МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Маляренко Павел Владимирович**

Класс: **8 класс**

Технический балл: **60**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6
Оценка	15	5	0	15	20	5

Чистовик №4.

Попробуем просчитать несколько следующих значений этого ряда

$x_3 = \cancel{x} - 1$

$x_4 = x_3 \cdot x_1 = -1$

$x_5 = x_4 x_2 = -1$

$x_6 = x_5 x_3 = 1$

$x_7 = x_6 x_4 = -1$

$x_8 = x_7 x_5 = 1$

$x_9 = x_8 x_6 = 1$

$x_{10} = x_9 x_7 = -1$

$x_{11} = x_{10} x_8 = -1$

$x_{12} = x_{11} x_9 = -1$

$x_{13} = x_{12} x_{10} = 1$

$x_{14} = x_{13} x_{11} = -1$

$x_{15} = x_{14} x_{12} = 1$

$x_{16} = x_{15} x_{13} = 1$

$$7 \left\{ \begin{array}{l} x_3 = -1 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = -1 \\ x_6 = 1 \\ x_7 = -\cancel{1}\,1 \\ x_8 = 1 \\ x_9 = 1 \end{array} \right.$$

Заметим, что, начиная с x_3 включительно, появляется цикл, длиной 7, который будет повторяться и далее.

Т.к. нам нужно найти x_{2022}, то нам нужно найти 2022-~~в~~е число последовательности. ~~[illegible]~~ Т.к. x_1 и x_2 не входят в цикл, то вычтем их. То есть ~~нам~~ нужно найти 2020-е число последовательности, начинающейся с ~~[illegible]~~ x_3.

~~2020~~ $2022 - 2 = 2020$

$2020 = 7 \cdot 288 + 4$

То есть x_{2022} будет соответствовать ~~[illegible]~~ 4-ому элементу цикла, то есть 1.

Ответ: 1.

7

Чистовик № 2

$$\frac{1}{2022}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y};\ x\in Z; y\in Z;\ x\neq 0; y\neq 0$$

$(xy \quad (2022y \quad (2022x$

$$\frac{1}{2022}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0$$

$$\frac{xy-2022y-2022x}{2022xy}=0$$

$\cancel{xy-2022}$

$$\begin{cases} xy-2022y-2022x=0 \\ x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$$

$xy-2022y-2022x=0$

$xy=2022(x+y)$

Разложим 2022 на простые множители ~~Заметим, что число~~ $2022=2\cdot3\cdot337$, ~~где~~

$$xy=2\cdot3\cdot337\,(x+y)$$

Т.к. левая часть не равна нулю, то и правая часть ~~этого~~ ~~что~~ не равна нулю, значит, $(x+y)\neq 0$

$x\neq -y$

Тогда без ограничения общности $x=(x+y)\cdot n$, где ~~$n=2$ или $n=3$ или $n=337$~~ $n\in N$, а y - множитель.

То есть нужно посчитать варианты, как мы можем скомбинировать числа 2; 3 и 337

Если ~~8~~ брать 1 число: 3 варианта, если брать 2 числа $\frac{3\cdot2}{2}=3$ варианта, если брать 3 числа, то есть всего ~~один~~ 1 вариант. Итого, $1+3+3=7$ вариантов.

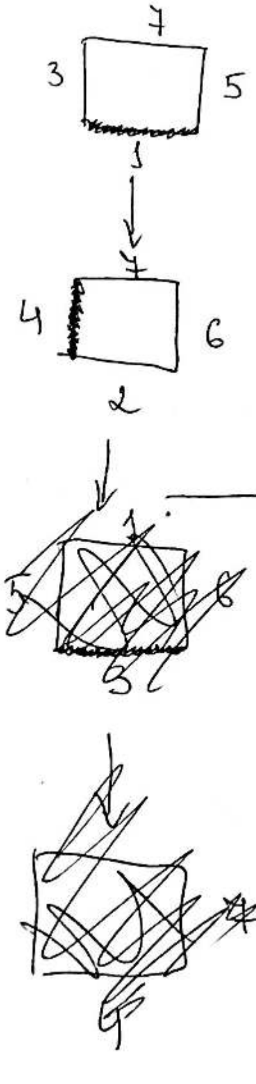
Ответ: 7 решений

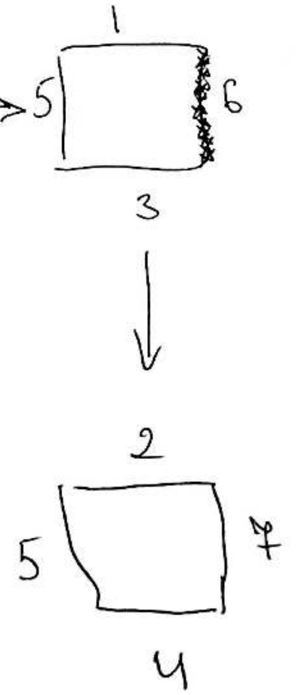
6

Чистовик №6.

~~Пусть~~ Пронумеруем цвета радуги от 1 до 7.

Пусть изначально лампы горят так.





И т.д., то есть всего мы за 1 ход переключаем 3 лампы. А нужно сделать 28 смен цвета. Если переключать их максимально рационально, то потребуется

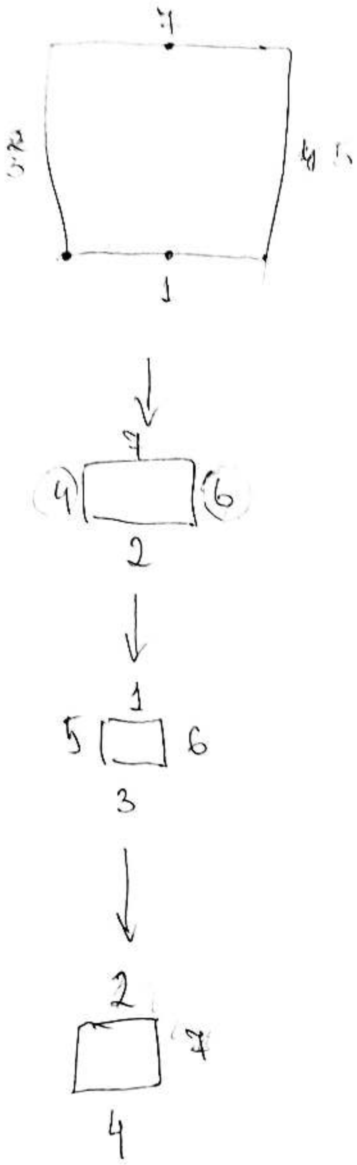
$$28 = 3\cdot\underline{\underline{9}}+1$$

$$9+1=10$$

Ответ: 10 ходов.

15

Черновик v6



14

Во втором случае:

$\overline{bc} + \overline{cd} = 14 + \overline{4d}$ $\qquad 14 + \overline{4d} \leq 63$, значит $\overline{bc} + \overline{cd} \neq 79$

$\overline{bc} + \overline{cd} = 57$

$$14 + \overline{4d} = 57$$
$$\overline{4d} = 43$$
$$d = 3$$

Тогда, $\overline{cd} + \overline{de} = 43 + \overline{3e} = 79$

$$43 + \overline{3e} = 79$$
$$\overline{3e} = 36$$
$$e = 6$$

$a = 2;\ b = 1;\ c = 4,\ d = 3;\ e = 6$

$\overline{abcde} = 21436$

Ответ 12345; 21436

Чистовик v3.

Тогда $\overline{bc}+\overline{cd} = \overline{b1}+12$ или

$\overline{bc}+\overline{cd} = \overline{b2}+21$

В обоих случаях остаток от деления суммы на 10 равен 3. $57=5\cdot 10+\underline{\underline{7}}$ $\quad 79=7\cdot 10+\underline{\underline{9}}$

Получили противоречие.

б) Пусть $\overline{bc}+\overline{cd}=35$

Тогда ~~bc+cd или~~ ~~c=2, cd~~ (аналогично а)) $b=1,\ c=2;\ d=3$

или $b=2;\ c=1;\ d=4$.

Тогда $\overline{ab}+\overline{bc}=\overline{a2}+21$ или $\overline{ab}+\overline{bc}=\overline{a1}+12$

В обоих случаях остаток от деление на 10 равен 3. $57=5\cdot 10+\underline{\underline{7}}$ $\quad 79=7\cdot 10+\underline{\underline{9}}$

Получили противоречие.

в) Пусть $\overline{ab}+\overline{bc}=35$. Тогда (аналогично а) и б)):

$a=1;\ b=2;\ c=3$ или $a=2;\ b=1;\ c=4$

В первом случае:

$\overline{bc}+\overline{cd} = \cancel{12}\,23+\overline{3d}$ $\quad 23\cancel{12}+\overline{3d}\le 51$, значит, $\overline{bc}+\overline{cd}=57$

$23\cancel{12}+3d=57$

$d=4$

Тогда: $\overline{cd}+\overline{de} = \cancel{57}\ 34+\overline{4e} = 79$

$\overline{4e}=45$

$e=5$

$a=1;\ b=2;\ c=3;\ d=4;\ e=5$

$\overline{abcde}=12345.$

12

Черновик №5

21436

(21 + 14) = 35

(14 + 43) = 57

43 + 36 = 79

12345

12 + 23 = 35

23 + 34 = 57

34 + 43 = 79

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 3} \\
35 \\
\times\ 57 \\
\hline
245 \\
175 \\
\hline
1995
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 8\ 4} \\
{\scriptstyle 3} \\
1995 \\
\times\ 79 \\
\hline
17955 \\
13965 \\
\hline
157605
\end{array}
$$

П

Черновик №5

$3 \cdot 19 = 57$

$30 + 2\cdot$ 79

~~abcd~~ ~~ab+bc~~ ~~cd~~

$(\overline{ab} + \overline{bc})(\overline{bc} + \overline{cd})(\overline{cd} + \overline{de}) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 79$

$\overline{cd} + \overline{de} = 35$

$10c + 11d + e = 35$

$20 + 11 + 4$

$c = 2;\ d = 1;\ e = 4$

$10 + 22$

$c = 1;\ d = 2;\ e = 3$

$\overline{cd} = 21$

$\overline{b2} + 21 = 57$

противоречие

$\overline{b1} + 12$

противоречие

$\overline{bc} + \overline{cd} = 35$

$b = 2;\ c = 1;\ d = 4$

$b = 1;\ c = 2;\ d = 3$

$\overline{a2} + 21$

$\overline{ab} + \overline{bc} = 35$

$a = 2;\ b = 1;\ c = 4$ | $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$

$\overline{14} + \overline{4d} = 57$

$\overline{4d} = 43$

$d = 3$

$43 + \overline{3e} = 79$

$\overline{3e} = 36$

$e = 6$

$23 + \overline{3d} = 57$

$\overline{3d} = 34$

$d = 4$

$34 + \overline{4e} = 79$

$e = 5$

10

[illegible] С.С.

Рассмотрим 2 случая:

I. один из множителей равен $3 \cdot 7 = 21$. Из условия

Тогда остальные множители это 79 и $5 \cdot 19 = 95$

Из ограничений, таким числом может быть только $(\overline{cd} + \overline{de})$

Если $\overline{cd} + \overline{de} = 21$, то $e = 0$; $d = 1$, $c = 1$.

$$\overline{cd} = 11$$

$$\overline{bc} + \overline{cd} = \overline{b1} + 11$$

$$\left[\begin{array}{l} \overline{b1} + 11 = 79 \\ \overline{b1} + 11 = 95 \end{array}\right.$$

~~Отв~~ Оба равенства не имеют решений, т.к. мы видим, что первое слагаемое имеет остаток 1 при делении на 10, и второе слагаемое имеет остаток 1 при делении на 10, значит, их сумма должна иметь остаток 2 при делении на 10; $79 = 10 \cdot 7 + \underline{\underline{9}}$; $95 = 10 \cdot 9 + \underline{\underline{5}}$

Получим противоречие.

$\underline{\text{II}}$ а) Пусть $\overline{cd} + \overline{de} = \cancel{3}5 \cdot 7 = 35$

Тогда оставшиеся множители это $3 \cdot 19 = 57$ и 79.

$$10c + 11d + e = 35$$

Т.к. ~~ек~~ $1 \leq c \leq 9$; $1 \leq d \leq 9$; то $10c + 11d \geq 21$.

То есть или $c = 2$, тогда $d = 1$; $e = 4$

или $c = 1$, тогда $d = 2$, $e = 3$.

Чистовик 15

$\overline{abcde}$, т.к. двузначные числа не могут начинаться с нуля, то $0 < a, b, c, d \le 9$; $0 \le e \le 9$.

~~Разложим число~~

$$(\overline{ab} + \overline{bc})(\overline{bc} + \overline{cd})(\overline{cd} + \overline{de}) = 157605$$

$$(10a + 11b + c)(10b + 11c + d)(10c + 11d + e) = 157605$$

$$22 \le 10a + 11b + c \le 198$$
$$22 \le 10b + 11c + d \le 198$$
$$21 \le 10c + 11d + e \le 198$$

Разложим число 157605 на простые множители:

$$157605 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 79$$

Из этих чисел нужно сгруппировать 3 множителя.

Т.к. сумма любых двух двузначных натуральных чисел - число двузначное или трехзначное, то мы обязаны сгруппировать в один из множителей 2 однозначных числа, причём, не 3 и 5, т.к. $3 \cdot 5 = 15$ $15 < 21$; $15 < 22$.

В один из множителей мы ~~можем~~ не можем сгруппировать 3; 5 и 7, т.к. ещё один из множителей будет равен 19; $19 < 21$; $19 < 22$.

Также, нельзя группировать 79 ни с одним из чисел, т.к. наименьшее произведение с числом 79:

$$3 \cdot 79 = 237 > 198.$$

8

Чистовик №4

Попробуем просчитать несколько следующих значений этого ряда

$x_3 = \cancel{x} - 1$

$x_4 = x_3 \cdot x_1 = -1$

$x_5 = x_4 x_2 = -1$

$x_6 = x_5 x_3 = 1$

$x_7 = x_6 x_4 = -1$

$x_8 = x_7 x_5 = 1$

$x_9 = x_8 x_6 = 1$

$x_{10} = x_9 x_7 = -1$

$x_{11} = x_{10} x_8 = -1$

$x_{12} = x_{11} x_9 = -1$

$x_{13} = x_{12} x_{10} = 1$

$x_{14} = x_{13} x_{11} = -1$

$x_{15} = x_{14} x_{12} = 1$

$x_{16} = x_{15} x_{13} = 1$

$$7\left\{\begin{array}{l} x_3 = -1 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = -1 \\ x_6 = 1 \\ x_7 = -\cancel{1}\,1 \\ x_8 = 1 \\ x_9 = 1 \end{array}\right.$$

Заметим, что, начиная с x_3 включительно, появляется цикл, длиной 7, который будет повторяться и далее.

Т.к. нам нужно найти x_{2022}, то нам нужно найти 2022-~~е~~е число последовательности. ~~x~~ Т.к. x_1 и x_2 не входят в цикл, то вычтем их. То есть ~~нам~~ нужно найти 2020-е число последовательности, начинающейся с ~~9~~ x_3.

~~2020~~ $2022 - 2 = 2020$

$2020 = 7 \cdot 288 + \underline{\underline{4}}$

То есть x_{2022} будет соответствовать ~~4-ому~~ 4-ому элементу цикла, то есть 1.

Ответ: 1.

7

Чистовик №7

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x \neq 0, y \neq 0$$

$$\frac{1}{2022} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$$

$$\frac{xy - 2022y - 2022x}{2022xy} = 0$$

~~xy - 2022~~

$$\begin{cases} xy - 2022y - 2022x = 0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$xy - 2022y - 2022x = 0$$

$$xy = 2022(x+y)$$

Разложим 2022 ~~Заметим, что число~~ $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, ~~где~~
на простые множители

$$xy = 2 \cdot 3 \cdot 337\,(x+y)$$

Т.к. левая часть не равна нулю, то и правая часть ~~этого~~ ~~уг~~ не равна нулю, значит, $(x+y) \neq 0$

$x \neq -y$

Тогда без ограничения общности $x = (x+y) \cdot n$, где ~~$n = 2$ или $n = 3$ или $n = 337$~~ $n \in \mathbb{N}$, а y - ~~чисвой~~ множитель.

То есть нужно посчитать варианты, как мы можем скомбинировать числа $2; 3$ и 337.

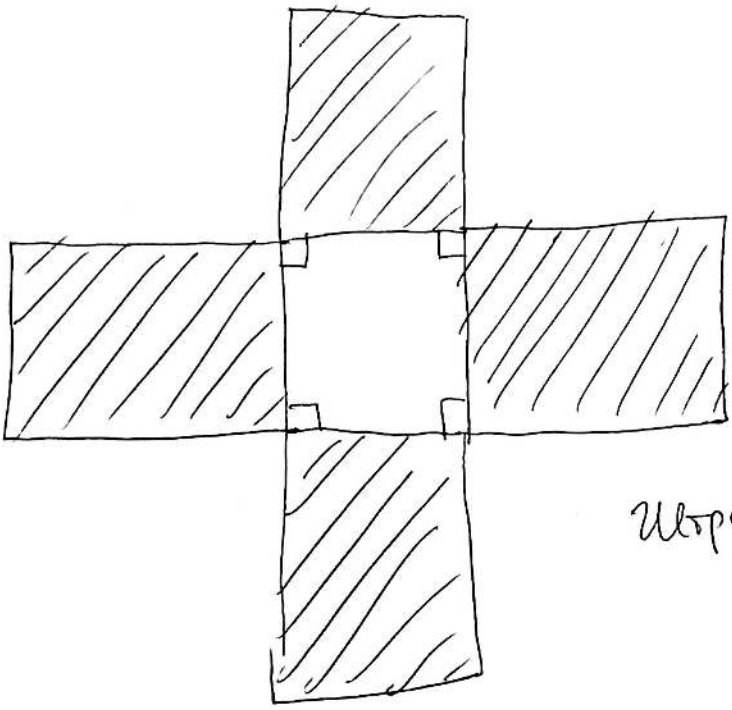
Если ~~в~~ брать 1 число: 3 варианта, если брать 2 числа $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ варианта, если брать 3 числа, то есть всего ~~один~~ 1 вариант. Итого, $1 + 3 + 3 = 7$ вариантов.

Ответ: 7 решений.

6

Чистовик. №3.

Да, можно, разместив их таким образом:



Штриховкой показаны данные прямоугольники.

5

Черновик ч.

$x_4 = x_3 \cdot x_1 = (-1) \cdot 1 = -1$

$x_5 = x_4 \cdot x_2 = (-1) \cdot 1 = -1$

$x_6 = x_5 \cdot x_3 = (-1)(-1) = 1$

$x_7 = x_6 \cdot x_4 = -1$

$x_8 = x_7 \cdot x_5 = 1$

$x_9 = x_8 \cdot x_6 = 1$

$x_{10} = x_9 \cdot x_7 = -1$

1	1
2	1
3	-1
4	-1
5	-1
6	1
7	-1
8	1
9	1
10	-1
11	-1
12	-1
13	1
14	-1
15	1
16	1

...

$288 \cdot 7 = 2016$

$2020 : 7 = 288$
-14
62
-56
60
-56
4

2022 - 2 = 2020

2020 = 4·

7

1

4

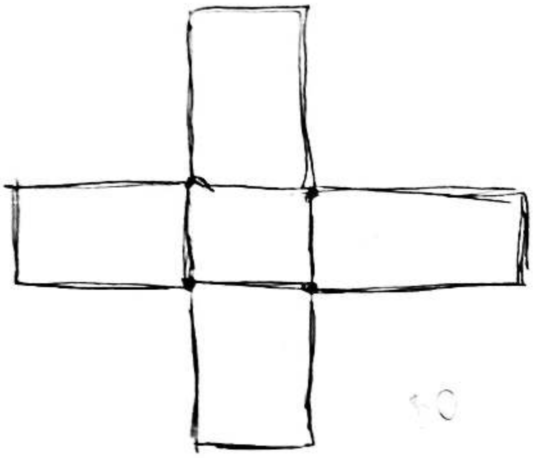
Черновик. №5. $\frac{10500}{7}$

$$\begin{array}{r|l} 10500 & 7 \\ -7 & \overline{1500} \\ 35 & \\ -35 & \\ 00 & \end{array}$$

 ×4

$10507 \cdot 15 = 157605$

$1501 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 157605$



$11^2 = (10+1)^2 = 100 + 20 + 1 = 121$

$521 \cdot 5 = 2605$

$$\begin{array}{r|l} 157605 & 5 \\ -15 & \overline{31521} \\ 7 & \\ -5 & \\ 26 & \\ -25 & \\ 10 & \\ -10 & \\ 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 31521 & 3 \\ -3 & \overline{10507} \\ 15 & \\ -15 & \\ 21 & \end{array}$$

$18 \cdot 6 = 108$

Черновик №5.

~~$\overline{abcde}$~~ $\quad 0 < a, b, c, d \le 9$; $0 \le e \le 9$

$10a + 11b + c$

$(\overline{ab} + \overline{bc})(\overline{bc} + \overline{cd})(\overline{cd} + \overline{de}) = 157605$

$(10a + b + 10b + c)(10b + c + 10c + d)(10c + d + 10d + e) = 157605$

$(10a + 11b + c)(10b + 11c + d)(10c + 11d + e) = 157605$

$((\overline{ab} \cdot \overline{bc}) + (\overline{ab} \cdot \overline{cd}) + \overline{bc}^2 + (\overline{bc} \cdot \overline{cd})) \cdot (\overline{cd} + \overline{de}) = 157605$

$10c + 11d + e$

$$\begin{array}{r|l} 1501 & 13 \\ -13 & \overline{11} \\ 20 & \\ -13 & \\ 7 & \end{array}$$

$19 \cdot 8 = 80 + 72$

$19 \cdot 7 = 70 + 63$

$79 \cdot 3 = 237$

$$\begin{array}{r|l} 1501 & 19 \\ -133 & \overline{79} \\ 171 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1501 & 17 \\ -136 & \overline{8} \\ 141 & \end{array}$$

$79 \cdot 19 = 1501$

$19 \cdot 9 = 90 + 81$

$79 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 157605$

79.

3

Чистовик ~~Черновик~~ №1

Пусть a кг, b кг, c кг — масса поднятых штанг ~~первым,~~ ~~вторым и третьим штангистом~~ штангистами А, Б и В соответственно $a \in R_+$; $b \in R_+$, $c \in R_+$

Т.к. масса штанг, поднятых штангистами А и Б, равна 220 кг, масса штанг, поднятых штангистами А и В, равна 240 кг, масса штанг, поднятых штангистами Б и В, равна 250 кг, то составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 220 \\ a + c = 240 \\ b + c = 250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a + b + c) = 710 \\ a + b = 220 \\ a + c = 240 \\ b + c = 250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 355 \\ a + b = 220 \\ a + c = 240 \\ b + c = 250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 135 \in R_+ \\ b = 115 \in R_+ \\ a = 105 \in R_+ \end{cases}$$

$105 < 115 < 135$

Ответ: 135 кг.

Черновик №2

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} \quad ; x \in Z ; y \in Z \; , x \neq 0 \, , y \neq 0$$

$2022(x+y) = xy$

$2022x + 2022y = xy$

$2022y = xy - 2022x$

$2022y = x(y - 2022)$

$$\frac{1}{2022} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$$

$$\frac{xy - 2022y - 2022x}{2022xy} = 0$$

$\cancel{y(x-2022)}$

$xy - 2022y - 2022x = 0$

$x \neq 0$

$y \neq 0$

$xy = 2022(x+y)$

$xy = 337 \cdot 2 \cdot 3(x+y)$

$y = 3(x+y)$

$-9 = 3(-9+6)$

$x = (x+y) \cdot 2$

$x = (x+y) \cdot 3$

$x = (x+y) \cdot 6$

$2022 = 2 \cdot 1011$

$6 \cdot 337$

$x = k(x+y)$

$x = 2(x+y)$

$x \neq (x+y)$

$|x| \neq |y|$

$337 : 13$, -26, 77

$1011 : 3 = 337$, -9, 11, -9, 21

$3330 - 6 = 1980$

$337 : 17$, -17, 167

$337 : 19$, -19, 147

43

337

2