МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Литвинов Денис Андреевич**

Класс: **9 класс**

Технический балл: **50**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	10	10	5	15	0	0

№1

Рассмотрим произведение всех граней. Оно равно 6!. Заметим, что $6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, зная, что $16 = 2^4$, мы можем сделать вывод, что

1. Если кубик упал на нечётное число, то произведение граней будет $\vdots$ на 16.

2. Если кубик упал на чётное число, то произведение граней $\not\vdots\ 16$ т.к. мы поделим 6! на выпавшее число которое чётно => степень 2 в разложении числа = произведению граней < 4 => оно $\not\vdots\ 16$.

$\Updownarrow$

Произведение $\vdots$ 16 ~~тогда~~ и только тогда, когда выпало нечётное число. Вероятность этого равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

№2

ФВИ для $n=2$:

$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.

Посчитаем по этой формуле числа входящие хотя бы в 1 из последовательностей.

$A_1 = \{\underbrace{1, 3, 5 \cdots 2021}_{1011 \text{ чисел}}\} \Rightarrow |A_1| = 1011$

$A_2 = \{\underbrace{1, 4, 7, \ldots 2020}_{674 \text{ числа}}\} \Rightarrow |A_2| = 674$

$\{A_1 \cap A_2\} = \{1, 7, 13, \ldots 2017\}$ (Это множество является множеством всех чисел из 2-ой последовательности, которые нечётны)

$|A_1 \cap A_2| = 337$

$|A_1 \cup A_2| = 1011 + 674 - 337 = 1298.$

Что бы найти все числа не входящие в эту последовательность, надо из 2022 вычесть 1298.

$2022 - 1298 = 724$

Ответ: 724.

№ 5 (1)

1. Если среднее число положительно $\Rightarrow$ в наборе 2 положительных числа. (пусть это числа u, v, w $u \le v \le w$, $v > 0 \Rightarrow 0 < v \le w$, $w > 0$)

2. Если 2 числа в наборе положительны, то среднее положительно ($u \le v \le w$, если это не так, то $v < 0$, а остальные 2 числа > 0, это не так, то $v<0$, противоречие) но $0 < u \le v \Rightarrow 0 < v$, противоречие)

$\Downarrow$

Если мы найдём все промежутки, когда хотя бы 2 числа > 0, то они будут подходить под условие (утверждение 2) и это будут все промежутки где среднее число > 0 (утверждение 1).

1) $x^3 - 100x > 0$

$x(x-10)(x+10) > 0$

$x \in (-10; 0) \cup (10; +\infty)$

2) $x^4 - 16 > 0$

$(x^2+4)(x-2)(x+2) > 0$ $(x^2+4 > 0)$

$(x-2)(x+2) > 0$

$x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

3) $x + 20 - x^2 > 0$

$-(x-5)(x+4) > 0$

$x \in (-4; 5)$

№5 (2)

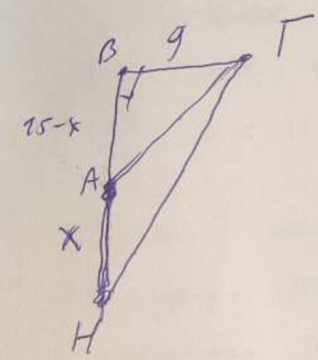
Объединим 1и2, 1и3, 2и3 промежутки и рассмотрев их совокупность мы получим ответ.

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2} \in (-10; -2) \cup (10; +\infty) \\ x_{1,3} \in (-4; 0]. \\ x_{2,3} \in (-4; -2) \cup (2; 5] \end{array}\right.$$

$x \in (-10; 0] \cup (2; 5] \cup (10; +\infty)$

Ответ: $(-10; 0] \cup (2; 5] \cup (10; +\infty)$

№4



Пусть $AH = x \Rightarrow BA = 15 - x \Rightarrow$

$AГ = \sqrt{x^2 - 30x + 306}$

$t_{AH} = \frac{x}{50} \quad t_{AГ} = \frac{\sqrt{x^2 - 30x + 306}}{40}$

$t_{AH} + t_{AГ} = t(x) = \frac{x}{50} + \frac{\sqrt{x^2 - 30x + 306}}{40}$

$t'(x) = \frac{1}{50} + \frac{x - 30}{40\sqrt{x^2 - 30x + 306}}$

$t'(x) = 0$

$\frac{1}{50} + \frac{x - 30}{40\sqrt{x^2 - 30x + 306}} = 0$

$4\sqrt{x^2 - 30x + 306} + 5x - 150 = 0$

$4\sqrt{x^2 - 30x + 306} = 150 - 5x \qquad 150 - 5x \geq 0, \; x \leq 30$

$16(x^2 - 30x + 306) = 25x^2 - 1500x + 150^2$

$9x^2 - 1020x - 17604 = 0$

$3x^2 - 340x - 5868 = 0$

Пусть x_0 его корень, такой, что $0 < x_0 \leq 15$. Данное число и будет равняться x.

Ответ: x_0

№3.

Найдём последнюю цифру числа

$10^{2022}-9^{2022}=A$

$10^{2022}-9^{2022} \overset{10}{\equiv} -9^{2022} \overset{10}{\equiv} -(-1)^{2022} \overset{10}{\equiv} -1 \overset{10}{\equiv} 9$ (последняя цифра числа $=9$)

Найдём предпоследнюю цифру A. (пусть эта цифра равна a

$10^{2022}-9^{2022} \overset{100}{\equiv} 10a+9$

$\overset{\vdots 100}{100^{1011}} - 9^{2022}$

-9^{2022}

$-9^{2022}-9 \overset{100}{\equiv} 10a$

$-9(9+1)(9^{2020}+9^{2019}+\dots+1) \overset{100}{\equiv} 10a$

$10\cdot(-9)(9^{2020}+9^{2019}\dots+1) \overset{100}{\equiv} 10a$

$-9(9^{2020}+9^{2019}\dots+9+1) \overset{10}{\equiv} a$

$1((-1)^{2020}+(-1)^{2019}\dots(-1)+1) \overset{10}{\equiv} a$

$a \overset{10}{\equiv} 1-1\dots+1-1+1 \overset{10}{\equiv} 1$

$a=1$

Найдём пред пред последнюю цифру числа A (пусть эта цифра равна b

$10^{2022}-9^{2022} \overset{1000}{\equiv} 100b+19$

$\overset{\vdots 1000}{1000^{674}} - 9^{2022}$

-9^{2022}

$-9^{2022} \overset{1000}{\equiv} 10(10b+1)+9$

$-9(9+1)(9^{2020}+\dots+1) \overset{1000}{\equiv} 10(10b+1)$

$-9(9^{2022}+\quad+1)\overset{100}{\equiv}10b+1$

$-9^{2023}+9^{2022}-\dots-9-1\overset{100}{\equiv}10b$

$-9^{2022}(9+1)+\dots-(9+1)\overset{100}{\equiv}10b$

$-10(9^{2022}+\dots+1)\overset{100}{\equiv}10b$

$-(9^{2022}+\dots+9+1)\overset{10}{\equiv}b$

$-((-1)^{2022}\dots-1+1)\overset{10}{\equiv}b$

$-(1-1\dots1-1+1)\overset{10}{\equiv}b$

$-1\equiv b$

$b\equiv 9$

$b=9$

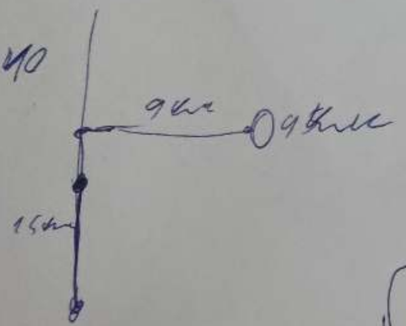
Ответ: 919

№7

Мы понимаем, что первая и последняя скобка относится к одному пакету, значит нам надо посчитать сколько способов правильно расставить скобки (9 штук) => это C_9 - девятое число Каталана. ~~однозначно~~

Ответ C_9

$50 ; 40$



$x = 3$

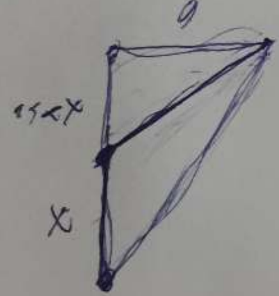
$\frac{50}{3} + \frac{40}{15}$

$\sqrt{81 + 225 - 30x + x^2}$

$\frac{50}{3} + \frac{8}{3} =$

$\sqrt{x^2 - 30x + 306}$

$= \frac{58}{3} = 16$



$v = \frac{S}{t}$

$\frac{x}{50} + \frac{40}{\sqrt{x^2 - 30x + 300}}$

$\cancel{\sqrt{x^2 - 50x + 306} + x} = f(x)$

$\min f(x) - ?$

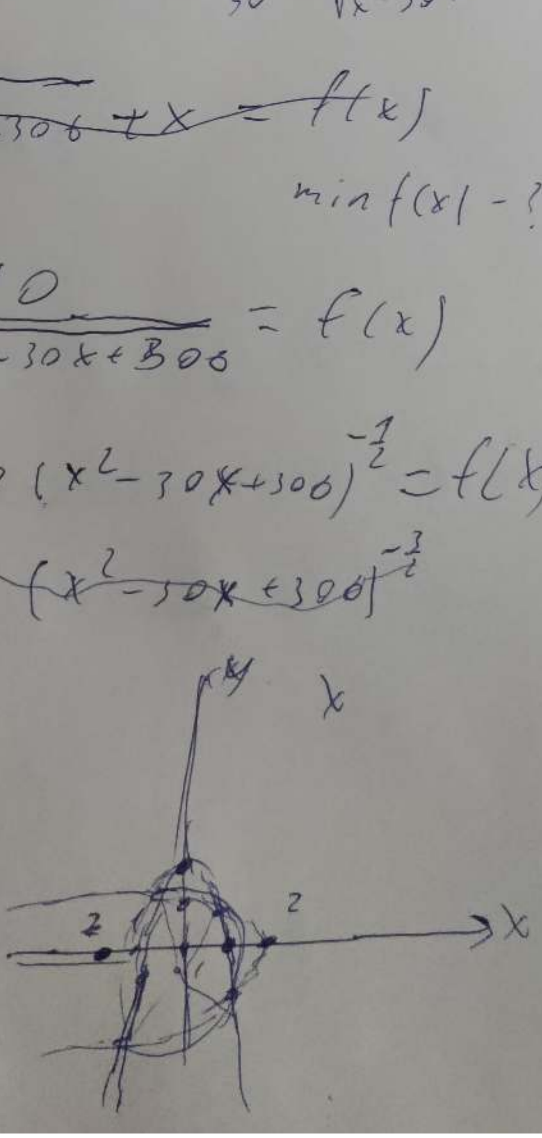
$\frac{50}{x} + \frac{40}{\sqrt{x^2 - 30x + 300}} = f(x)$

$50x^{-1} + 40(x^2 - 30x + 300)^{-\frac{1}{2}} = f(x)$

$\cancel{-50x^{-2} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)40\,(x^2 - 30x + 300)^{-\frac{3}{2}}}$

$y = -3x^2 + 2$

$x = -4y^2 + 2$



$y + 3x^2 = x + 4y^2$

$3x^2 - x = 4y^2 - y$

$x(2x - 1) = 4(y - 1)$

P_n - способов получить пакет в неделю из n пакетов

$P_{n+1} =$

$((\quad))()$ $\quad C_{2n}^{n+1}$ $\quad 1 \; 4 \; 6$

((()))

(()())

()(())

()()()

(())()

$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ $\quad \frac{6 \cdot 5}{2} = 10$

$9^{2022} \overset{1000}{\equiv} 729^{674}$

$\quad\ \ |||$

$\quad\ 271^{674}$

$\begin{array}{r} 271 \\ \times \quad 9 \\ \hline 2439 \end{array}$

$9^d \overset{1000}{\equiv}$

d-min

$6n - 5 = 2012$

$n = 2017 : 3 = 332$

$a = 10^{2022} - 9^{2022} \overset{10}{\equiv} 0 - (-1)^{2022} \overset{10}{\equiv} -1$

$a = b + \cancel{1000a_1 + 100a_1 + 10a_2 + a_3}$ $\quad a_3 = 9$

$-9^{2022} \overset{100}{=} \cancel{100}\, b + 10a_1 + 9 \equiv 10a_1 + 9$

$-9(9+1)!$ $\qquad 1685 - 387 = 1298$

№1

$P = 6!$

$\frac{P}{6} = 5! = 120$

$\frac{P}{5} = 4! \cdot 6 = 144$

$\frac{P}{4} = 3! \cdot 5 \cdot 6 = 180$

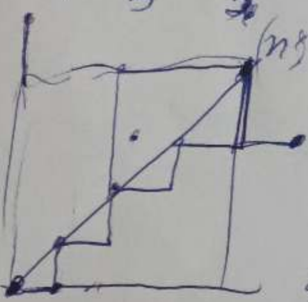
$\frac{P}{3} = 2! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 240$

$\frac{P}{2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$

$\frac{P}{1} = P = 6!$

2 4 6

1 3 5



(n; n)

1·1 2·2 2·3 2·5

1, 2, 4, 6, 10,

900 − 1

() 1

(()) ()() 2

(()()) ()(()) ()(()) (())() 3

$7 \cdot C_{2n+8}^{n+1}$

C_{2n-1}^{n}

№2

$A_1 \cup A_2 = A_1 + A_2 - A_1 \cap A_2$

1, 4, 7 … , 2020

$3n - 2 = 2020$

$n = \frac{2022}{3} = 674$

$2022 - 674 = 1348 = A_1$

1, 3 … 2021

$2n - 1 = 2021$

$n = 1011$

$2022 - 1011 = 1011 = A_2$

1, 7, … 2017

$6n - 5 = 2017$

$6n = 2022$

$n = \frac{1011}{3} = 337$

16 (215)

15

25 (9 − 180 + 38)

15

306

16

1836

306

4896

1500 − 480

1020

22500

4896

17604

340

434

6

№3

$10^{2022} - 9^{2022} \overset{1000}{\equiv} -9^{2022} \overset{1000}{\equiv} -(9^{674})^3$

$9, 81, 29$

$10^{2022} - 9^{2022} = (10-9)(10^{2021} + 10^{2020}\cdot 9 + \ldots + 10\cdot 9^{2020} + 9^{2021})$

$10^2 + 10\cdot 9 + 0 + 10^2\cdot 9^3 + 10\cdot 9^4 +$ $\quad 4\cdot 3\cdot 3 = 36$

$9^{2022} = 1000k + L$

$5868 = 4\cdot 1467$

$1467 = 3\cdot 489$

$a^{3\cdot 68} \equiv c$

$x^3 - 100x = x(x-10)(x+10) \geq 0$

$x \in [-10;0) \cup (10;+\infty)$

$x^4 - 16 = (x^2+4)(x-2)(x+2) > 0$

$x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$

$x + 20 - x^2 = -(x^2 - x - 20) = -(x-5)(x+4) > 0$

$x \in (-4;5)$

$x_{1,2} \in [-10;-2) \cup [10;+\infty)$

$x_{13} \in (-4;0)$

$x_{2,3} \in (-4;-2) \cup (2;5)$

$x \in [-10;0) \cup (2;5) \cup [10;+\infty)$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$115600 -$

$x = -4(3x^2-2)^2+2$

$-x = 36x^4 - 24x^2 + 16 - 2$

$36x^4 - 24x^2 + x + 14 = 0$

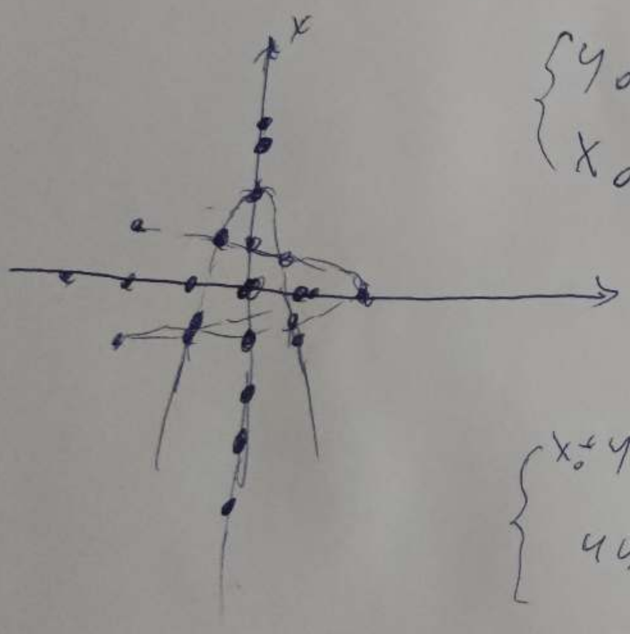
$y = -3(4y^2-2)+2$

$-y = 48y^4 - 24y^2 + 12 \cancel{-} 2$

$48y^4 - 24y^2 + y + 10 = 0$

$6! = 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$

$2^4\cdot3^2\cdot5$



$$\begin{cases} y_0 = -3x_0^2+2 \\ x_0 = -4y_0^2+2 \end{cases}$$

$x_0^2+y_0^2=?$

$$\begin{cases} x_0+y_0 = -3x_0^2 - 4y_0^2+4 \\ 4y_0^2 - 3x_0^2 = y_0 - x_0 \end{cases}$$

$\cancel{x}y_0$

$\frac{1}{50} + \frac{x+32}{400\sqrt{x^2-30x+306}} = 0$

$4\sqrt{x^2-30x+306} + 5x - 150 = 0$

$4\sqrt{x^2-30x+306} = 150-5x$

$16(x^2-30x+306) = 25(x^2-60x+900)$