



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

**ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА**

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Львова Алеся Яновна**

Класс: **8 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

**Результаты проверки:**

|        |    |   |    |    |    |    |
|--------|----|---|----|----|----|----|
| №      | 1  | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  |
| Оценка | 15 | 5 | 15 | 15 | 20 | 15 |

# Чистовик

## Задача 1

$$\begin{cases} A + B = 220 \text{ кг} & (1) \\ A + B = 240 \text{ кг} & (2) \\ B + B = 250 \text{ кг} & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) - (3) = A + B + A + B - B - B = 460 - 250 = 210 \text{ кг}$$

$$2A = 210 \text{ кг}$$

$$A = 105 \text{ кг}$$

Подставим

в (1):

$$B = 115 \text{ кг}$$

Подставим в (3):

$$B = 135 \text{ кг}$$

$$B > B > A$$

⇓

Победитель B, поднявший 135 кг

Ответ: 135 кг.

# Числовые

## Задача 2

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$x \cdot y = 2022y + 2022x$$

$$xy - 2022y - 2022x + 2022^2 = 2022^2$$

$$(x - 2022)(y - 2022) = 2022^2$$

Получаем Диофантово уравнение

Кол-во решений равно кол-ву делителей  $2022^2$

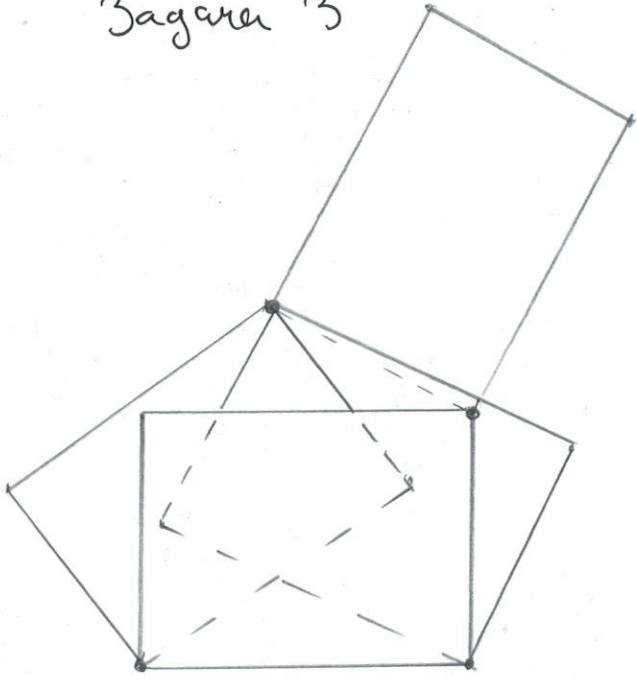
$$2022^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$$

$$n = (1+2)(1+2)(1+2) = 3^3 = 27$$

Ответ: 27 решений в целых числах

Чистовик

Задача 3



Ответ: можно.

# Числовик

## Задача 4

$$X_n = X_{n-1} \cdot X_{n-3}$$

Запишем первые 10 чисел последовательности:

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = 1$$

$$X_3 = -1$$

$$X_4 = -1$$

$$X_5 = -1$$

$$X_6 = 1$$

$$X_7 = -1$$

$$X_8 = 1$$

$$X_9 = 1$$

$$X_{10} = -1$$

Каждое следующее число зависит от 3 предыдущих. Заметим, что

$$X_1 = X_8$$

$$X_2 = X_9$$

$$X_3 = X_{10}$$

Значит последовательность циклическая.

Найдём  $X_{2022}$ :

$$2022 / 7 = 288 \text{ (6 ост.)}$$

⇓

$$X_{2022} = X_6 = 1$$

Ответ:  $X_{2022} = 1$

## Задача 5

 $\overline{abcde}$ 

$$(\overline{ab} + \overline{bc})(\overline{bc} + \overline{cd})(\overline{cd} + \overline{de}) = 157605$$

$$0 < a \leq 9$$

$$0 < b \leq 9$$

$$0 < c \leq 9$$

$$0 < d \leq 9$$

$$0 \leq e \leq 9$$

Каждая цифра - либо двузначное, либо трёхзначное число, при этом двузначное больше либо равно 21 ( $11+10=21$ ), а трёхзначное меньше либо равно 199 ( $99+99=198$ ).

$$157605 : 1, 3, 5, 7, 15, 19, \underline{21, 35, 57, 79, 95, 105, 133, 237 \dots}$$

$$35 \cdot 57 \cdot 79 = 157605 \text{ или } 21 \cdot 79 \cdot 95 = 157605$$

$$(10a + 11b + c)(10b + 11c + d)(10c + 11d + e) = 157605$$

$$1) \overline{ab} + \overline{bc} = 35$$

$$10a + 11b + c = 35$$

$$a) b=1 \rightarrow a=2, c=4$$

$$\overline{bc} + \overline{cd} = 57$$

$$10b + 11c + d = 57$$

$$10 + 44 + d = 57$$

$$d = 3$$

↓

$$\overline{cd} + \overline{de} = 79$$

$$10c + 11d + e = 79$$

$$40 + 33 + e = 79$$

$$e = 6$$

↓

$$\overline{abcde} = 21436$$

$$2) b=2 \rightarrow a=1, c=3$$

$$10b + 11c + d = 57$$

$$20 + 33 + d = 57$$

$$d = 4$$

↓

$$\overline{cd} + \overline{de} = 79$$

$$10c + 11d + e = 79$$

$$30 + 44 + e = 79$$

$$e = 5$$

$$\overline{abcde} = 12345$$

Продолжение Задачи 5

2)  $\overline{ab} + \overline{bc} = 57 \quad \ominus$

$10a + 11b + c = 57$

$b = 1$

$a = 4$

$c = 6$

a)  $10b + 11c + d = 39$

$10 + 66 + d \neq 35$

б)  $10b + 11c + d = 79$

$10 + 66 + d = 79$

$d = 1$

$10c + 11d + e = 39$

$60 + 11 + e \neq 35$

$\ominus$

3)  $\overline{ab} + \overline{bc} = 79$

$10a + 11b + c = 79$

$b = 1, a = 6, c = 8$

$\ominus$

$b = 2, a = 5, c = 7$

$\ominus$

$b = 3, a = 4, c = 6$

$\ominus$

$b = 4, a = 3, c = 5$

$10b + 11c + d \neq 57$

$b = 5, a = 2, c = 4$

$\ominus$

$b = 2, a = 3, c = 5$

a)  $20 + 55 + d = 79$

$d = 4$

$50 + 40 + e \neq 35$

b)  $b = 3, a = 2, c = 4$

$30 + 44 + d \neq 79$

$d = 5$

$40 + 59 + e \neq 35$

$b = 4, a = 1, c = 3$

$40 + 33 + d = 79 \quad \ominus$

$d = 6$

$30 + 86 + e \neq 35 \quad \ominus$



## Задача 5 (Продолжение 2)

если  $e=0, 10$ 

$$21 \cdot 79 \cdot 95 = 157605$$

$$(10a + 11b + c)(10b + 11c + d)(10c + 11d) = 157605$$

$$a) 10c + 11d = 21$$

$$d=1 \\ c=1$$

$$10b + 11c + d = \begin{matrix} \nearrow 79 \\ \searrow 95 \end{matrix}$$

$$10b + 11 + 1 = 10b + 79$$

$$10b = \begin{matrix} \nearrow 67 \\ \searrow 83 \end{matrix}$$

$$b) 10c + 11d = 79$$

$$d=1 \rightarrow 10c=68$$

$$d=2 \rightarrow 10c=57$$

$$d=3 \rightarrow 10c=46$$

⊖

$$b) 10c + 11d = 95$$

$$d=5 \quad c=4$$

$$10b + 11c + d = \begin{matrix} \nearrow 79 \\ \searrow 21 \ominus \end{matrix}$$

$$\underbrace{11 + 5}_{16}$$

$$b=3$$

$$10a + 11b + c = 21$$

$$33 + 4 \ominus$$

Ответ: 21436, 12345

Чистови

Задача 6

В комнате 3 лампочки разного цвета

Каждой лампочке нужно поменять цвет минимум 6 раз

Если поменять цвета 24 раз то есть  $24/3 = 8$  ходов.

# Черковичи

В комнате 4 лампочки разного цвета

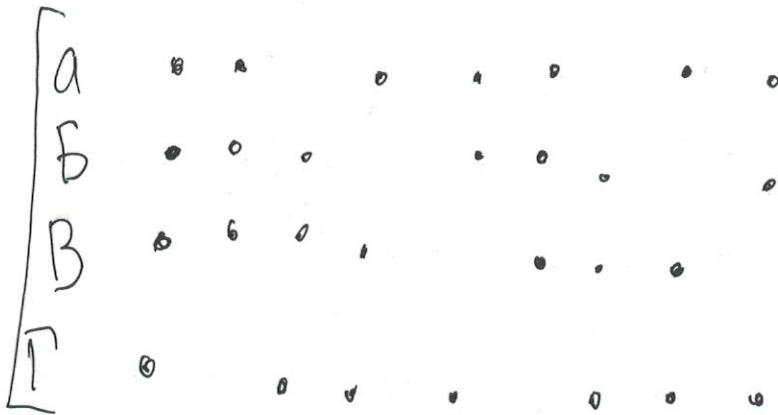
Каждой лампочке нужно поменять цвет минимум 6 раз.

Значит всего цвета надо поменять  $6 \cdot 4 = 24$  раза и это

$24/3 = 8$  ходов. (Цвет можно менять у любых 3, т.к. любые 3 лампочки - соседние.)

Пример:

| Ходы:<br>Ламп. | 1            | 2            | 3            | 4 | 5            | 6 | 7            | 8 | 9 | 10 |
|----------------|--------------|--------------|--------------|---|--------------|---|--------------|---|---|----|
| А              | к            | с            | <del>л</del> | о | <del>з</del> | ф |              |   |   |    |
| Б              | <del>о</del> | г            | к            | ф | с            | ж | <del>г</del> |   |   |    |
| В              | <del>г</del> | ф            | о            | з | <del>л</del> | г | к            |   |   |    |
| Г              | з            | <del>ж</del> | <del>к</del> | ф | с            | о |              |   |   |    |



|   |   | 1            | 2            | 3            | 4            | 5            | 6            | 7            | 8            | 9            |
|---|---|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| к | А | г            | <del>г</del> | ф            | ж            | о            | <del>о</del> | с            | к            | ф            |
| о | Б | с            | к            | з            | <del>з</del> | ф            | ж            | г            | <del>ж</del> | <del>ж</del> |
| ж | В | ф            | о            | <del>о</del> | к            | с            | з            | <del>з</del> | <del>з</del> | г            |
| з | Г | <del>з</del> | ж            | с            | г            | <del>г</del> | к            | ф            | о            | с            |

# Четно Вук

$$n \geq 4$$

$$X_n = X_{n-1} \cdot X_{n-3}$$

abcde

ab, bc, cd, de

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = 1$$

$$X_3 = -1$$

$$X_4 = X_3 \cdot X_1 = -1$$

$$X_5 = X_4 \cdot X_2 = -1 \cdot 1 = -1$$

$$X_6 = X_5 \cdot X_3 = -1 \cdot -1 = 1$$

$$X_7 = X_6 \cdot X_4 = 1 \cdot -1 = -1$$

4

$$X_8 = X_7 \cdot X_5 = 1$$

$$X_9 = X_8 \cdot X_6 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$X_{10} = X_9 \cdot X_7 = 1 \cdot -1 = -1$$

~~$$X_{11} = X_{10} \cdot X_8 = -1$$~~

$$\underbrace{1 \mid 1 \mid -1 \mid -1 \mid -1 \mid 1 \mid -1 \mid 1 \mid 1 \mid -1}_{\text{цикл}}$$

|   |   |    |    |    |   |    |
|---|---|----|----|----|---|----|
| 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6 | 7  |
| 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 |

цикл.

$$2022 / 7 =$$

$$X_{2022} = 1$$

$$\begin{array}{r} 2022 \mid 7 \\ \underline{-14} \phantom{00} \\ 62 \phantom{00} \\ \underline{-56} \phantom{00} \\ 62 \phantom{00} \\ \underline{-56} \phantom{00} \\ 6 \end{array}$$

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Черновик

$$x \cdot y = 2022y + 2022x$$

$$xy - 2022y - 2022x + 2022^2 = 2022^2$$

$$(x - 2022)(y - 2022) = 2022^2$$

Получаем Диофантово уравнение.

Каково решение равно кол-ву делителей числа  $2022^2$

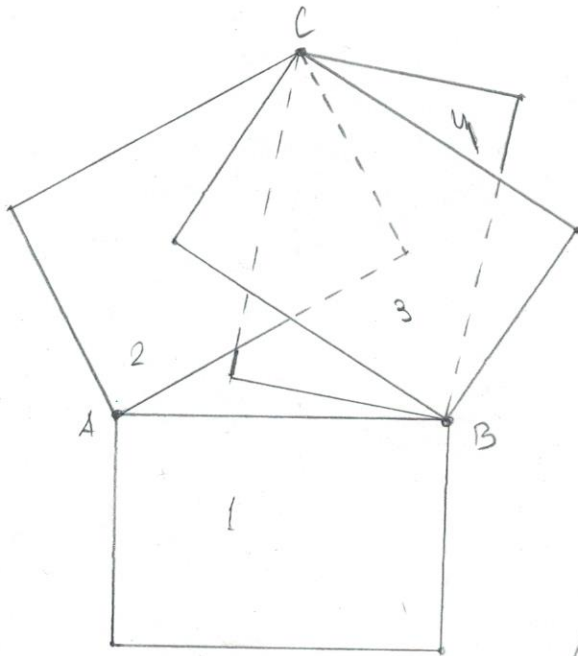
$$2022^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$$

$$n = (1+2)(1+2)(1+2) = 3^3 = 27$$

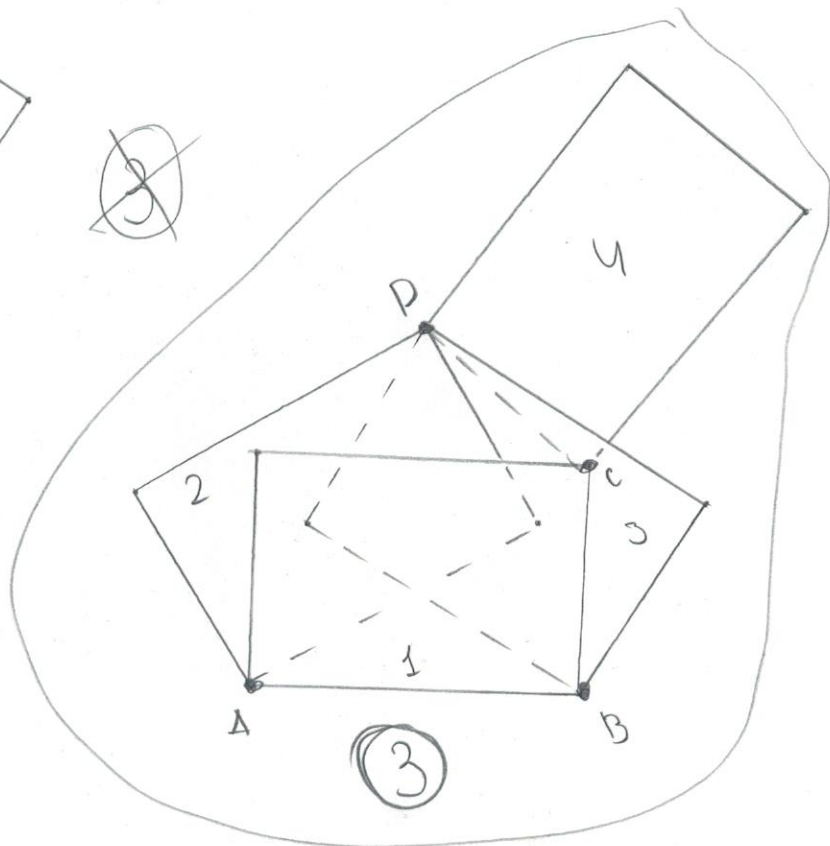
Ответ: 27 решений в целых числах.

~~$y(x - 2022) + 2022x - 2022^2$~~   
 ~~$-y(x - 2022) + 2022(x - 2022)$~~   
 ~~$2022(x - 2022) + y(x - 2022)$~~

(2)



~~(3)~~



(3)

- 1 и 2 A A
- 1 и 3 B B
- 1 и 4 C C
- 2 и 3 D D
- 2 и 4 D D
- 3 и 4 B D

$$A+B=220 \text{ кг}$$

$$A+B=240 \text{ кг}$$

$$B+B=250 \text{ кг}$$

$$A+B+A+B=460 \text{ кг}$$

$$A+B+A+B-B-B=460-250 \text{ кг}$$

$$2A=210 \text{ кг}$$

$$A=105 \text{ кг}$$

$$B=115 \text{ кг}$$

$$B=135 \text{ кг}$$

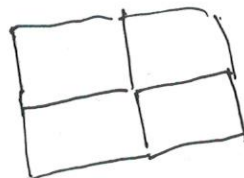
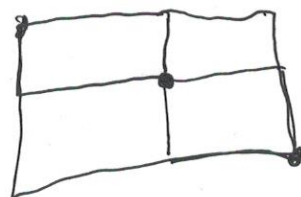
Ответ: 135 кг.

①

⇓

1 4 2 ~6~3~

1 2 3 4 5 6  
~ ~ ~ ~ ~ ~



$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

2022

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2022}$$

②

$$2022(x+y) = xy$$

$$2022x + 2022y = xy$$

чочч + чочч

$\frac{1}{3}$   $\frac{2}{3}$

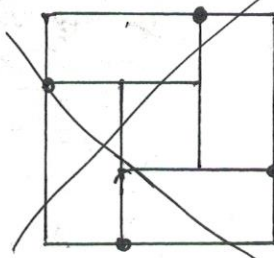
6066

$$2022x + 2022y - xy = 0$$

$$2022x - xy = -2022y$$

$$x(2022-y) = -2022y$$

$$x(y-2022) = 2022y$$





# Черновик

abcde

$$(10a + b)(10b + c)(10c + d)(10d + e) = 157605.$$

$$0 \leq a \leq 9$$

$$0 \leq b \leq 9$$

$$0 < c \leq 9$$

$$0 < d \leq 9$$

$$0 \leq e \leq 9$$

157605: 1, 3, 5, 7, 15, 19, 21, 35, 57, 79, 95, 105, 135, 237

Каждая шодка - либо двузначное, либо трёхзначное число, причём  
двузначное больше либо равно 21, (11+10=21), а трёхзначное  
меньше либо равно 198 (99+99=198)

$$35 \cdot 57 \cdot 79 = 157605 \text{ или } 21 \cdot 79 \cdot 95 = 157605$$

$$(10a + b)(10b + c)(10c + d)(10d + e) = 157605$$

$$1) \quad 10a + b + c = 35$$

$$10a + 11b + c = 35$$

$$a) \quad b=1 \rightarrow a=2, c=4$$

$$10b + c + d = 57$$

$$10b + 11c + d = 57$$

$$10 + 44 + d = 57$$

$$d = 3$$

↓

$$10c + d + e = 79$$

$$10c + 11d + e = 79$$

$$40 + 33 + e = 79$$

$$e = 6$$

↓

$$abcde = 21436$$

$$2) \quad b=2 \rightarrow a=1, c=3$$

$$10b + c + d = 57$$

$$20 + 33 + d = 57$$

$$d = 4$$

↓

$$10c + d + e = 79$$

$$10c + 11d + e = 79$$

$$30 + 44 + e = 79$$

$$e = 5$$

$$abcde = 12345$$