МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Мамаева Анастасия Евгеньевна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	15	15	5

Чистовик 1

Задача 1

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{97}{(49\cdot 50)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$$

$$A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50}\right)\left(\frac{1}{49} + \frac{1}{50}\right) =$$

$$= \frac{1}{1^2} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{49^2} - \frac{1}{50^2} = 1 - \frac{1}{50^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$$A = 1 - \frac{1}{50^2}$$

$A < 1$

$B = 1$

Ответ: $A < B$

Задача 2

Выпишем все числа, кратные 19 и 23

Двузначные

19	23	95769
38	46	9238
57	69	
76	92	
95		

Если сначала стоит 9, то потом есть два варианта, либо 95, либо 92. После 2 точно 3. После 3 может быть только 8, но после 8 уже ничего быть не может. Значит, такой вариант может быть только в конце. Если после 9 идёт 5, то затем обязательно 7, затем 6, затем снова 9. Тогда наше число это $\underbrace{9576\ 9576\ldots 9576}_{2020}9$. На последнем месте может быть как 2 так и 5.

Листовик 2

Продолжение задачи 2

При этом оба варианта возможны.

Ответ: в конце 2 или 5

Задача 3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$f^9(x) = \frac{1}{1-x^9}$$

$$f^9(x) - 1 = \frac{-1}{x^9-1} - 1$$

Обозначим $a_0 = x^9 - 1$ и $a_n = (f(f(\dots f(x)))^9 - 1$

Тогда из того, что $f^9(x) - 1 = \frac{-1}{x^9-1} - 1$ получим, что

$a_{n+1} = \frac{-1}{a_n} - 1 \quad n = 0, 1, \dots$

Тогда $a_{n+2} = \frac{-1}{-\frac{1}{a_n} - 1} - 1 = \frac{a_n}{1+a_n} - 1 = \frac{-1}{a_n+1}$

$a_{n+3} = \frac{-1}{a_{n+2}} - 1 = a_n + 1 - 1 = a_n$, значит $a_{n+3} = a_n$, $n = 0, 1 \dots$

Т.к. $1305 \vdots 3$ $(1+3+5 \vdots 3)$, то $a_{1305} = a_{1302} = \dots = a_3 = a_0$

Тогда необходимо найти $\sqrt[9]{a_{1305}+1}$ в точке 2022, это будет равно $\sqrt[9]{a_0+1}$ в точке 2022, т.е. это будет равно 2022

Ответ: 2022

Чистовик 4

Задача 5

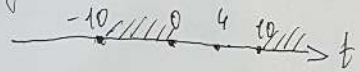
Заметим, что среднее из 3 чисел больше нуля, тогда и только тогда, когда хотя бы 2 из 3 чисел больше 0

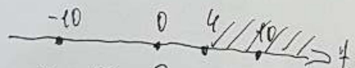
$t^3 - 100t > 0 \quad (t+10)(t-10) > 0 \quad t \in (-10; 0) \cup (10; +\infty)$

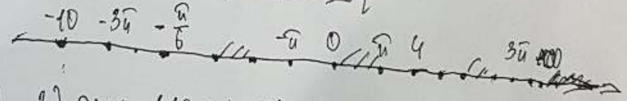
$2^t - 16 > 0 \quad t \in (4; +\infty)$

$\sin t - \frac{1}{2} > 0 \quad t \in \cup\left(2\pi k + \frac{\pi}{6}; 2\pi k + \frac{5\pi}{6}\right)$ - объединение интервалов.

Значит, все подходящие t лежат в пересечении хотя бы двух из трёх данных множеств

1) $t^3 - 100t > 0$ 

2) $2^t - 16 > 0$ 

3) $\sin t - \frac{1}{2} > 0$ 

Пересечение 1) и 2) это $(10; +\infty)$

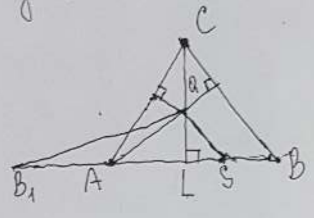
Пересечение 2) и 3) это $\left(2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$, а всё остальное это пересечение 1) и 2)

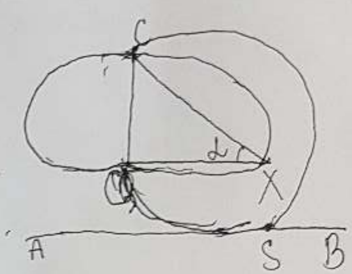
Пересечение 1) и 3) это $\left(-10; -3\pi - \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(-3\pi + \frac{\pi}{6}; -\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ и все остальные в 1) и 2)

Ответ: $\left(-10; -3\pi - \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(-2\pi + \frac{\pi}{6}; -\pi - \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) \cup (10; +\infty)$

Чистовик 5

Задача 7





Множество точек X из которых отрезок CQ виден под углом α – это две дуги окружности W. Тогда угол будет максимальным, когда эта окружность касается AB. Тогда $LQ \cdot LC = LS^2$.

Отразим т. B относительно L. Получим B_1.

Тогда $\angle QB_1L = \angle QBL = \angle ACL$. (т.к. Q – точка пересечения высот)

Тогда $BA'QC$ – вписанный.

Тогда $LQ \cdot LC = LA \cdot LB = 2 \cdot 5 = 10$

При этом $LQ \cdot LC = LS^2$; значит $LS^2 = 10$, $LS = \sqrt{10}$

Ответ: $\sqrt{10}$

Чистовик 6

Задача 6

$a\,tg^3 x + (1 - a - 2a^2)\, tg^2 x + (2a^2 - 2a - 1)\, tg x + 2a = 0$

$(tg x - 1)(a\, tg^2 x - (2a^2 - 1)\, tg x - 2a) = 0$

$(tg x - 1)(tg x - 2a)(a\, tg x + 1) = 0$ на $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

Если $a = 0$, то корни уравнения это $arctg\, 1 = \frac{\pi}{4}$ и $arctg\, 0 = 0$, и расстояние между ними $\frac{\pi}{4}$ на $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

Если $a \neq 0$, то будут 3 корня

$arctg\, 1 = \frac{\pi}{4}$; $arctg\, 2a$, $arctg - \frac{1}{a}$.

Если $a > 0$, то $arctg - \frac{1}{a} < 0$, тогда расстояние между $arctg - \frac{1}{a}$ и $\frac{\pi}{4}$ уже больше $\frac{\pi}{4}$.

Если $a < 0$, то $arctg\, 2a < 0$, тогда расстояние между $arctg\, 2a$ и $\frac{\pi}{4}$ также больше $\frac{\pi}{4}$. Значит минимальным оно будет при $a = 0$. Расстояние в этом случае равно $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: при $a = 0$, расстояние равно $\frac{\pi}{4}$

Черновик 1

Задача 2.

Выпишем все числа, кратные 19 и 23.

Двузначные

19	23
38	46
57	69
76	92
95	

Черновик 2

1.

Задача-1

$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{97}{(49\cdot 50)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$

$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{97}{(49\cdot 50)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2} > 0$, очевидно

$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$

$\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} < 0$, т.к. $\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} < \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}$

т.к. $4 - 2\sqrt{3} < \sqrt{3}+1$ т.к. $(4-2\sqrt{3})^2 < (\sqrt{3}+1)^2$

$16 - 16\sqrt{3} + 12 < 3 + 2\sqrt{3} + 1$

Т.к. $B < 0 < A$, то $A > B$

Ответ: $A > B$

Задача 2

Задача 2 Черновик 3

Выпишем все числа, кратные 19 и 23

Двузначные:

19	23	5769
38	46	9238
57	69	
76	92	
95		

Если сначала стоит 9, то потом есть два варианта, либо 95, либо 92. После 2 точно 3. После 3 может быть только 8, но после 8 уже ничего быть не может. Значит, такой вариант может быть только в конце.

Если после 9 идёт 5, то затем обязательно 7, затем 6 и затем снова 9. Тогда наше число это $\underbrace{9576\ 9576\ldots 95769}_{2020}$. На последнем месте может быть как 5, так и 2. При этом оба варианта возможны

Ответ: в конце 2 или 5