МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Маслова Александра Георгиевна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	0	15

Чистовик Лист 1/7

(1) $A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{99}{(49 \cdot 50)^2} =$

поскольку $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, как раз то, что надо.

$= \frac{2^2-1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2-2^2}{2^2 \cdot 3^2} \ldots \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2 \cdot (k+1)^2} + \frac{50^2-49^2}{49^2 \cdot 50^2} =$

$= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{49^2} - \frac{1}{50^2}\right) =$

$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{50^2} = 1 - \frac{1}{2500} = \frac{2499}{2500} < 1$

$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$= \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = 1$

$\Rightarrow A < B$, т.к. $\frac{2499}{2500} < 1$.

Ответ: число B больше.

---

(2) Выпишем все двузначные числа, которые могут встретиться: 19, 23, 38, 46, 57, 69, 76, 92, 95. (Это все двузначные числа, которые делятся либо на 19, либо на 23)

Обозначим наше число $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{2021}}$, и будем его строить слева направо исходя из допустимых сочетаний (двузначных чисел, написанных выше)

$a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_3 = 2 \Rightarrow a_4 = 3 \Rightarrow a_5 = 8 \Rightarrow a_6 = ? \quad \text{(Верхняя строчка)} \\ a_3 = 5 \Rightarrow a_4 = 7 \Rightarrow a_5 = 6 \Rightarrow a_6 = 9 \quad \text{(Нижняя строчка)} \end{array}\right.$

Знак $\Rightarrow$ означает однозначное следствие (понимаем однозначные следствия из перечисленных разрешенных 2значн. чисел)

Чистовик Лист 2/7

Если мы пошли по верхней строчке, то пришли в „тупик", т.к. нет соответствия для a_6.

По нижней строчке $a_6=9$ и опять для a_7 возникает 2 варианта, как для a_3. Но по условию для a_3 мы понимаем, что если $a_k=9$ и после него есть ≥ 4 цифры, то $a_{k+1}=5$, т.к. иначе мы опять придем к „тупику", когда нельзя подобрать a_{k+4}.

Т.е. наше число (его цифры) зациклились с циклом 4 и число выходит так: (циклов целое число т.к. $2021 \underset{4}{\equiv} 1$, эта единица в начале)

$$\cancel{11957}\ 1\,\underbrace{9576}\,\underbrace{9576}\,\underbrace{9576}\dots\underbrace{9576}\,\underbrace{\overset{9}{\vee}a_{2019}a_{2020}a_{2021}}$$

для каждой девятки, кроме последней (которая стоит в последнем блоке из 4 цифр), можно сказать, что после нее есть ≥ 4 цифры, поэтому этот блок можно написать однозначно (9576). Для девятки последнего блока возможно, что после нее идут цифры 238 (по верхней строчке), но и вариант нижней строчки тоже возможен. Т.о. число заканчивается либо цифрой 6, либо цифрой 8.

Ответ: 6 или 8.

(3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}=\frac{\sqrt[5]{x^5-1}}{x}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{\sqrt[5]{x^5-1}}{x}\right)^5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{x^5-x^5+1}{x^5}}}=x$$

⇒ Если 3 раза применить $f(x)$, получится просто x.

⇒ Если $3k$ раз применить $f(x)$, тоже будет x. ~~[illegible]~~

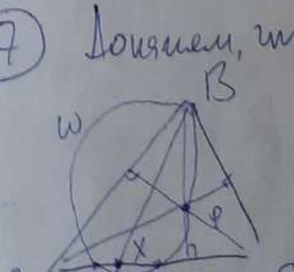
$1303=3\cdot 434+1$ ⇒ ~~Ес~~ 1303 раза применённая $f(x)$ это то же самое, что просто $f(x)$.

$$\Rightarrow \underbrace{f(f(f\ldots f}_{1303}(2022))..)=f(2022)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$$

Ответ: $\frac{-1}{\sqrt[5]{2022^5-1}}$

---

(7) Докажем, что точка N - точка касания окруж. BPN с прямой AC.

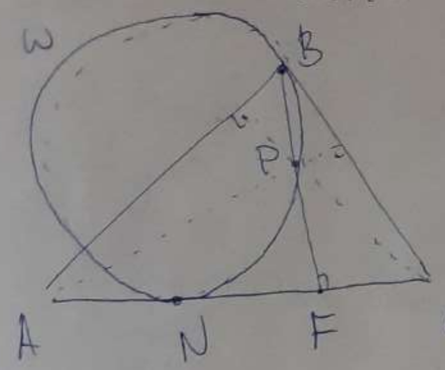


Пусть это не так и есть вторая т. пересечения N_1.
Возьмем какую-нибудь точку X на отрезке NN_1.
Тогда $\angle BXP=\angle BYP+\angle XPY$, где Y - вторая т. пересечение BX с ω.
как внешний угол.

$\angle BYP=\angle BNP$ как вписанные ⇒ $\angle BXP=\angle BNP+\angle XPY>\angle BNP$, противоречие, т.к. мы брали наибольший угол $\angle BNP$.

Чистовик лист 4/7

$\Rightarrow \omega$ касается AC.



$\angle PCF = \angle ABF$, т.к. они оба дополняют до 90° угол $\angle BAC$.

$\Rightarrow \triangle PFC \sim \triangle AFB$ по 2 углам.

$\Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{PF}{FC}$

$\Rightarrow FP \cdot FB = AF \cdot FC = 7 \cdot 2 = 14$

$FP \cdot FB$ = степень точки F относительно ω. = квадрат касательной. FN - касательная к $\omega \Rightarrow FN^2 = FP \cdot FB = 14$

$\Rightarrow FN = \sqrt{14}$

Ответ: $\sqrt{14}$

---

(5) Среднее число $>0 \Leftrightarrow$ есть хотя бы 2 положительных числа из трех.

$\Leftarrow$: Если 2 числа >0, то если третье <0, среднее одно из положительных, если третье >0, в любом случае среднее >0.

$\Rightarrow$: Если среднее >0, то есть одно больше либо равное ему, и оно тоже $>0 \rightarrow$ есть $\geqslant 2$ числа, больших 0.

Т.о, 2 утверждения равносильны.

Будем определять знаки у наших трех выражений от t на числовой прямой.

1) $t^3 - 144t = t(t-12)(t+12)$ $\quad$ $-$ $\;(-12)\;$ $+$ $\;(0)\;$ $-$ $\;(12)\;$ $+$

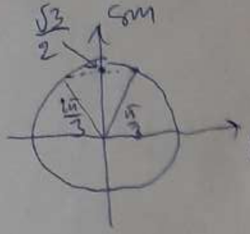
2) $2^t - 256$ $\quad$ $-$ $\;(8)\;$ $+$

По этим двум штукам мы уже видим, что $(-\infty; -12]$ точно не подходит, $[0;8]$ точно не подходит, $(12;+\infty)$ точно подхо-

Черновик Мет 5/7

дит (исходя из того, что ≥ 2 числа из 3 должны быть >0)

3) $\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Надо, чтобы оно было >0, т.к. (1) и (2) на оставшихся промежутках имеют разные знаки.



$\Rightarrow$ (3) принимает положительные значения на ~~отрезках~~ промежутках при $t \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Нам надо рассмотреть $k=-2$, $k=-1$, $k=1$, т.к.

при $k \leq -3$: $\frac{2\pi}{3} - 6\pi = -\frac{16\pi}{3} < -12$, $-16\pi < -36$, $\pi > \frac{9}{4}$.

при $k=0$ попадает в $[0;8]$

при $k \geq 2$: $\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3} > 12$; $\pi > \frac{36}{13}$.

Для $k=-2$: проверяем, что наш промежуток $\left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right)$ лежит в $(-12;0)$: $-\frac{11\pi}{3} > -12$, $\pi < \frac{36}{11} = 3\frac{3}{11}$. Это правда, т.к.

$\frac{3}{11} > 0{,}15$

$-\frac{10\pi}{3} < 0$ Ясное дело

Для $k=-1$ все хорошо, т.к. этот ~~отрезок~~ промежуток $\left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right)$ лежит правее, чем $\left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right)$ и левее, чем 0.

Для $k=1$ получается ~~отрезок~~ промежуток $\left(\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right)$,

$\frac{7\pi}{3} < 8$; $\pi < \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$

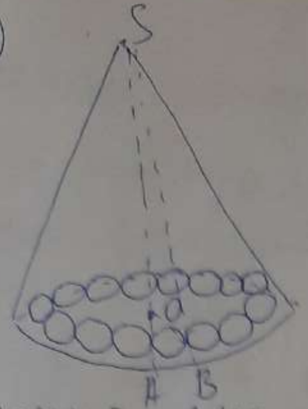
$\frac{8\pi}{3} > 8$; $\pi > 3$.

$\Rightarrow$ он входит только от ~~$\frac{7\pi}{3}$~~ 8 до $\frac{8\pi}{3}$.

Ответ: $\left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(8; \frac{8\pi}{3}\right) \cup (12; +\infty)$

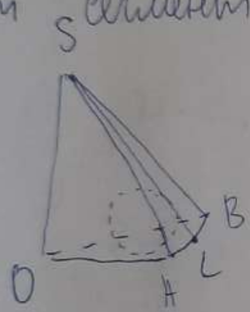
Чистовик Лист 6/7

4



Возьмем какой-то шар и проведем 2 плоскости, которые касаются этого шара и соответственно шаров с обеих сторон от него. Такие 2 плоскости отделяют от конуса „сегмент", составляющий 1/19 от всего конуса (т.к. из симметрии картинки (все 19 шаров одинаковые и расположить можно их только 1 способом) 19 таких общих касательных плоскостей делят конус на 19 равных сегментов)

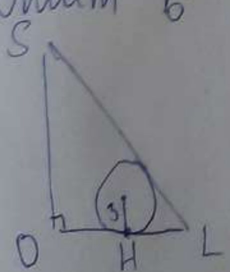
Этот сегмент выглядит так:



и в него вписана сфера, касающаяся 3 плоскостей и боковой поверхности.

Этот сегмент вместе с сферой симметричен относительно плоскости SOL, где SL - биссектриса угла ASB, т.к. тогда плоскость SOL делит пополам двугранный угол $\angle A(SO)B$.

$\Rightarrow$ точка касания сферы с плоскостью AOB и с повер-ю SAB, а также центр сферы лежат в плоскости SOL.



в $\triangle$ SOL углы $30°, 90°, 60°$, т.к. известно, что $\angle$ в осевом сечении равен $60°$.

Радиус сферы 3 $\Rightarrow HL = 3\sqrt{3}$.

Радиус основания конуса $OL = OH + HL$.

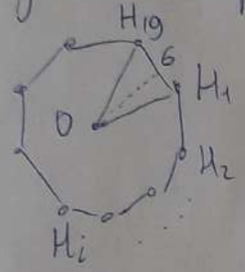
Надо найти OH.

Все проекции центров сфер в плоскость основания образуют правильный 19-угольник со стороной 6, т.к.

| Чистовик Мет 7/7 |

Расстояние между двумя соседними центрами сфер $=6$, и они проецируются в плоскость основания, ~~оставаясь~~ причем расстояния до основания от центров сфер одинаковы и равны ~~трём~~ 3 $\Rightarrow$ расстояние между проекциями центров тоже 6.

19-угольник правильный из симметрии.



$H_1H_{19} = 6$

$\angle H_1OH_{19} = \frac{2\pi}{19}$

$\Rightarrow OH_1 = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}}$

$$R = OL = OH + HL = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}} + 3\sqrt{3}$$

Ответ: $\frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}} + 3\sqrt{3}$.

Черновик 1/3

① $\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\ldots+\frac{99}{(49\cdot50)^2}$

$\frac{2^2}{1^2\cdot2^2}-\frac{1^2}{1^2\cdot2^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}$

$\frac{3^2-2^2}{2^2\cdot3^2}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}$

…

$1-\frac{1}{50^2}=\frac{2499}{2500}$

$\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt3+1}}{\sqrt[3]{2}}$

$1-2\sqrt3+3=(1-\sqrt3)^2$

$\sqrt[3]{(\sqrt3-1)(\sqrt3+1)}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=1$

первое < второе

---

② $\overline{a_1a_2\ldots a_{2021}}$

либо $a_ia_{i+1} \vdots 19$
либо $\vdots 23$

$a_1=1$
$a_2=9$
$a_3=2;5$
$a_4=3\ \ 7$
$a_5=8\ \ 6$
$a_6=?\ \ 9$
$\ \ \ \ \ \ 5$

$23\times4=92$ $\quad 19\times5=95$

$23\times3=69$ $\quad 19\times4=76$

$+23$

19 38 57 76 95
23 46 69 92

$\underbrace{19}\underbrace{5769}\underbrace{5769}_{504}\underbrace{57..9}\underbrace{238}$

либо 8
либо 6

$2021-2=2019$

$2020 : 4 = 505$

$1\underbrace{976}$

Черновик 2/3

(3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}}=\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}$

$f(f(\ldots f(2022))))$

f 1303 раз

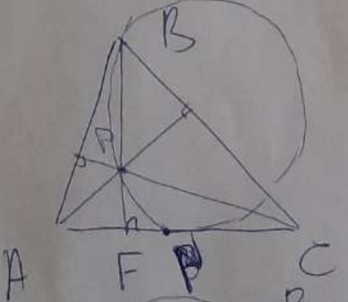
$f\left(\frac{\sqrt[5]{x^5-1}}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{x^5-1}{x^5}}}=$

$f(f(f(x)))=x$ $=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{x^5-x^5+1}{x^5}}}=$ *

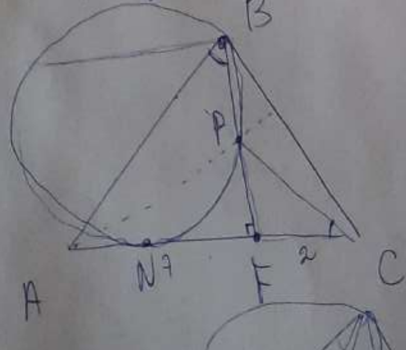
$1303=3k+1 \Rightarrow \underbrace{f(f\ldots}_{1303}(2022)))=f(2022)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

$1302 \,|\, 3 = 434$
-12
10
-9
12

(7)



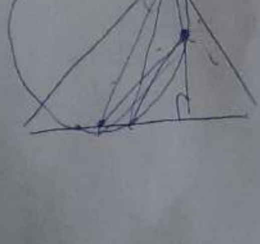
FN-?
AF=7
FC=2



$\frac{AF}{FB}=\frac{FP}{FC}$

$FP \cdot FB=14$

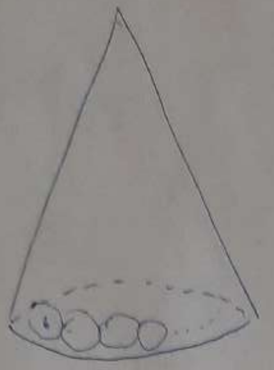
$FN=\sqrt{14}$

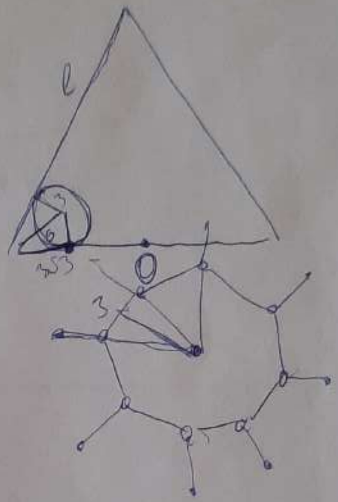


Если не касание (от противного)

Черновик 3/3

(4)





Если l не пересекает окружность

Ответ: $\left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(8; \frac{8\pi}{3}\right) \cup (12; +\infty)$

$\frac{2\pi}{19}$

$\frac{2\pi}{38}$

$\frac{3\sqrt{3}}{\cos\frac{2\pi}{19}} + \sqrt{3}\cdot 3$

1) $t^3 - 144t$

2) $2^t - 256$

3) $\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Среднее полож.

$\Leftrightarrow$ есть ≥ 2 полож. числа

$0{,}15 = \frac{3}{20}$ $\quad \pi > \frac{36}{13}$ $\quad \frac{2\pi}{3} - \frac{18\pi}{3} = -\frac{16\pi}{3} < -12$

$-16\pi < 36$

$-4\pi < 9$

$\frac{9}{4} < \pi$

t 1) t^3 $\Rightarrow$ $t(t+12)(t-12)$

$\frac{2\pi}{3} - 4\pi > -12$

$-\frac{10\pi}{3} > -12$

$-12; 0$

2) $2^t - 256$

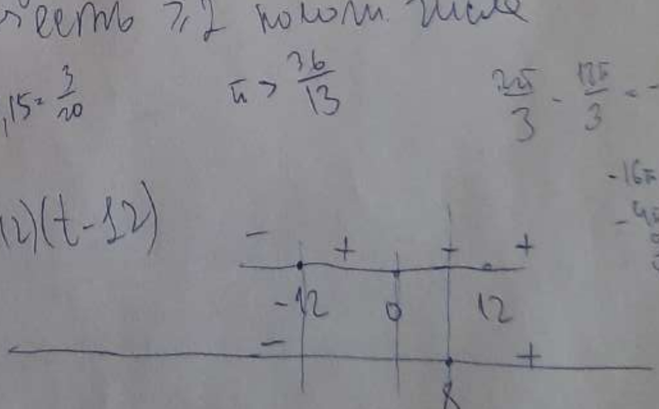
$-\frac{5\pi}{3} > -6$

$-6 > -\frac{18}{5}$

3) $\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

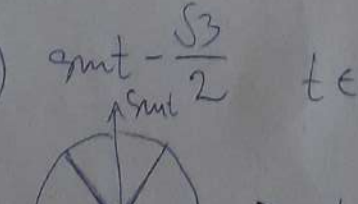
$-\frac{11\pi}{3} > -12$

$\frac{36}{11} > \pi$



$t \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ $\quad \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}$ $\quad \frac{13\pi}{3} > 12$

$\left(8; \frac{8\pi}{3}\right)$ подх.



$\frac{7\pi}{3} < 8$ $\quad 3,\frac{3}{11}$

$\pi < \frac{24}{7}$ $\quad \frac{3}{11} > 0{,}14$

≤ -12 точно не под $\quad [0; 8]$ не подх.

> 12 точно подх.