: $(x+y)+(x+z)+(y+z)=2x+2y+2z=220+240+250$

$\Rightarrow 2(x+y+z)=4710 \quad x+y+z=355.$

$(x+y+z)-(x+y)=\cancel{720}\,355-220=135=z.$

$(x+y+z)-(x+z)=y=355-240=115$

$(x+y+z)-(y+z)=x=105$ зм 135.

Ответ: 135

~~Задача 2.~~

~~$\frac{1}{2022}$ $x=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \Rightarrow$ $xy=2022y+2022x \Rightarrow$~~

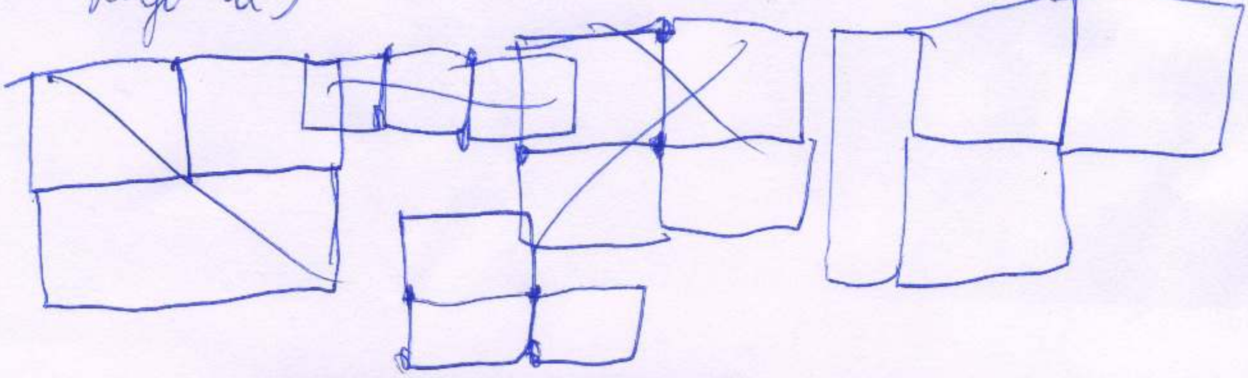
~~$xy=2022(x+y)$~~ ~~$x+y$~~

~~Задача 3~~ $2022(x+y)-xy=0$

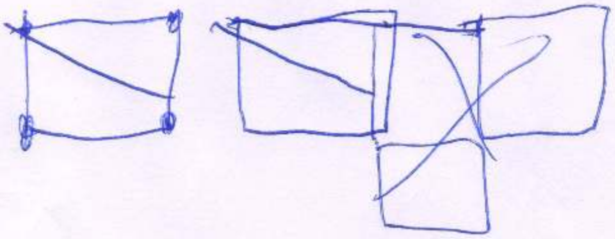
~~$(x+2022y)(y+2$~~ $(x-2022)(y-2022)=2022^2$

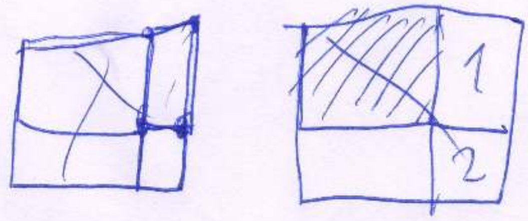
~~$(x+y)(2022+x+y)$~~ дел 2022 оф зм.

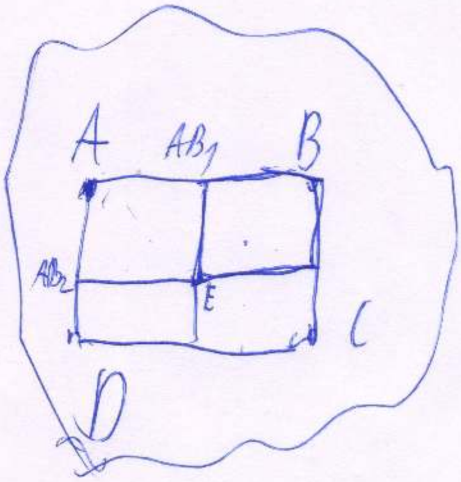
Задача 3



Черновик.







2) $\frac{1}{2022} = \frac{x+y}{xy} \Rightarrow \cancel{(x+y)x = 2022x}$

$2022(x+y) = xy = nL$

$n^2 - 2022Ln + 2022L = 0$

$\cancel{\frac{2022L \pm \sqrt{2022^2L^2 - 4L}}{2}}$

~~$0<x<2022$~~

~~$x>y$~~ $y>x$

~~$y<0$~~

$0<x<2022$

$0<x$

$x>2022$

$y>2022$

$\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

$y>x$

$x<0$ | $0<y<2022$

$x>2022$ | $y>2022$

~~$x+y<x$~~

$2022>y$

Черновик

$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$ ~~$x_1=1, x_2=1, x_3=-1, x_4=-1, x_5=-1$~~, $x_6=1, x_7=-1,$

~~$x_8=1, x$~~

1 2 3 4 5 6 7 8

$1, 1, -1, -1, -1, \boxed{1}, -1, 1, 1, -1$

$\vdots 7$ $2022 : 7 = 288$ (6)

Задача 5.

~~$(10a+11b+c)(10b+11c+d)(10c+11d+e)=157605$~~

$(\overline{ac}+\overline{bb})(\overline{bc}+\overline{cd}\ \overline{cc}+\overline{bd})(\overline{dd}+\overline{ce})$

$\overline{ab} \cdot 10^2$ ~~$\overline{ab}\cdot\overline{bc}+\overline{bc}^2+\overline{ab}\cdot\overline{cd}+\overline{bc}\cdot\overline{cd}$~~

$(x+y)2022 = xy$ $2022x+2022y-xy=0$

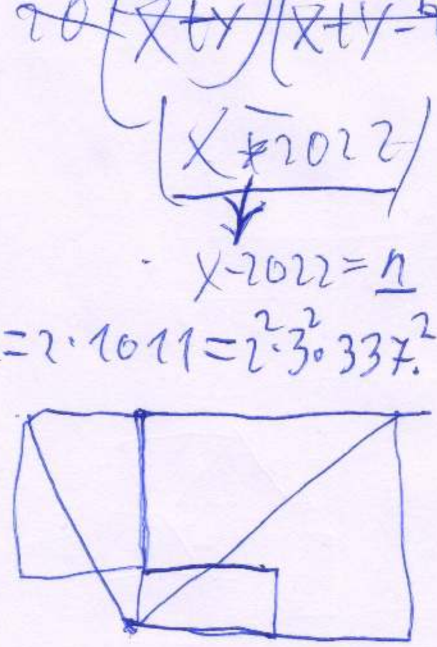
~~$x(2022-y)+2022y$~~ ~~$y(1011-x)$~~

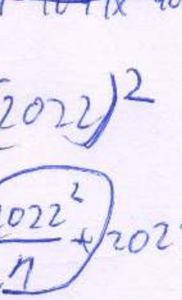
~~$20(x+y)(x+y-4044)$~~ ~~$x+1+xy-4044x-4044y+4044^2$~~

$(x-2022)(y-2022)=(2022)^2$

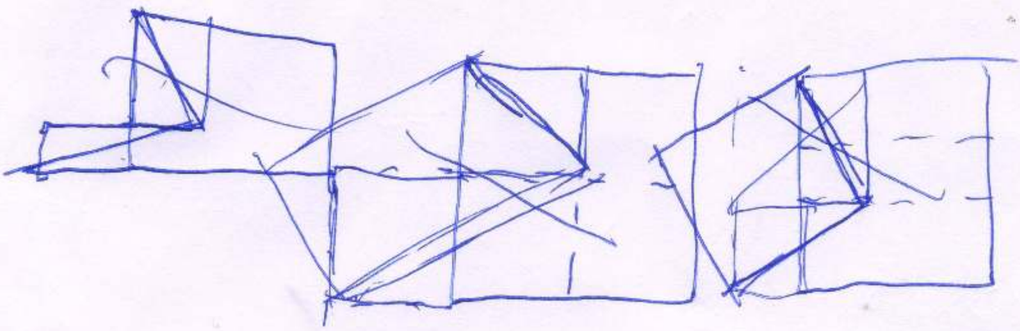
$x-2022=n$ $y-2022=\frac{2022^2}{n}+2022$

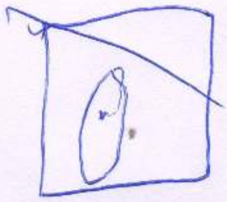
$2022=2\cdot1011=2^2\cdot3^2\cdot337^2$ $3\cdot3\cdot3=27$, 54.





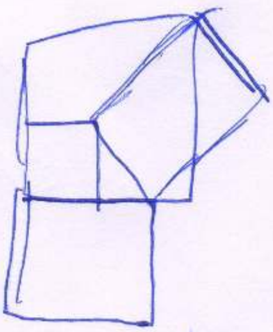
Черновик

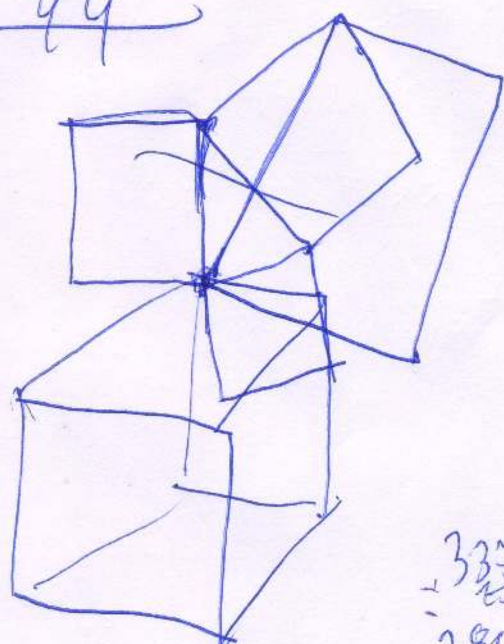




4 4 44

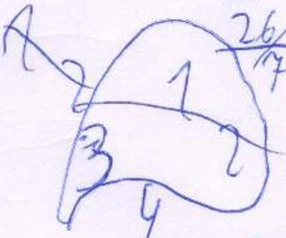
16





~~400-30-40~~

~~100-30-40~~



337 | 77

26

77

337 | 77

~~310~~ | 77

29·3=57

337 | 29

280

120

100-30-30=

00000

100-100-100=

1000000

5 2 6 3 7

1, 2, 3

4

50

1

2

3

11

~~60-506~~ 50·50·50

1000000 | 8

125000

Черновик ⑤

22436 12345

$\frac{21 \; 24 \; 43 \; 22 \; 23 \; 34}{14 \; 43 \; 36 \; 23 \; 34 \; 45}$

$3 \cdot 5 \cdot 57 \cdot 79 \; 35 \; 57 \; 79$

$(\cancel{100a+11b+c})(10b+11c+d)(\cancel{10c+11d+e})$

$10(a+b)+(b+c)$ $10(b+c)+(c+d)$

33 ~~33~~ 44 ~~33~~ 55

$35 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 79 \cdot 19$

$79 \cdot 19 =$

$79 \cdot 20 =$

$33 \cdot 44 \cdot 55 =$ $11 = 121$ $1331 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =$

$3991 \cdot 20 =$

~~39910 · 3~~

$10507 \cdot 3$

$31521 \cdot 5 =$

$1580 \cdot 79$

$1501 \cdot 7 =$

157605 | 5

31521

15 705

10000a+1000b+100c+10d+e

$\cancel{(a+b+c)}$

35 | 57 | 79

1501 | 17

102 | 18

48

34

12

136

141

$17 \cdot 4 =$

68

+42

102

$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1501$

$151 \cdot 7$

10507 | 7

1501

$17 \cdot 8 =$

80

+56

136

$19 \cdot 79$

1501 | 19

133 | 79

171

171

$19 \cdot 87 = 70 + 63 = 133$

$\boxed{10a+11b+c}$

b+c, c+d, d+e = 51

~~c+d = 265~~

$5(+(9) \Rightarrow$

10

57

35

$10(a+b)+(b+c))(10(b+c)+(c+d))(10(c+d)+d+e)$

6

Черновик

1 2 3 4

3, 2, 2, 2, 2,

5 7 6 3 2

1 2 4

$7 \cdot 4 = 28$ | 24

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1

3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1

21 22

12

1 2 4

24

3, 2, 2

1 2 3 4

5 7 6 2, 4, 1

1, 4, 4, 2

3, 6, 7

1 2 3 4

6 5 7

6/7 6/7

3

2/3

6/7 1

2/3

Чистовик (1)

Задача 4.

Несложно заметить что x_n зависит только от 3-х чисел до неё (если они определены) след. у. опять от 3 и тогда если какая-то 3 попалась 2 раз то получится период с 1 такой же 3 до этой (не об. он начн., но его хватит) и 3 конечное число везд изн. только 1 и -1, а т. любых 2 из них (возможно повторное использование каждого) опять 1 или -1 зн. 3 всего (различных и возм.) $2^3 = 8$ и значит не более чем через 9 шагов т. мы его найдём (* сзади объяснение перебора) $x_4 = x_3 \cdot x_1 = -1$, $x_5 = x_4 \cdot x_2 = -1$, $x_6 = x_5 \cdot x_3 = 1$, $x_7 = x_6 \cdot x_4 = -1$, $x_8 = x_7 \cdot x_5 = 1$, $x_9 = x_8 \cdot x_6 = 1$, $x_{10} = x_9 \cdot x_6 = -1$ опять встретилась тройка $1, 1, -1$ изн. она же x_1, x_2 и x_3, а далее x_8, x_9, x_{10} $x_1 = x_8$, $x_2 = x_9$, $x_3 = x_{10}$ это будет ~~по~~ ~~опят~~ повторяться, а опять индекс будет менятся на сколько и сейчас то-е следущая тройка $1, 1, -1$. на $x_{8+7}, x_{9+7}, x_{10+7}$ и т.д. Заметим что тогда период длинея 7 и ~~7~~ 7 подряд x можно убрать

А7 Чистовик ③

доп к 4

Так будем ~~делать~~ после и операции (если убирать с начала (первые 7)) ~~индексация~~ всех остальных уменьшится на 7. будем так делать пока x_{2022} не попадёт в первую 7 (можно см. что $x_{2022}=x_{2022-7z}$ где z-целое и найти когда $2022-z$ не будет от 1 до 7 вкл) удров 288 тро. семёрок x_{2022} станет $x_{2022-288\cdot 7}=x_{2022-2016}=x_6=1$ (уже x_6 определён) а тогда $x_{2022}=1$.

Ответ: 1.

Задача 2.

умножим неравенство на 2022, x и y ($x\neq 0, y\neq 0$ ведь иначе $\frac{1}{0}$-не определён ~~x=0 или y=0 разберём в конце~~) получим

$xy=2022x+2022y.\Rightarrow 2022x+2022y-xy=0$ $(x-2022)(y-2022)=xy-2022x-2022y+2022^2$, а $xy-2022x-2022y=0$ зн. $(x-2022)(y-2022)=2022^2$. $x-2022$ и $y-2022$ целые зн. они дел. 2022^2 (по модулю) и у них одинаковые знаки. Если $x=n$, то $y=\frac{2022^2}{n-2022}$ что опред. однозначно, значит ищем все подходящие x или $x-2022$ ведь также определяется однозначно (и x четно всегда =), и для разн x разные y (если подходят)) тогда ~~x-2022~~ нужно найти сколько подходящих $x-2022$, а это сколько делителей $>0\cdot 2$ ведь отри<0 тоже ~~под~~

Чистовик

8 4

доп к 2

[Если ~~2022-1~~ $x-2022$ дел 2022^2 то ~~1-2022~~-целый и их пара под ч при таких ед. а у всех е́стых.] подходят.

2022 разложим на простые множители

$2022=2\cdot3\cdot337$. $2022^2=2^2\cdot3^2\cdot337^2$ все делители это набор из 2, 3, 337 и разл. количество хотя бы одного числа. (они простые) а значит

делителей $3\cdot3\cdot3=27$. (>0, ~~3 способ~~

кол-во 2 двоек: 0, 1 или 2 то. е 3 способа и а аналогично, а когда всех по 0, а $x-2022=1$) и значит всего под. $x-2022$, а это = ответу на задачу $27\cdot2=54$.

Ответ: 54

Чистовик

(5)

Задача 5. Разложим 157605 на простые.

157605:5=31521. 31521:3=10507. 10507:7=1501.

$$\begin{array}{r|l} 157605 & 5 \\ \hline -15 & 31521 \\ 7 \\ -5 \\ 26 \\ -25 \\ 10 \\ -10 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 31521 & 3 \\ \hline -3 & 10507 \\ 15 \\ -15 \\ 021 \\ -21 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10507 & 7 \\ \hline -7 & 1501 \\ 35 \\ -35 \\ 007 \\ -7 \\ 0 \end{array}$$

~~то~~ то 1501=19·79. 157605=3·5·7·19·79. сумма в любых двух сводках >10 и <1000 ~~зн однозн~~ зн. или двузначна или трёхзначна почти, но тогда <100 (2 слагаемых <100) и в любой множитель ~~это какого из этих~~ произведения некоторых ~~простых~~ этих простых, и каждое макс у одного (равных нет)

79 не с кем много или 79·3 что >70·3=210.

зн. в одна сводка ~~170~~ 79, а две другие из 3, 5, 7, 19. с 19 макс одно число зн.

или 19 и 3·5·7 или с 19 ещё другие например 15 и 7·19, 21 и 19·5 и 35 и 19·3.

но а пусть. любую сводку она вида $\overline{xy}+\overline{yz}$ где x и y>0 и различны ($\in N$) тогда в ней минимум 2 ~~...~~ 19, 15 и 21 невозможны ~~зн. или~~ 19 и 19 с 3, 5 с 7 получим одна 57, вт другая 35 третья 79. (или не с д+е=11 это вообще, но тогда с=д попт. в сводках)

Чистовик. ⑥

доп к 5

каждая скобка вида $10x+11y+z$ ($\overline{xy}+\overline{yz}$)

Одна из них $=35$. и тогда у неё

$y+z=5$, ~~15~~ ($10:5$, $10x+10y:5$, зн $y+z:5$, и $y+z\le 2$ также,

но если $=15$ то каждое мин 6, но $10y$ уже >35

зн $y+z=5$) если это 1 скобка то $b+c=~~4~~5$

и в след. $10(b+c)+(c+d)=~~10~~50+(c+d)$, а это

только 59 ан. когда вторая $d+e=~~9~~7$

(также $50+d+e$, а значит $d+e+50=5~~9~~7$)

~~а~~, но ~~во~~ ~~раз~~ если $c+d=~~9~~ 7$, то в след

$=79$ (оставшейся) и тогда $~~10(c+d)<80,4~~$

$10(c+d)=~~40~~70$ P.S. ~~прот~~. при второй скобке $2=35$, ~~а~~ третья $=$

59 и ~~$b+c=$~~ $c+d=5$, $d+e=9$. $10(a+b)+(b+c)=79$

$b\le 2$ тогда $a\ge 5$ и $10(b+c)+(c+d)=35$

$b+c=3$. пол. $10(a+b)+3=79$, $10(a+b)=76$

прот ведь $a+b$ цел. зн. третья $=35$.

$d+e=5$, $c+d=3$. но тогда вторая $=$

$10(b+c)+3=57$, или 79 и $10(b+c)=54$ или 76

но ни одно не подходит. теперь

P.S. нет противоречий, и первая ~~79~~ 35,

вторая, 57, третья ~~59~~ 79. $a+b=3$, $b+c=5$, $c+d=7$

$d+e=9$, $a=1$ или 2 при 1, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$.

при 2, $b=1$, $c=4$, $d=3$, $e=6$.

Чистовик

доп 2 к задаче 5.

Рассмотрим когда одна 21, ~~то~~ вто. другая 79 и третья $5\cdot 19 = 95$.

~~$10(a$ ал. 21 это или $10a$~~

95 это или ~~a~~ одна из сводок.

в ней $10(a = x+y) + y+z = 95$ $y+z > 5$. или 15

при ~~15~~ 5, $x+y=9$. и зн. до нее

79 у нее сумма её $x+y$ пусть

$m + x = 7$ $(10m + 11x + y = 10(m+x) + x+y = 10(m+x)+9)$

$m+x=7$, и до нее уже 21 не ходит

значит 95 пер. или вторая, но

тогда ~~у его~~ след. $10\cdot 5$ + что по но ~~зн.~~

по что доб < 20 зн след не 79

и ~~7~~ и не 21 $(50>27)$ прот. значит

95 неподходит при ~~x+~~ $y+z=5$, зн.

$y+z=15$, и если 95 не ~~не~~ последняя

у след. $10(y+z) = 150$ что больше возм.

зн 95 посл. $x+y=8$, и либо $21-8$ или

$79-8$:10 ~~но~~ (аналогично) и тогда 95 неподходит. зн. если $a=1, b=2, c=3, d=4, e=5$. или $a=2, b=1, c=4, d=3, e=6$. $\overline{abcde} = 12345$ или 21436. Ответ: 12345 или

21436