**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Маршалкина Анастасия Вадимовна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

**Результаты проверки:**

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 0 | 15 |

Чистовик Лист №1

Задача 1

Какое из чисел больше?

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$$

или

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

Решение:

1) $A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$

так как $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2}}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

то $A = \left(\frac{1}{1^2} - \cancel{\frac{1}{2^2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2^2}} - \cancel{\frac{1}{3^2}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{49^2}} - \frac{1}{50^2}\right) =$

$= 1 - \frac{1}{50^2}$

2) $\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = \sqrt[3]{|\sqrt{3}-1|} = \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$

тогда $B = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \underline{1}$.

3) $A = 1 - \frac{1}{50^2} < \underline{1} \Rightarrow$ число $B$ больше.

Ответ: B.

Задача 2. Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 9. Какой цифрой оно заканчивается?

Решение:

1) Двузначные, кратные 19: 19, 38, 57, 76, 95.

Двузначные, кратные 23: 23, 46, 69, 92

Чистовик Лист №2.

Задача 2 (продолжение).

2) Если первое число 9, то

а) начинается $95 \to 57 \to 76 \to 69 \to \ldots$

или

б) начинается $92 \to 23 \to 38$.

но на 8 нет чисел среди выше перечисленных. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ будет повторяться цепочка а):

9576, 9576, ....

до самого конца или последняя цепочка ...9238

так как число содержит 2022 цифры,

$2022 = 4 \cdot 505 + 2$, то в числе вместится 505

цепочек „9576" и две цифры „95".

в этом случае последняя цифра 5.

~~Так как~~ Также можно взять 505 цепочек „9576"

и в конце расположить „92" из цепочки (б)

в этом случае последняя цифра 2.

Ответ: 5 или 2.

Задача 3

Дана функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$

Вычислите $f(f(f(f(f(\ldots f(2022)))) \ldots))$,

где функция $f$ применяется 1305 раз.

Решение:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}} = t$$

$$f(f(x)) = f(t) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-t^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{-\frac{x^9}{1-x^9}}} =$$

$$= \sqrt[9]{\frac{x^9-1}{x^9}} = \sqrt[9]{1-\frac{1}{x^9}}$$

~~F(x)~~ Чистовик Лист № 3.

Задача 3 (продолжение)

$f(f(x)) = \sqrt[9]{1-\frac{1}{x^9}} = u$

$f(f(f(x))) = f(u) =$

$= \frac{1}{\sqrt[9]{1-u^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1-(1-\frac{1}{x^9})}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1}{x^9}}} = \sqrt[9]{x^9} = x.$

$f(f(f(x))) = x$

Число 1305 делится на 3.

Это значит, что ответ $f(f(f(f(f(\dots f(2022))))\dots)) =$

Ответ: 2022.

$= 2022.$

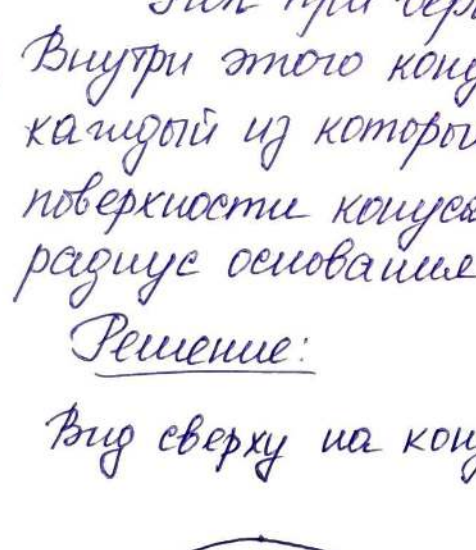
Задача 4.

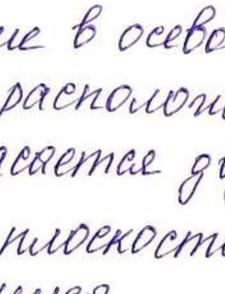
Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Внутри этого конуса расположены 13 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Решение:

Вид сверху на конус: $O_1'O_2'\dots O_{13}'$ - правильный 13-ти угольник где $O_k'$ - проекция $O_k$ на плоскость основания

Сторона равна $2R=4$.



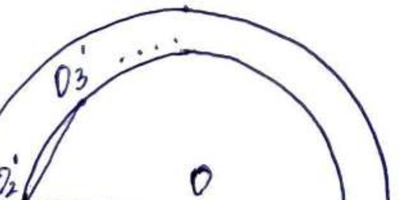

осевое сечение

$KO_1' = 2\cdot \mathrm{ctg}\,30° = 2\sqrt{3}$

$\| \; O_2L$

$\angle OO_1O_2 = \frac{\pi}{2}^{13} - \frac{\pi}{13}^{2} = \frac{11\pi}{26}$

$OO_1 = \frac{2}{\cos\frac{11\pi}{26}}$




$R_{основания} = \frac{2}{\cos\frac{11\pi}{26}} + 2\sqrt{3}$

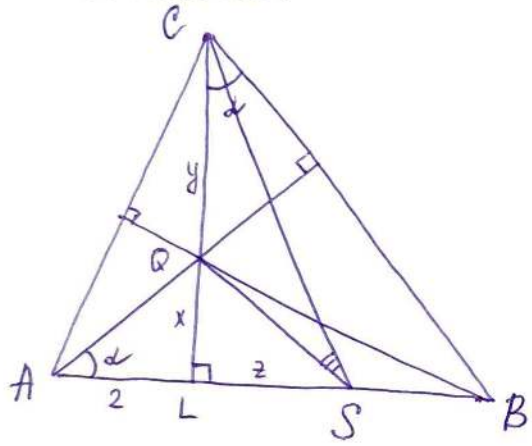
Ответ: $\frac{2}{\cos\frac{11\pi}{26}} + 2\sqrt{3}$

Чистовик Лист №4

Задача 7

Высота CL остроугольного треугольника ABC пересекаются с его другими высотами в точке Q. Точка S лежит на отрезке AB так, что величина угла CSQ максимальна. Найдите LS, если AL = 2, LB = 5.

Решение:




$\angle QSC = \angle LQS - \angle LCS$ - по св-ву внешнего угла

$\alpha \max \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \max \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{LS}{x} - \operatorname{arcctg}\frac{LS}{x+y}\right)\uparrow$

$$\frac{\frac{z}{x} - \frac{z}{x+y}}{1 + \frac{z^2}{x(x+y)}}$$

$$\underbrace{F(z)}_{x,y \text{ параметры}} = \frac{z(x+y-x)}{x^2+xy+z^2} = \frac{zy}{x^2+xy+z^2}$$

$$F_z' = \frac{y(x^2+xy+z^2) - zy\cdot 2z}{(x^2+xy+z^2)^2} = \frac{y(x^2+xy-z^2)}{(x^2+xy+z^2)^2}$$

$$\underset{0}{|} \xrightarrow{\quad + \quad} \underset{\sqrt{x^2+xy}}{|} \xrightarrow{\quad - \quad} z$$

Вывод: $LS^2 = QL \cdot CL$

$QL = 2\operatorname{tg}\alpha$; $CL = 5\operatorname{ctg}\alpha$.

$LS^2 = 2\operatorname{tg}\alpha \cdot 5\operatorname{ctg}\alpha = 10.$

$LS = \sqrt{10} \in (0;5)$

Ответ: $\sqrt{10}$

Чистовик Лист №5

Задача 5.

Если действительные числа $a, b, c$ упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \le x_2 \le x_3$, то число $x_2$ будем называть средним из чисел $a, b, c$. Найдите все значения $t$, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 100t;\quad b = 2^t - 16;\quad c = \sin t - \frac{1}{2}$$

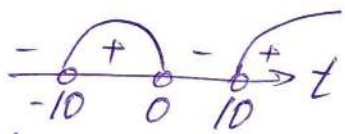
положительно.

Решение:

Выясним, когда $\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \\ c>0 \end{matrix}$ ?

$a>0 \Leftrightarrow t^3 - 100t > 0$

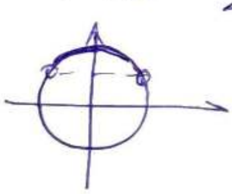
$t(t^2-100)>0$




$t \in (-10;0) \cup (10;+\infty)$.

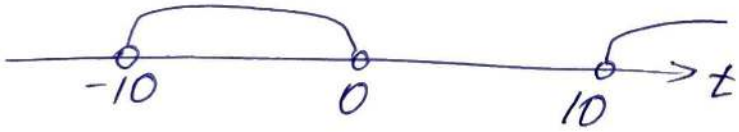
$b>0 \Leftrightarrow 2^t > 16 \Leftrightarrow t>4.$

$c>0 \Leftrightarrow \sin t > \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \underset{k}{\cup}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right).$



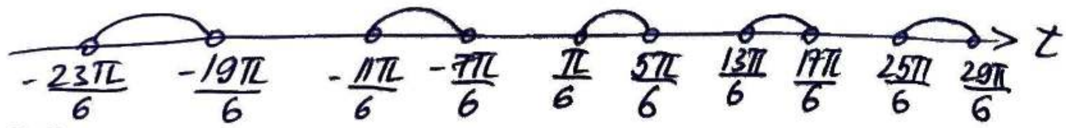
Отметим на прямой:

$a>0$




$b>0$


$c>0$




$\frac{5\pi}{6} < \frac{5\cdot 3{,}2}{6} = \frac{16}{6} < 4$

$\frac{17\pi}{6} < \frac{17\cdot 3{,}2}{6} = \frac{27{,}2}{3} < 10.$

$\frac{25\pi}{6} > \frac{25\cdot 3}{6} > 10$

$-\frac{19\pi}{6} > -\frac{19\cdot 3{,}14}{6} = -\frac{59{,}66}{6} > -10$

$-\frac{23\pi}{6} < -\frac{23\cdot 3}{6} < -10.$

Чистовик. Лист №6.

Задача 5 (продолжение).

Для того, чтобы среднее трех чисел было положительным, необходимо и достаточно, чтобы положительными были хотя бы 2 числа из трех.

Это верно при $t \in \left(-10; -\frac{19\pi}{6}\right) \cup \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup$

$$\cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (10; +\infty).$$

Ответ: $\left(-10; -\frac{19\pi}{6}\right) \cup \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (10; +\infty)$.

Задача 6.

При каких значениях параметра $a \in R$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a\,tg^3 x + (1-a-2a^2)\,tg^2 x + (2a^2-2a-1)\,tg\,x + 2a = 0.$$

Решение: Сделаем замену $t = tg\,x$, $\forall t_0$ существует, причем единственное, $x_0 \in (0;\pi)$ такое, что $tg\,x_0 = t_0$.

$$at^3 + (1-a-2a^2)t^2 + (2a^2-2a-1)t + 2a = 0.$$

$t = 1$ подходит $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l}
at^3 + (1-a-2a^2)t^2 + (2a^2-2a-1)t + 2a & t-1 \\ \hline
at^3 - at^2 & at^2 + (1-2a^2)t - 2a \\ \hline
\quad (1-2a^2)t^2 + (2a^2-2a-1)t & \\
- \; (1-2a^2)t^2 - (1-2a^2)t & \\ \hline
\qquad -2at + 2a & \\
\quad - \; -2at + 2a & \\ \hline
\qquad\qquad 0. &
\end{array}$$

$$at^2 + (1-2a^2)t - 2a = 0.$$

$a = 0 \Rightarrow t = 0.$

$a \neq 0 \Rightarrow t^2 + \left(\frac{1}{a} - 2a\right)t - 2 = 0. \Leftrightarrow t =$

Черновик Лист №1.

№1

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{(4-2\sqrt{3})^{\frac{2}{6}}\cdot(\sqrt{3}+1)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= (4-2\sqrt{3})^{\frac{2}{6}}\cdot(\sqrt{3}+1-2)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= (4-2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}\cdot(\sqrt{3}-1)^{\frac{2}{3}} = $$

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{(2\cdot 3)^2} = \frac{5}{36}$$

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$49 \times 50 = 2450$; $2450 - 2352 = 108$; $48 \times 49 = 2352$

№2 2022значное ⇒ чётное кол-во.

2значное :19 или :23

| :19 | :23 |
|---|---|
| 19 | 23 |
| 38 | 46 |
| 57 | 69 |
| 76 | 92 |
| 95 | |

$19\times 3 = 57$, $19\times 4 = 76$, $19\times 5 = 95$, $23\times 3 = 69$, $23\times 4 = 92$

заканчивается на 5 либо 2. ~~либо 1~~.

9 . . . . . . . . 5

9 . . . . . . . . 2.

9 . . . . . . . 1.

№3 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$

$f(f(f(f(f(\ldots f(2022)))\ldots)))$.

f применяется 1305 раз.

$$f(2022) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-2022^9}} =$$

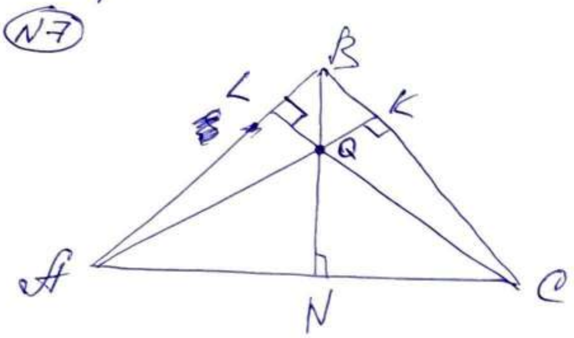
$$= \frac{1}{\quad}$$

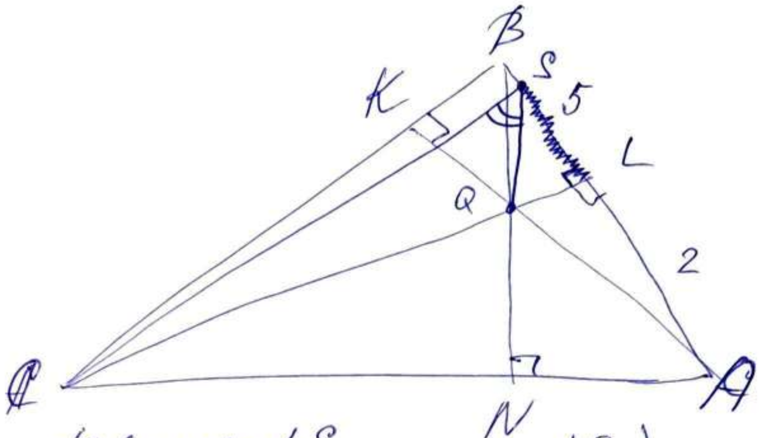
$$f(f(x)) = \sqrt[9]{1-\frac{1}{x^9}} = u.$$

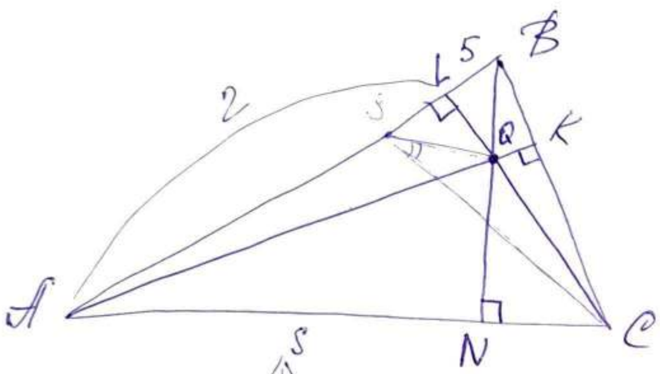
$2a^2-2a-1$

Черновик Лист №2.

№7



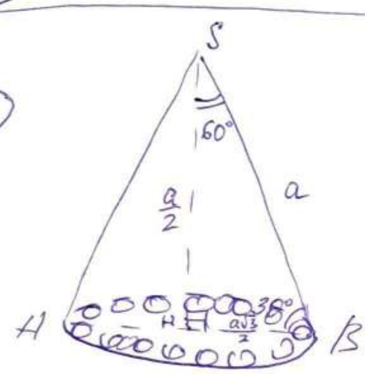




$tg(arcctg \frac{LS}{x} - arcctg \frac{LS}{x+y})$

$$\frac{\frac{z}{x} - \frac{z}{x+y}}{1 + \frac{z^2}{x(x+y)}} \to \text{произв.}$$

№4



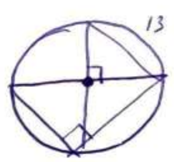

$r = 2 \Rightarrow d = 4.$

шары по дуге

$l_{окр-ти} = 13 \cdot 4 = 52$

$$\boxed{HB = \sqrt{SB^2 - SH^2}}$$

$$HB = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$




$360 - 52$

$52 : 4 = 13$

$2 \cdot ctg 30° = 2 \cdot \sqrt{3}.$

$\frac{\pi}{2}$ ; $\frac{\pi}{13}$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{13} = \frac{11\pi}{26}.$

№5 $a, b, c$, $x_1 \le x_2 \le x_3 \to x_2$ - среднее

$a = t^3 - 100t$; $b = 2^t - 16$; $c = \sin t - \frac{1}{2}$