МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Маслова Татьяна Сергеевна**

Класс: **11 класс**

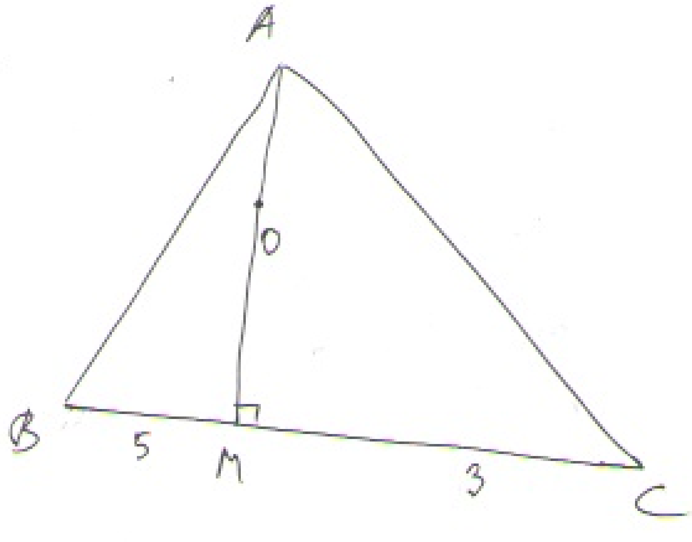
Технический балл: **85**

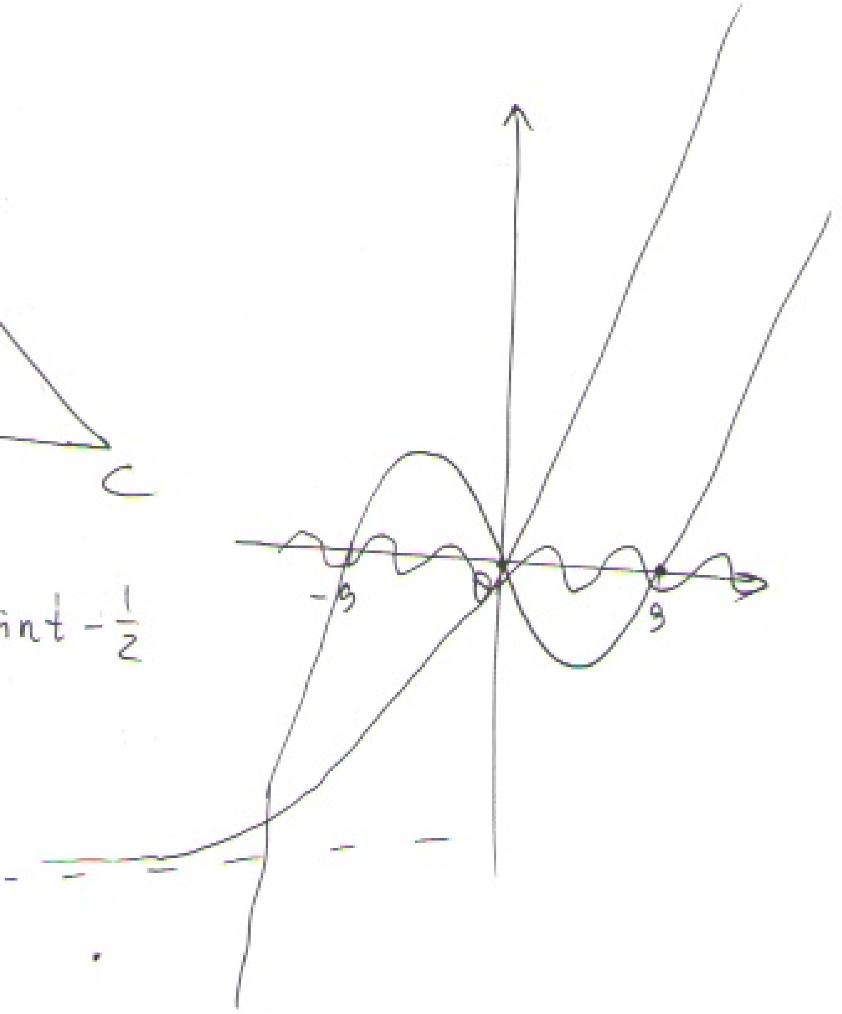
Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	10	15	0

Черновик





t^3-81t 11^t-121 $\sin t-\frac{1}{2}$

$t(t-9)(t+9)$

-9 0 9

$\Rightarrow$ 2 из них положительны (хотя бы)

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$ Черновик

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7}{x^7-1}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{x^7-1}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7-x^7+1}{x^7}}} = \frac{x}{1} = x$$

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

Блоки по 3 : $g_{3k+2}(x) = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

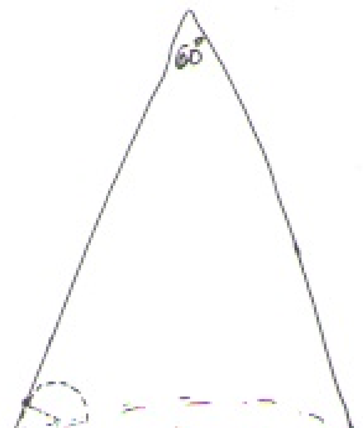
$g_{3k+1}(x) = f(f(x)) = \dfrac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$

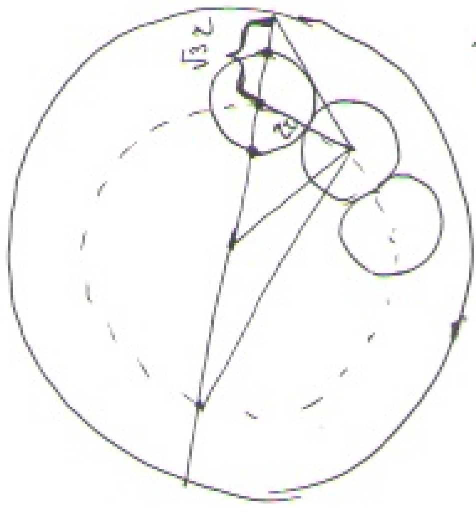
$g_{3k}(x) = x$

$g_{1304} = g_{104} = g_2$

$$\begin{array}{r|l} 1304 & 3 \\ \hline 12 & 434 \\ 10 & \\ 9 & \\ 14 & \\ 12 & \\ 2 & \end{array}$$

$\dfrac{2 \cdot 180}{13}$





13ти угольник со сторонами $2r$ прав.

Черновик

$$A=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\dots+\frac{89}{(44\cdot45)^2}$$

$$B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt3+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(1-\sqrt3)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt3+1}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt3-1)(\sqrt3+1)}{2}}=\sqrt[3]{\frac{3-1}{2}}=1.$$

$$A=\frac34+\frac5{36}+\frac7{144}+\frac9{400}$$

$$\frac9{400}+\frac{108+20+7}{144}=\frac{135}{144}+\frac9{400}=\frac{135\cdot25+9\cdot9}{3600}=\frac{3375+81}{3600}<1.$$

$144=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3$

$400=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5$

$$\frac{a+b}{(ab)^2}=\frac{1}{ab^2}+\frac{1}{a^2b}$$

$$\begin{array}{r}\times\ 135\\ 25\\ \hline 675\\ 270\ \ \\ \hline 3375\end{array}$$

$$\frac{5}{(2\cdot3)^2}\ \frac{5}{3^2}-\frac{5}{2^2}=\frac{5\cdot4-5\cdot9}{36}=-\frac{25}{36}$$

$$\frac{2a+1}{(a(a+1))^2}=\frac{\sqrt{2a+1}}{a^2}-\frac{\sqrt{2a+1}}{(a+1)^2}=$$

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(a+1)^2}=\frac{a^2+2a+1-a^2}{(a(a+1))^2}=2a+1$$

$$=\frac{\sqrt{2a+1}\cdot(a^2+2a+1-a^2)}{a^2(a+1)^2}=2a+1$$

$$A=\frac1{1^2}-\frac1{2^2}+\frac1{2^2}-\frac1{3^2}+\frac1{3^2}-\frac1{4^2}+\dots+\frac1{44^2}-\frac1{45^2}=\frac11-\frac1{45^2}<1.$$

19 38 57 76 95

23 46 69 92

19 238 x

5769 238 x

5769 →

$2+4x=2021$ нет. ⇒ $2+4x+3$ → Ответ: 8.

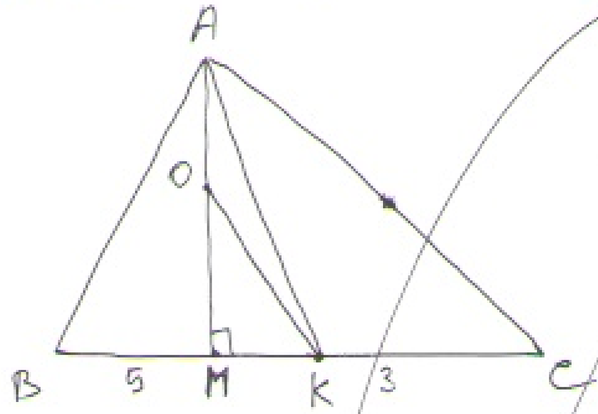
~~4x+5~~

19576 9576 ... 95769238

12

~~Чистовик~~ Черновик

Задача 7 (с условием без изменений)

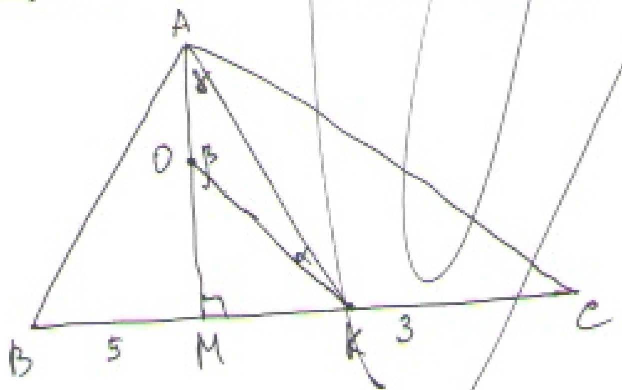


$\triangle AKO$ тупоугольный либо вырожденный ($\angle AOK = 180^\circ$), т.к. высота из ~~точки~~ вершины K на сторону AO падает ~~на~~ в точку M ($MK \perp AO$), не лежащую на стороне AO. $\Rightarrow \angle AKO$ - острый либо ~~прямой~~ $=0$ (в случае вырожденного треугольника).

$\angle AKO$ максимален $\Rightarrow \cancel{\angle AKO = 90^\circ} \Rightarrow K = M \Rightarrow KM = 0$.

Ответ: KM.

Задача 7 (если есть опечатка и „величина $\angle AKO$ минимальна")

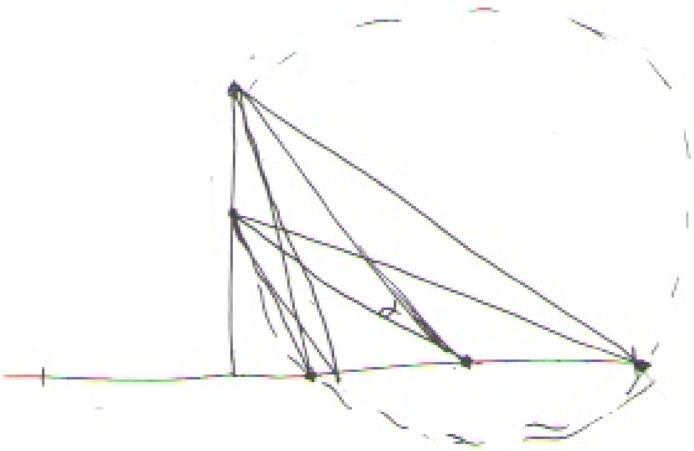


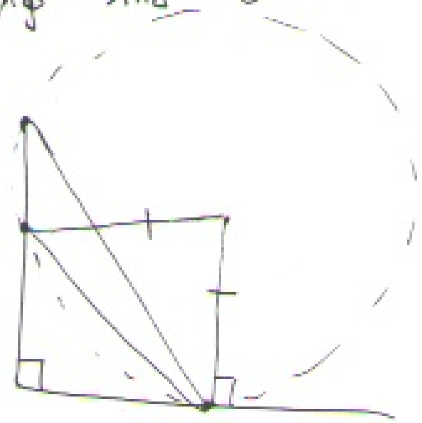
~~Рассмотрим △KMO: ∠OMK = 90°~~

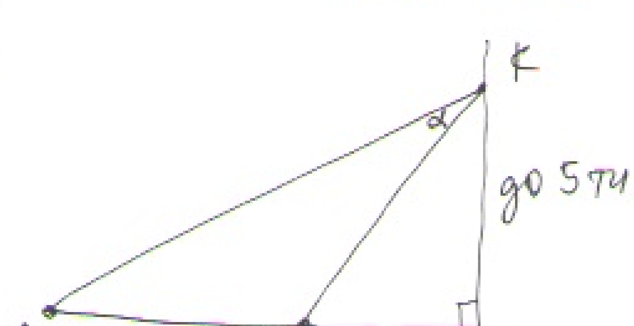
~~∠OKM~~

$\triangle KAO$: по т. синусов

$$\frac{AO}{\sin\alpha} = \frac{AK}{\sin\beta} = \frac{OK}{\sin\gamma}$$







Чистовик.

Задача 1.

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\ \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3})^2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{3} + 1^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{|\sqrt{3}-1|}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$$

Заметим, что каждое слагаемое в числе A имеет вид

$\frac{a+(a+1)}{(a(a+1))^2}$, где a – натуральное число от 1 до 44.

Также заметим, что $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{(a+1)^2 - a^2}{(a(a+1))^2} = \frac{2a+1}{(a(a+1))^2} = \frac{a+(a+1)}{(a(a+1))^2}$

Значит $A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2} = 1 - \frac{1}{45^2} < 1 = B$

$\Rightarrow A < B$

Ответ: B.

Чистовик

Задача 2.

Числа $\vdots 19$: 19 38 57 76 95 (114 и далее не двузначные)

Числа $\vdots 23$: 23 46 69 92 (115 и далее не двузначные)

По условию задачи любые две подряд идущие цифры в данном порядке образуют число, кратное 19 или 23, $\Rightarrow$ образуют одно из чисел 19, 38, 57, 76, 95, 23, 46, 69, 92. (Набор)

Т.к. первая цифра 1, то следующая однозначно 9, т.к. другие числа набора не начинаются с единицы. Вторая и третья цифры также образуют число из набора $\Rightarrow$ третья цифра либо 5, либо 2. Рассмотрим оба случая:

1) Третья цифра 2: $\Rightarrow$ следующая (четвёртая) цифра однозначно 3, пятая – 8. Ни одно число из набора не начинается с 8 $\Rightarrow$ дальше число продолжить нельзя. Противоречие, т.к. число 2021-значное;

2) Третья цифра 5: $\Rightarrow$ следующая (четвёртая) цифра однозначно 7, пятая – 6, шестая – 9. Далее седьмая цифра снова либо 5, либо 2.

Заметим, что если после 9ки поставить 2ку, то число „закончится" через 3 цифры (считая саму 2ку). $\Rightarrow$ Если в числе присутствует 2ка, то она одна и имеет номер 2019 от начала. (см. 1) (пункт 1) можно рассматривать не только относительно 3ей цифры).

Тогда число имеет вид $\underbrace{1\overbrace{9576\,9576\,9576\ldots9576}^{505\text{ блоков по 4 цифра}}}_{2021\ \cancel{\text{числа}}\text{ цифра}}$,

либо $\underbrace{1\overbrace{9576\,9576\ldots9576\,9238}^{505\text{ блоков по 4 цифра}}}_{2021\text{ цифра}}$.

Ответ: 6 или 8.

Чистовик Задача 3

Пусть $g_n(x) = \underbrace{f(f\cdots(f}_{n \text{ штук}}(x)))$, $n \in N$.

Утверждение: $g_{3k-2}(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

$g_{3k-1}(x) = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$

$g_{3k}(x) = x$, $k \in N$.

Докажем по индукции.

База: $k=1$

$g_1(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$ - верно

$g_2(x) = f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$ - верно

$f(f(x)) = f(g_1(x))$

$g_3(x) = f(f(f(x))) = f(g_2(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{x^7-1}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7-x^7+1}{x^7}}} = x$ - верно

Предположение: пусть утверждение верно для $k = m$

Шаг: $k = m+1$.

$g_{3k-2}(x) = g_{3m+3-2}(x) = g_{3m+1}(x) = f(g_{3m}(x)) = f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$ - верно.

$g_{3k-1}(x) = g_{3m+3-1}(x) = g_{3m+2}(x) = f(g_{3m+1}(x)) = f(f(g_{3m}(x))) = f(f(x)) =$

$= g_2(x) = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$ - верно

$g_{3k}(x) = g_{3m+3}(x) = f(f(f(g_{3m}(x)))) = f(f(f(x))) = g_3(x) = x$ - верно.

Шаг индукции доказан.

$\underbrace{f(f(\cdots f}_{1304}(2022)))\ldots) = g_{1304}(2022) = g_{3\cdot 434+2}(2022) = g_{3\cdot 435-1}(2022) =$

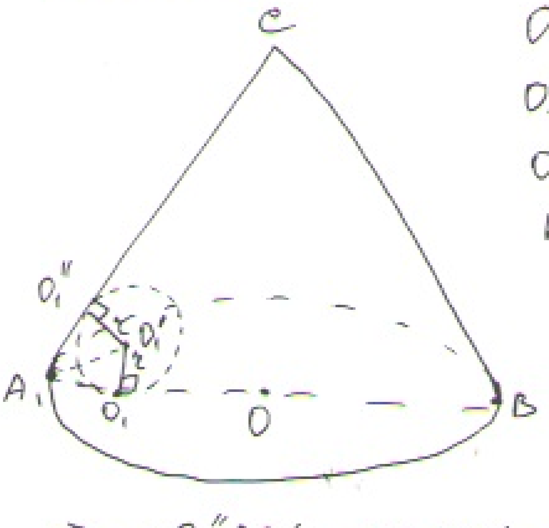
$= \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

Ответ: $\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

3

Чистовик

Задача 4



O — центр основания конуса, R — радиус

$O_1', O_2', \dots, O_{13}'$ — центры шаров

$O_1, O_2, \dots, O_{13}$ — проекции центров шаров на плоскость основания конуса (соотв.)

A_1BC — осевое сечение конуса $\Rightarrow \angle A_1CB = 60^\circ$

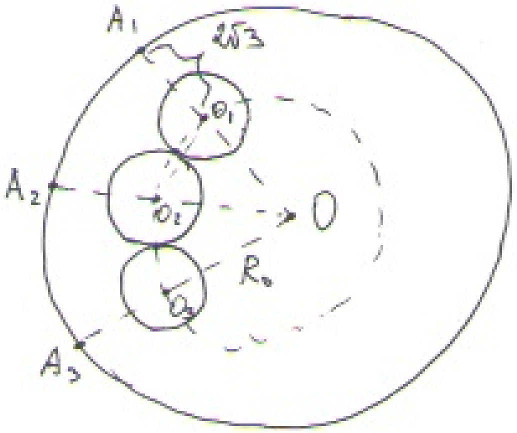
$A_1C = BC \Rightarrow \triangle A_1CB$ р/с $\Rightarrow \angle CA_1B = 60^\circ$

$\triangle A_1O_1''O_1' = \triangle A_1O_1O_1'$ по кат $O_1''O_1' = O_1O_1' = r = 2$ и гип A_1O_1' — общ.

$\Rightarrow \angle O_1''A_1O_1' = \angle O_1A_1O_1' = 60^\circ : 2 = 30^\circ \Rightarrow$ в $\triangle A_1O_1O_1'$ $\angle O_1 = 90^\circ \Rightarrow$

т.к. $\angle A_1 = 30^\circ$, то $A_1O_1' = 2\,O_1O_1' = 2r = 2 \cdot 2 = 4$

по т. Пиф: $A_1O_1 = \sqrt{A_1O_1'^2 - O_1'O_1^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$



Аналогично $A_2O_2 = A_3O_3 = \dots = A_{13}O_{13} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow O_1, O_2, \dots, O_{13}$ лежат на окр. рад. R_0

$R_0 = R - r\sqrt{3} = R - 2\sqrt{3}$

Т.к. шары касаются, то и их проекции тоже касаются $\Rightarrow O_1O_2 = O_2O_3 = \dots = O_{13}O_1 = 2r = 4$

$O_1O_2O_3 \dots O_{13}$ — прав. 13ти угольник (вписан)

$\Rightarrow \angle O_1OO_2 = \frac{360^\circ}{13} = \alpha$

по т. косинусов в $\triangle O_1OO_2$: $O_1O_2^2 = O_1O^2 + O_2O^2 - 2 \cdot O_1O \cdot O_2O \cdot \cos\alpha$

$16 = R_0^2 + R_0^2 - 2R_0 \cdot R_0 \cos\alpha \rightarrow 16 = 2R_0^2(1-\cos\alpha) \rightarrow R_0 = \sqrt{\frac{8}{1-\cos\alpha}}$

$R = R_0 + 2\sqrt{3} = \sqrt{\frac{8}{1-\cos\frac{360^\circ}{13}}} + 2\sqrt{3}$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\left(\frac{360^\circ}{13}\right)}} + 2\sqrt{3}$

Чистовик

Задача 6

ρ - расстояние

Замена $tg\,x = b$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$ab^3 + (1-a-2a^2)b^2 + (2a^2-2a-1)b + 2a = 0$

$b=1$: $a+1-a-2a^2+2a^2-2a-1+2a=0$ ✓ $\Rightarrow$ $b=1$ корень при $\forall a$.

$$\begin{array}{l|l} ab^3+(1-a-2a^2)b^2+(2a^2-2a-1)b+2a & b-1 \\ \hline ab^3-ab^2 & ab^2+(1-2a^2)b-2a \\ \quad (1-2a^2)b^2+(2a^2-2a-1)b & \\ \quad (1-2a^2)b^2+(2a^2-1)b & \\ \hline \qquad -2ab+2a & \\ \qquad -2ab+2a & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$b=1$

$tg\,x = 1 \to x = \frac{\pi}{4}$

при $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ $tg\,x \uparrow$ $\Rightarrow$ расстояние между корнями минимально, когда расстояния между соответствующими „b" минимально.

$ab^2 + (1-2a^2)b - 2a = 0$.

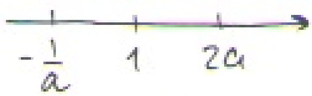
1) $a=0$: $b=0 \to tg\,x = 0 \to \sin x = 0 \to x = 0$ $\quad \rho = |1-0| = 1$

расстояние между корнями $|\frac{\pi}{4} - 0| = \frac{\pi}{4}$.

2) $a \neq 0$: $D = (1-2a^2)^2 + 8a^2 = (2a^2+1)^2$

$b_{1,2} = \frac{2a^2-1 \pm (2a^2+1)}{2a} = \left[\begin{array}{l} 2a \\ -\frac{1}{a} \end{array}\right.$ - корни разных знаков.

2.1) $a > 0$:



$a \geq \frac{1}{2}$

или

$a \leq \frac{1}{2}$

$\rho = \max\left(|1+\frac{1}{a}|, |2a+\frac{1}{a}|\right)$

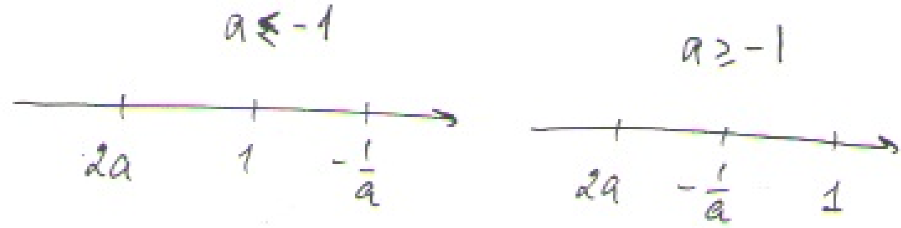
при $a \in (0; \frac{1}{2}]$ расстояние между дальними корнями меньше $\Rightarrow$ $a \in (0; \frac{1}{2}]$ $\rho = |1+\frac{1}{a}| = 1 + \frac{1}{a}$

$a \uparrow \Rightarrow \frac{1}{a} \downarrow \Rightarrow \min(1+\frac{1}{a}) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1+2 = 3$. > 1

Продолжение на стр 6.

Задача 6   Чистовик

2.2) $a<0$:



при $a \geq -1$ расстояние очевидно меньше

$\Rightarrow \rho = |2a-1| = -2a+1$ $a \nearrow \; \rightarrow \; -2a+1 \searrow$

ρ_{min} при $a=-1$: $\cancel{\rho=2}$ $\min(-2a-1) = -2\cdot(-1)+1 = 3 > 1$

~~($\Rightarrow$ расстояние минимально при $a=0$ и равно $\frac{\pi}{4}$)~~

~~$tg\, x = 3$~~

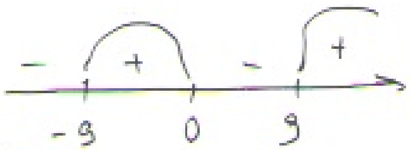
$\Rightarrow$ Расстояние минимально при $a=0$ и равно $\frac{\pi}{4}$

Ответ: $a=0$, $\rho = \frac{\pi}{4}$.

Задача 5 Чистовик

Если среднее положительно, то хотя бы 2 числа положительны и наоборот.

=> 1) $a = t^3 - 81t > 0$: $t(t-9)(t+9) > 0$



$t \in (-9;0) \cup (9;+\infty)$

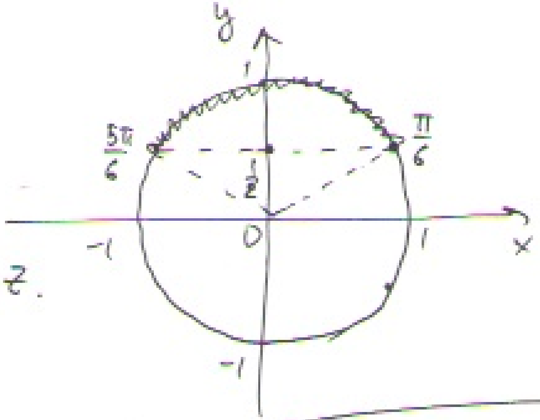
2) $b = 11^t - 121$

функция $f(t) = 11^t - 121$ монотонно возрастает

=> т.к. при $t = 2$ $f(2) = 0$, то при $t > 2$ $f(t) > 0$.

=> $t \in (2;+\infty)$

3) $c = \sin t - \frac{1}{2} > 0$



$\sin t > \frac{1}{2}$

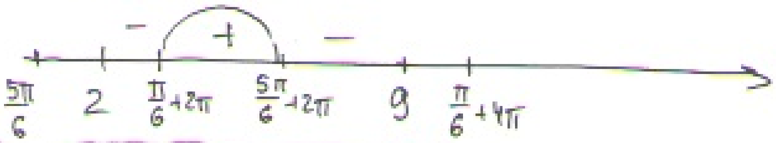
$t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z.$

При $t > 9$ a и b положительны => $\boxed{t \in (9;+\infty) \text{ подходит.}}$

При $t \in (2;9)$ $a < 0$ => должны быть $b > 0$ и $c > 0$.

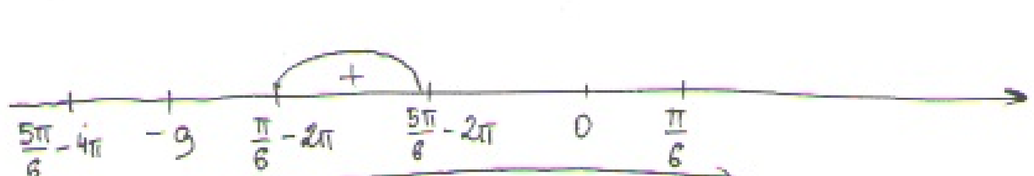
$b > 0$, т.к. $t > 2$

=> $c > 0$



$\boxed{t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi\right) \text{ подходит.}}$

При $t \in (-9;0)$ $a > 0$, $b < 0$ => $c > 0$.



$\boxed{t \in \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi\right) \text{ подходят.}}$

Продолжение на стр. 8.

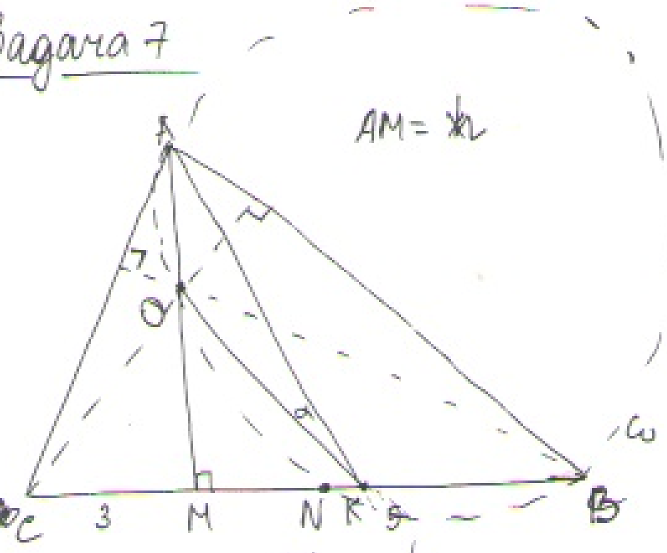
Чистовик

Задача 5

При $t < -9$ $a < 0$ и $b < 0$ $\Rightarrow$ $t < -9$ не подходит.

Ответ: $t \in \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi\right) \cup (9; +\infty)$.

Задача 7



по т. Пифагора для $\triangle AMB$ $\angle M = 90°$

$AB^2 = AM^2 + BM^2$

$AB = \sqrt{h^2 + 25}$

по т. Пифагора для $\triangle CMA$ $\angle M = 90°$

$AC^2 = CM^2 + AM^2$

$AC = \sqrt{h^2 + 9}$

$\operatorname{tg} \cancel{\sin} B = \frac{AM}{MB} = \frac{h}{5}$

$\triangle AOK$ – либо тупоугольный, либо вырожденный ($\angle AOK = 180° \Rightarrow$ $\angle AKO = 0° \Rightarrow$ не максимален $\Rightarrow$ не подходит $\Rightarrow$ только тупоугольный) $\angle AOK > 90°$ (т.к. высота KM $\triangle AKO$ к стороне AO $M \notin AO$)

Пусть ω – опис окр $\triangle AOB$ $\omega \cap BC = \{B; N\}$

Т.к. на MB есть точка, сим. C отн M, то и есть все соотв. углы при $K \in CM$ $\Rightarrow$ можно рассматривать только $K \in MB$.

$\angle ABO = \angle ANO$ впис.

промежутки

$\angle AKO > \angle ABO$ при $K \in (BN)$

$\angle AKO < \angle ABO$ при $K \in [MN)$

т.к. $\angle ABO = \frac{1}{2} \cup AO$

$\angle AKO = \frac{1}{2}(\cup AO + \alpha)$