МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Маликов Леонид Максимович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	15	15	15

Чистовик. Лист 1

№1

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(1+\sqrt{3})^2}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{77}{(38\cdot 39)^2} + \frac{79}{(39\cdot 40)^2}$$

$$B = \sum_{k=1}^{39} \frac{2k+1}{(k(k+1))^2}$$

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{k^2+2k+1-k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\Rightarrow B = \sum_{k=1}^{39}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{38^2} - \frac{1}{39^2} + \frac{1}{39^2} - \frac{1}{40^2} = 1 - \frac{1}{40^2} < 1 = A$$

Ответ: число A больше

№2

Двузначные, кратные 19: 19, 38, 57, 76, 95, и

кратные 23: 23, 46, 69, 92.

$$4 \to 6 \to 9 \begin{cases} \nearrow 2 \to 3 \to 8 & \mathrm{I} \\ \searrow 5 \to 7 \to 6 \to 9 & \mathrm{II} \end{cases}$$

Построим схему, в которой следующая цифра такова, что полученное двузначное число $\vdots$ 19 или 23. Тогда 3-я цифра обязательно 9. Далее возможно 2 случая: либо 92, либо 95. Первый приводит к цифре 8, но нет двузначного числа, которое начинается на 8 и $\vdots$ 19 или 23 $\Rightarrow$ он невозможен, т.к. в данном числе 2021 знаков. см. лист 2

Чистовик. Лист 2

продолжение №2

Значит, после 9 следует 5. Тогда получили цикл $9-5-7-6$, всего цифр 2021, первая цифра 4, далее цифры идут по циклу $6 \to 9 \to 5 \to 7$ длины 4, $2020 \vdots 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ последняя цифра - это 7.

Ответ: 7

№3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}; \quad f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-(f(x))^{11}}} = \frac{1}{\sqrt[11]{1-\frac{1}{1-x^{11}}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[11]{\frac{1-x^{11}-1}{1-x^{11}}}} = \sqrt[11]{\frac{1-x^{11}}{-x^{11}}} = \sqrt[11]{1-\frac{1}{x^{11}}}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-(f(f(x)))^{11}}} = \frac{1}{\sqrt[11]{1-\left(1-\frac{1}{x^{11}}\right)}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$\Rightarrow$ применение функции $f(x)$ 3 раза даёт x.

$$1306 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow \underbrace{f(f(f(\ldots f}_{1306 \text{ раз}}(2022)))\ldots)) =$$

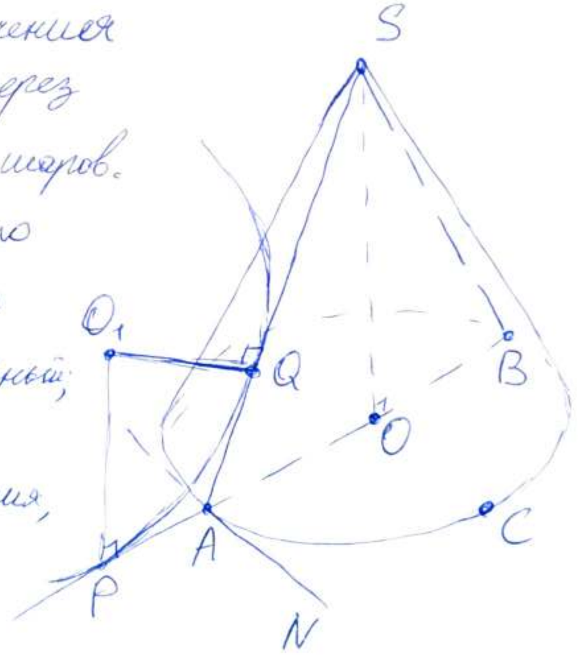
$$= f(2022) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$

Чистовик. Лист 3

Т.к. шары одинаковые, и они касаются плоскости основания (и лежат по одну сторону от неё), то их центры лежат в одной плоскости, паралл. плоскости основания конуса. ~~Шары~~ Соседние шары касаются $\Rightarrow$ расстояние между их центрами равно 4, и ~~это расстояние~~ оно равно расстоянию между их проекциями на плоскость основания.

Рассмотрим плоскость осевого сечения конуса, проходящую через центр O_1 одного из шаров.



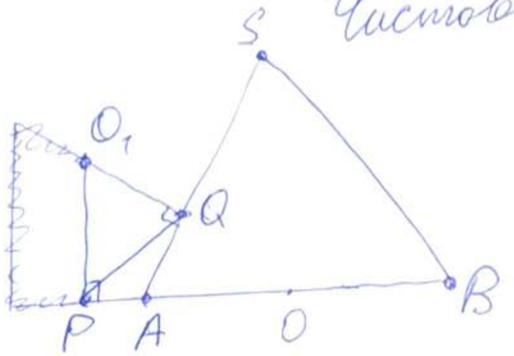
$\triangle SAB$ - осевое сечение, по условию $\angle ASB = 60°$, при этом $SA = SB \Rightarrow \triangle SAB$ - правильный; (SAB) перпендикулярна (ABC) - плоскость основания, т.к. $SO \perp (ABC)$ и $SO \subset (SAB)$ (SO - ось конуса);

$\Rightarrow$ если P - точка касания этого шара с (ABC), то $O_1P \perp (ABC) \Rightarrow O_1P \parallel SO \Rightarrow O_1P \subset (SAB)$.

Пусть $N \in (ABC)$ и NA - касат. к окружности основания. $\Rightarrow (NAS)$ - плоскость, касающаяся конус, $NA \perp AB$ $\Rightarrow$ по т. о трёх перп. $O_1A \perp NA$. Пусть $O_1Q \perp SA$ и $Q \in SA$. Тогда $O_1Q \perp (NAS) \Rightarrow Q$ - точка касания шара и конуса. $O_1P = O_1Q = 2$, $\angle PAQ = 120° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle PO_1Q = 60° \Rightarrow PQ = 2$ ($\triangle PO_1Q$ - прав.)

см. лист 4

Чистовик. Лист 4



Рассм. $\triangle PAQ$:

$PA = AQ$ (как отрезки касат.)

$PQ = 2$, $\angle PAQ = 120^\circ$

по т. косинусов: $PQ^2 = PA^2 + AQ^2 - 2PA \cdot AQ \cdot \cos 120^\circ$

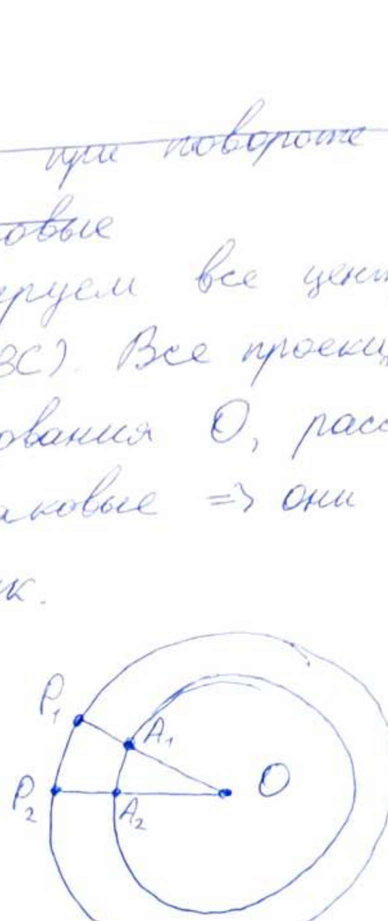
$2PA^2 + PA^2 = 4$

$PA = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

~~Конус самосовмещается при повороте вокруг своей оси. Шары одинаковые~~

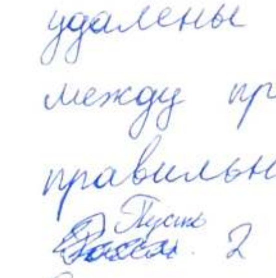
~~Рассмотрим прост~~ Спроецируем все центры на плоскость основания (ABC). Все проекции равноудалены от центра основания O, расстояния между проекциями одинаковые => они образуют правильный 17-угольник.

~~Рассм.~~ Пусть 2 соседние вершины P_1 и P_2, радиусы OP_1 и OP_2 пересекают окружность основания в точках A_1 и A_2.



По доказанному, $P_1A_1 = P_2A_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $A_1O = A_2O = R$ – искомый

$P_1P_2 = 4$, $\angle P_1OP_2 = \frac{2\pi}{17}$. Найдём P_1O $(PO_2 = PO_1)$



OH – высота $\triangle P_1OP_2$. $\angle P_1OH = \frac{\pi}{17}$, $P_1H = 2$

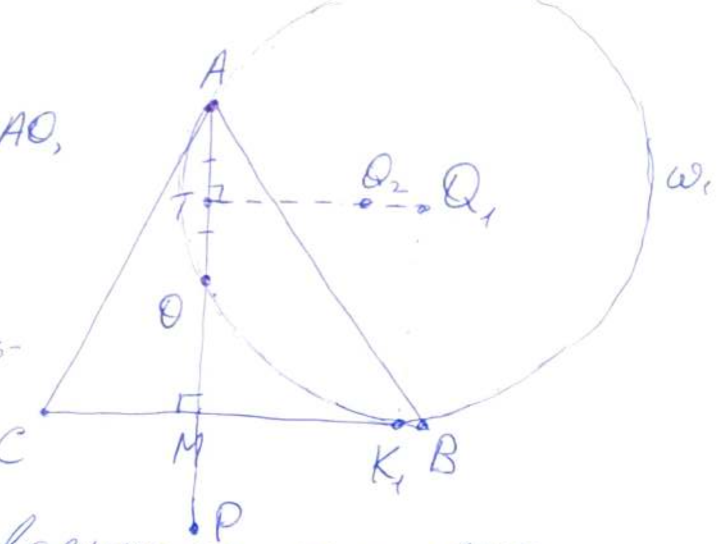
$\Rightarrow P_1O = \frac{P_1H}{\sin\angle P_1OH} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} = R + \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow R = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

Чистовик. Лист 5

№7



Пусть T — середина AO, Q — центр опис. окр. $\triangle AKO$. $\Rightarrow QT \perp AO$

Т.к. $\angle AKO$ — максимальный, то $\angle AQO$ — тоже максимальный, т.к. всегда равен удвоенному углу AKO.

Тогда K можно определить следующим образом: строится окружность ω, ~~она~~ проходящая через A и O, которая имеет хотя бы одну общую точку с BC, ~~Тогда любая из точек пересечения~~ и при этом $\angle AQO$ — максимальный. Тогда любая из точек пересечения ω с BC — точка K.

Пусть ω_1 касается BC в точке K_1 и проходит через A и O. Такая окружность единственна с точностью до симметрии относительно. Q_1 — центр. Предположим, что существует Q_2, которая ближе к AO и ω_2 ~~ω_2~~, с центром в Q_2 и проход. через A и O, имеет общие точки с BC. Но $AQ_2 < AQ_1 = Q_1K_1 = \rho(Q_1, BC) = \rho(Q_2, BC)$, т.к. $Q_1Q_2 \parallel BC \Rightarrow \omega_2$ не имеет общих точек с $BC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AQ_1O$ — максимальный, ~~$\Rightarrow K \equiv K_1$~~ т.к. чем ближе Q к AO, тем больше угол AQO; $K_1 \equiv K$.

Т.к. MK — касат, то $MK^2 = MO \cdot MA$. Рассм. точку P, симметр. O относительно BC. $\angle BOC = 180° - \angle A = \angle BPC \Rightarrow BACP$ — впис.

$\Rightarrow$ ~~$MO \cdot MA = MP$~~ $MC \cdot MB = MP \cdot MA = MO \cdot MA = MK^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow MK = \sqrt{MC \cdot MB} = \sqrt{15}$. Ответ: $\sqrt{15}$.

Чистовик. Лист 6

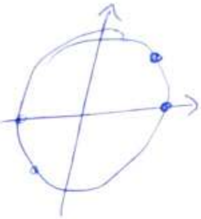
№6

$a\,tg^3x + (2-a-a^2)tg^2x + (a^2-2a-2)\,tg\,x + 2a = 0$

~~если~~ Пусть A - наибольшее расстояние между корнями на промежутке $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Если $a=0$, то $2tg^2x - 2tg\,x = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\,x = 1 \\ tg\,x = 0 \end{array}\right.$



$\Rightarrow A = \frac{\pi}{4}$

Если $a \neq 0$. Поделим на a.

$tg^3x + (\frac{2}{a} - 1 - a)tg^2x + (a - 2 - \frac{2}{a})tg\,x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$(tg\,x - 1)(tg\,x - a)(tg\,x + \frac{2}{a}) = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\,x = 1 \\ tg\,x = a \\ tg\,x = -\frac{2}{a} \end{array}\right.$; a и $-\frac{2}{a}$ - разных знаков $\Rightarrow$ есть корень x_1, который лежит на промежутке ~~tg~~ $(-\frac{\pi}{2}; 0)$, а также есть корень $x_0 = \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow A \geq \frac{\pi}{4} - x_1 > \frac{\pi}{4}$.

Таким образом, минимальное $A = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: при $a=0$, значение $\frac{\pi}{4}$.

Чистовик. Лист 7.

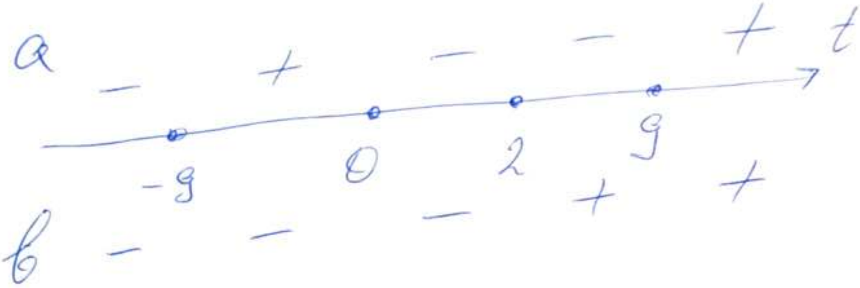
№5

$a = t^3 - 81t = t(t-9)(t+9)$

$b = 11^t - 121$

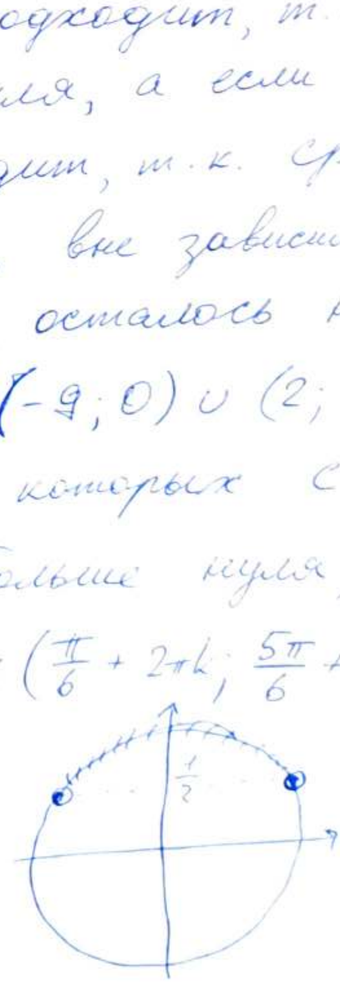
$c = \sin t - \frac{1}{2}$

Отметим промежутки знакопостоянства для a и b.



Заметим, что если $a<0$ и $b<0$, то такой промежуток заведомо не подходит, т.к. среднее не может быть больше нуля, а если $a>0$ и $b>0$, то, наоборот, подходит, т.к. среднее обязательно больше нуля вне зависимости от знака c. Таким образом, осталось найти такие t из промежутка $[-9; 0) \cup (2; 9]$ (в них $a>0$ или $b>0$), при которых $c>0$ (иначе среднее будет не больше нуля)

$c > 0 \Leftrightarrow \sin t > \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$



если $k \leq -2$, то $t < \frac{5\pi}{6} - 4\pi\cancel{k} = -\frac{19\pi}{6} < -9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 54 < 19\pi$, т.к. $\frac{54}{19} < 3 < \pi$

если $k \geq 2$, то $t > \frac{\pi}{6} + 4\pi > 12 > 9$

$\Rightarrow k = -1, 0, 1.$ см. лист 8

Чистовик. Лист 8

продолжение №5

$k=-1 \Rightarrow \begin{cases} t\in\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \\ t\in(-9;0)\cup(2;9] \end{cases}$

$-\frac{11\pi}{6} > -9$, т.к. $54 > 11\pi$, $-\frac{7\pi}{6} < 0$

$\Rightarrow t\in\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)$

$k=0 \Rightarrow \begin{cases} t\in\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) \\ t\in(-9;0)\cup(2;9] \end{cases}$

$\frac{\pi}{6} < 2$, $2 < \frac{5\pi}{6} < 9 \Leftrightarrow \frac{12}{5} < \pi < \frac{54}{5}$

$\Rightarrow t\in\left(2; \frac{5\pi}{6}\right)$

$k=1 \Rightarrow \begin{cases} t\in\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \\ t\in(-9;0)\cup(2;9] \end{cases}$

$2 < \frac{13\pi}{6} < 9 \Leftrightarrow \frac{12}{13} < \pi < \frac{54}{13}$

$\frac{17\pi}{6} < 9 \Leftrightarrow \pi < \frac{54}{17}$ – верно, т.к. $\frac{54}{17} > 3{,}15 > \pi$

$$\begin{array}{r|l} 54{,}00 & 17 \\ \hline -51 & 3{,}17 \\ 30 & \\ -17 & \\ 130 & \\ -119 & \\ \ldots & \end{array}$$

$\Rightarrow t\in\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$

Ответ: $t\in\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)\cup\left(2; \frac{5\pi}{6}\right)\cup$
$\cup\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)\cup(9; +\infty)$

черновик ~~лист 1~~

лист 9

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt[3]{2}}=1$$

$$B=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\ldots+\frac{77}{(38\cdot39)^2}+\frac{79}{(39\cdot40)^2}=$$

$$B=\sum_{k=1}^{39}\frac{2k+1}{(k(k+1))^2}$$

$$\frac{2k+1}{(k^2+k)^2}=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{2k+1}{k^2(k^2+2k+1)}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$B=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{39^2}-\frac{1}{40^2}=1-\frac{1}{40^2}<A$$

$469 \to 2 \to 3 \to 8$ (x)

$469 \to 5 \to 7 \to 6 \to 9$

95

$23\cdot4=92$

$$\underbrace{46\,\underbrace{9576}_{\text{цикл}}\;6\,9\,5\,7}_{2021}$$

23	19
46	38
69	57
92	76
	95

$2019 \underset{4}{\equiv} 3$

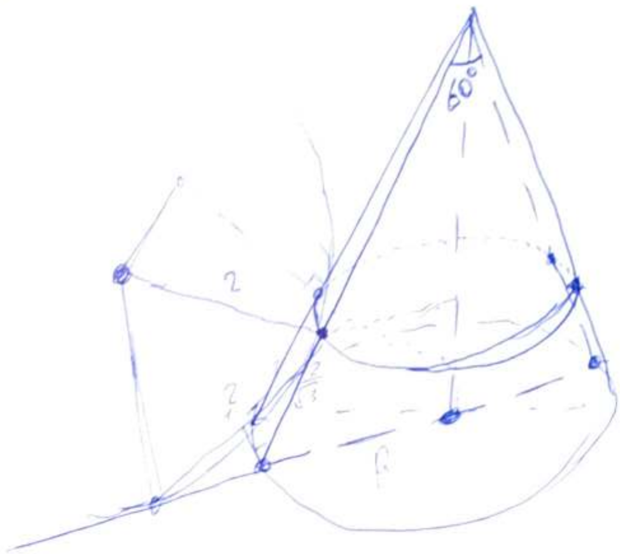
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[11]{1-(f(x))^{11}}}=\frac{1}{\sqrt[11]{1-\frac{1}{1-x^{11}}}}=\frac{1}{\sqrt[11]{\frac{-x^{11}}{1-x^{11}}}}=\sqrt[11]{\frac{x^{11}-1}{x^{11}}}=$$

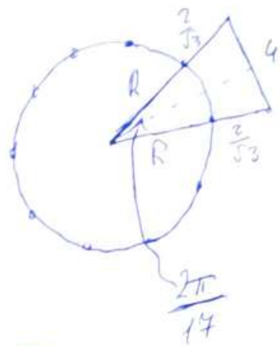
$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[11]{1-(f(f(x)))^{11}}}=\frac{1}{\sqrt[11]{1-\left(1-\frac{1}{x^{11}}\right)}}=\sqrt[11]{1-\frac{1}{x^{11}}}=\frac{1}{\sqrt[11]{\frac{1}{x^{11}}}}=x$$

$1306 \underset{3}{\equiv} 1 \quad f(2022)=\frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$

Черновик Лист 10



$a = t^3 - 81t$
$b = 11^t - 121$
$c = \sin t - \frac{1}{2}$

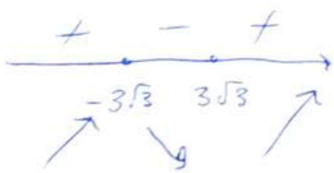


$a' = 3t^2 - 81 = 0$
$t^2 = 27$
$t = \pm 3\sqrt3$

$\alpha = \frac{\pi}{17}$

$\frac{2}{R+\frac{2}{\sqrt3}} = \sin\alpha$

$R = \frac{2}{\sin\alpha} - \frac{2}{\sqrt3}$

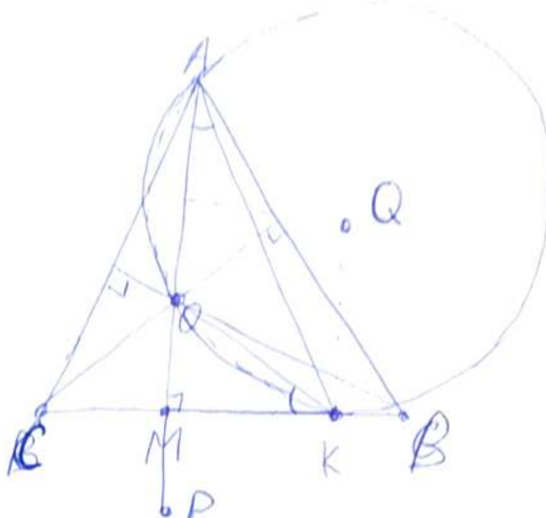


$t^3 - 81t = t(t^2-81) = 3\sqrt3(27-81) = -2\cdot81\sqrt3 = -162\sqrt3$

$-3\sqrt3(27-81) = 2\cdot81\sqrt3 = 162\sqrt3$

$a = t(t-9)(t+9)$ при $t > 9$
$b = 121(11^{t-2} - 1)$
$c = \sin t - \frac{1}{2}$

черновик лист 11



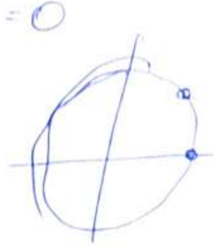
$MK^2 = MO \cdot MA \cdot MP \cdot MA = MC \cdot MB$

$a\,tg^3x + (2-a-a^2)tg^2x + (a^2-2a-2)tgx + 2a = 0$

если $a=0$:

$2tg^2x - 2tgx = 0$

$\left[\begin{array}{l} tgx = 0 \\ tgx = 1 \end{array}\right.$



$\Rightarrow \cancel{\frac{\pi}{4}}\ A = \frac{\pi}{4}$

если $a \neq 0$:

$tg^3x + \left(\frac{2}{a} - 1 - a\right)tg^2x + \left(a - 2 - \frac{2}{a}\right)tgx + 2 = 0$

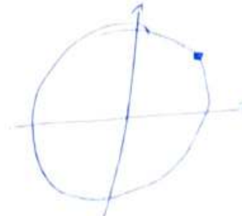
$a + 1 - \frac{2}{a}$

$(tgx - a)(tgx - 1)\left(tgx + \frac{2}{a}\right) = 0$

$tgx = a$

$tgx = 1$ $\Rightarrow$ ~~A = max~~

$tgx = -\frac{2}{a}$



$a > 0$:

~~max(1, a)~~

$\max(\operatorname{arctg} a, 1)$ $\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{a}\right)$

если $a < \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow -\frac{2}{a} < -\frac{8}{\pi} < -2$ $\Rightarrow$

$\frac{4}{\pi} < \frac{1}{a}$

$\frac{8}{\pi} < \frac{2}{a}$

$\Rightarrow A = \frac{\pi}{4} + a > \frac{\pi}{4}$

если $a < 0$: $-\frac{2}{a} < 1 \Rightarrow -2 > a$

$a \geq 1$

~~$a > \frac{\pi}{4}$~~ $\Rightarrow -\frac{2}{a} < 1 \Rightarrow A > \frac{\pi}{4}$

~~$a < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{2}{a} < 4 \Rightarrow A > \frac{\pi}{4}$~~

черновик. лист 12

$a = t^3 - 81t$

$b = 11^t - 121$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$

~~sin 9~~

при $t \in [\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{13\pi}{6} + 2\pi k]$ $c < 0$

при $t \geq 9$ $a > 0$

$9 \vee \frac{17\pi}{6}$

$54 \vee 17\pi$

$54 > 17\pi$

$\pi < 3,1416$

$54,000 \mid 17$

$51 \quad 3,17 > \pi$

30

17

130

119

$a = t(t-9)(t+9)$

a: $-$ $+$ $-$ $-$ $+$

-9 0 2 9 t

b: $-$ $-$ $-$ $+$ $+$

$t \in [-9; 0] \cup [2; 9]$

$\boxed{c > 0}$