



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Меркушкина Арина Сергеевна**

Класс: **8 класс**

Технический балл: **60**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6
Оценка	15	5	0	15	20	5

Листовик №1.
Пусть a кг поднял штангист А, b кг поднял штангист Б
и c кг поднял штангист В, тогда

$$a + b = 220 \text{ кг}$$

$$a + c = 240 \text{ кг}$$

$$b + c = 250 \text{ кг}$$

Сложим эти уравнения и получим

$$2a + 2b + 2c = 710 \text{ кг}$$

$$2(a + b + c) = 710 \text{ кг} \quad | : 2$$

$$a + b + c = 355 \text{ кг}$$

$$a = (a + b + c) - (b + c) = 355 - 250 = 105 \text{ (кг)}$$

$$b = (a + b + c) - (a + c) = 355 - 240 = 115 \text{ (кг)}$$

$$c = (a + b + c) - (a + b) = 355 - 220 = 135 \text{ (кг)}$$

$c > b > a \Rightarrow$ победил штангист В, и вес, который он поднял,
это 135 кг

Ответ: 135 кг

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2022}$$

$$x+y = 1 \cdot z$$

$$x \cdot y = 2022 \cdot z$$

(т.к. зреть можно будет сократить на какое-то одно число)

$$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$$

$$x \cdot y = 334 \cdot 2 \cdot 3 \cdot z = 337 \cdot 6z = 1011 \cdot 2z = 674 \cdot 3z = 2022 \cdot z =$$

$$= 337z \cdot 6 = 1011z \cdot 2 = 674z \cdot 3 = 2022z \cdot 1$$

$$337 + 6z = z$$

$$337 = -5z \text{ (не ур. цел.)}$$

$$\textcircled{9} 1011 + 2z = z$$

$$1011 = -z$$

$$z = -1011$$

$$\textcircled{10} 674 + 3z = z$$

$$z = -337$$

$$2022 + z = z$$

не ур.

И.т.д. все ост. варианты разном. дают нецел. $z \Rightarrow$ нужно провер. два варианта

$$\textcircled{1} \begin{cases} x+y = -1011 \\ x \cdot y = -2044242 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1011 - x \\ x \cdot y = -2044242 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 1011x - 1011 \cdot 2022 = 0$$

$$D = 1011^2 + 4 \cdot 1011 \cdot 2022 = 3033^2$$

\sqrt{D} четн.; чет. + чет. = чет. \Rightarrow
 x_1, x_2 - цел.

$$\textcircled{2} \begin{cases} x+y = -334 \\ x \cdot y = -334 \cdot 2022 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -334 - x \\ x \cdot y = -334 \cdot 2022 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2022 \cdot 334 + 334x = 0$$

$$D = 334^2 + 4 \cdot 2022 \cdot 334 = 334^2 \cdot 334 \cdot 4 \cdot 2022 =$$

$$= 334 \cdot (334 + 8088) = (334 \cdot 5)^2$$

\sqrt{D} четн. \Rightarrow чет. + чет. = чет. $\Rightarrow x_1, x_2$ - цел.

Полученные 4 цел. знач. $x \Rightarrow$ будет и 4 цел. знач. y .

Ответ: 4 решения в цел. числах

Шитовик

№ 4.

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$$

Это соотношение будет выполняться для каждого члена данной последовательности. П. 1. $x_{n-1} = x_{n-2} \cdot x_{n-4}$, $x_{n-2} = x_{n-3} \cdot$

$\cdot x_{n-5}$ и т.д. П. 0. $x_n = x_{n-3} \cdot x_{n-5} \cdot x_{n-4} \cdot x_{n-3} = (x_{n-3})^2 \cdot x_{n-4} \cdot x_{n-5}$

Каждый член последовательности является 1 или -1, т.е. во квадрат это $1 \Rightarrow x_n = x_{n-4} \cdot x_{n-5}$

$$x_{n-5} \cdot x_{n-4}$$

$$x_n = (x_{n-5})^2 \cdot x_{n-4} \Rightarrow x_n = x_{n-4}$$

$$x_n = x_{n-4} \quad ; \quad x_{n-4} = x_{n-14} \text{ и т.д.}$$

$$x_n = x_{n-4k} \quad (\text{где } k \in \mathbb{N})$$

$$2022 = 4 \cdot 288 + 6 \Rightarrow x_{2022} = x_{2022-4 \cdot 288} = x_6 = x_5 \cdot x_3 = x_4 \cdot x_2 \cdot x_3 =$$

$$= x_3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$x_{2022} = (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 1$$

$$\text{Ответ: } x_{2022} = 1$$

$$(\overline{ab} + \overline{bc}) (\overline{bc} + \overline{cd}) (\overline{cd} + \overline{de}) = 157605 = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 19 \cdot 79$$

1) $\left. \begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \\ d \neq 0 \end{matrix} \right\}$ т.к. иначе $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}$ не являются.

2) e может быть равно 0

$$3) (\overline{ab} + \overline{bc}) = (a+b) (b+c)$$

$$\begin{matrix} a+b \neq 1 \\ b+c \neq 1 \\ c+d \neq 1 \end{matrix} \quad \text{т.е. } a=1, b=0 \text{ и т.д.} \\ \text{противореч. 1)}$$

П. 1. В разложении числа 157605 на множители не может быть двузначных чисел, так как 19 кратно 3, 5 или 7. Возможные разложения:

$$157605 = 35 \cdot 54 \cdot 49 \quad ①$$

$$157605 = 21 \cdot 79 \cdot 95 \quad ②$$

Три комбинации 19, 4, третьим множителем остается $5 \cdot 3 = 15$ (противоречит 3))

$$\begin{aligned} ① \quad \overline{ab} + \overline{bc} &= (a+b) (b+c) & a+b &= 3 & a &\neq 0 \\ \overline{bc} + \overline{cd} &= (b+c) (c+d) & b+c &= 5 \\ \overline{cd} + \overline{de} &= (c+d) (d+e) & c+d &= 7 \\ & & d+e &= 9 \end{aligned}$$

Пусть $a=1$, тогда $b=2, c=3, d=4, e=5$

Пусть $a=2$, тогда $b=1, c=4, d=3, e=6$

Если $a=3$, то $b=0$ (противореч.)

$$\text{П. 2. } \left. \begin{matrix} \overline{abcde} = 12345 & (12+23) (23+34) (34+45) = \\ \overline{abcde} = 21436 & (21+14) (14+43) (43+36) = \end{matrix} \right\} 157605$$

$$② \quad 21 \cdot 95 \cdot 79$$

$$\begin{matrix} d+e=1 & e=0 \\ c+d=2 & d=1 \\ & c=1 \end{matrix}$$

$\overline{bc} + \overline{cd} = \overline{bc} + \overline{cd}$ в нашем разложении нет такого варианта

Ответ: 12345 или 21436

- 1) красн.
- 2) оранже
- 3) желт
- 4) зелен
- 5) голуб.
- 6) синий
- 7) фиолетовый

	Горизонт	Вертикаль
10 раз	1564	234
	2344	156
	5146	234
	3742	145
	4415	236
	6213	457
	4453	126
	4621	345
	5634	127
	5241	

Ответ: не менее 10

Черновик

1. $A+B=220 \text{ км}$
 $A+B=240 \text{ км}$
 $B+B=250 \text{ км}$

$2(A+B+B) = 460 + 250 = 710$

$A+B+B = 355 \text{ км}$

$A = 355 - 250 = 105 \text{ км}$

$B = 355 - 240 = 115 \text{ км}$

$B = 355 - 220 = 135 \text{ км}$

Ответ: 135 км

№ 2.

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2022}$

$x+y=1z$
 $xy=2022z$

6. 337

$$\begin{array}{r|l} 2022 & 2 \\ 1011 & 3 \\ 337 & 337 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1011 & 3 \\ -9 & \\ \hline 11 & \\ -9 & \\ \hline 21 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 337 & 4 \\ -28 & \\ \hline 57 & \\ -56 & \\ \hline & 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 337 & 17 \\ -17 & \\ \hline & 167 \end{array}$$

$6z + 337 = z$
 $6z + 337 = z$

$$\begin{array}{r|l} 337 & 29 \\ -29 & \\ \hline & 47 \end{array}$$

$337 = -5z$ нет

$$\begin{array}{r} 337 \\ \times 3 \\ \hline 1011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 337 & 13 \\ -26 & \\ \hline & 47 \\ -47 & \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 337 & 19 \\ -19 & \\ \hline & 147 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 337 & 31 \\ -31 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

$\frac{2}{4044} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ 188 \\ \hline 3209 \end{array}$$

$x+y=1$ нет

$0+1$

$x+y=2$ нет

$x+y=3$ нет

$$\begin{array}{r|l} 337 & 28 \\ -28 & \\ \hline & 107 \end{array}$$

$x+y=4$

$$\begin{array}{r|l} 337 & 37 \\ \hline & \end{array}$$

$27 = 3 \cdot 9 = 1 \cdot 7$

$$\begin{array}{r|l} 337 & 39 \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 337 & 41 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 337 & 43 \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 337 & 47 \\ \hline & \end{array}$$

8

Упробук

$$x + y = z$$

$$x \cdot y = 2022z$$

$$x \cdot y = 337 \cdot 6 \cdot z$$

$$x \cdot y = 337 \cdot 2 \cdot 3 \cdot z = 337 \cdot 6z = 1011 \cdot 2z = 674 \cdot 3z = 2022 \cdot z$$

$$337 \cdot 2 \cdot 6 \quad 1011 \cdot 2 \cdot 2 \quad 674 \cdot 2 \cdot 3 = 2022 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\begin{array}{r} 337 \\ \times 2 \\ \hline 674 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 674 \\ \times 2 \\ \hline 1348 \end{array}$$

$$337 + 6z = z$$

$$337 = -5z$$

$$-$$

$$1011 + 2z = z$$

$$1011 = -z$$

$$z = -1011$$

$$+$$

$$674 + 3z = z$$

$$674 = -2z$$

$$z = -337$$

$$2022 + z = z$$

$$-$$

$$337z + 6 = z$$

$$6 = -336z$$

$$-$$

$$\begin{array}{r} 2044242 \\ \times 4 \\ \hline 8176968 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y = -1011 \\ x \cdot y = -2044242 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times 2022 \\ \hline 2022 \\ 2022 \\ 2022 \\ \hline 2044242 \end{array}$$

$$x \cdot y = -1011 - x$$

$$x \cdot (-1011 - x) = -2044242$$

$$-1011x - x^2 = -2044242 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 + 1011x - 2044242 = 0$$

$$D = 9199089 = 9$$

$$y = \frac{-2044242}{x}$$

$$x - \frac{2044242}{x} = -1011$$

$$\frac{x^2 - 2044242}{x} = -1011$$

$$2044242 = 337 \cdot 337 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 9199089 \quad | \quad 9 \\ \hline 1022121 \quad | \quad 3 \\ \hline 340707 \quad | \quad 3 \\ \hline 1011 \quad 113569 \end{array}$$

$$\times 1011$$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times 1011 \\ \hline 1011 \\ 1011 \\ \hline 1022121 \\ + 8176968 \\ \hline 9199089 \end{array}$$

умножить

$$\begin{array}{r} 113569 \mid 7 \\ - 7 \\ \hline 43 \\ - 42 \\ \hline 15 \\ - 14 \\ \hline 16 \\ - 14 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 113569 \mid 11 \\ - 11 \\ \hline 35 \\ - 33 \\ \hline 26 \\ - 22 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$x^2 + 1011x - 2022 \cdot 1011 = 0$$

$$D = 1011^2 + 4 \cdot 2022 \cdot 1011 = 1011 \cdot (1011 + 8088) =$$

$$1011 \cdot 9099 = (1011 \cdot 3)^2 = 3033^2$$

Дискриминант имеет четное значение \Rightarrow уравнение имеет два решения в целых числах

Ответ: 4.

$$\begin{array}{r} 2022 \\ \times 334 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 334 \\ \times 674 \\ \hline 1008 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 113569 \mid 13 \\ 104 \mid 873 \\ \hline 95 \\ - 91 \\ \hline 46 \\ - 39 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$z = -334$$

$$y = -1008$$

$$\begin{cases} x + y = -334 \\ x - y = -2022 \cdot 334 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 1008 \\ \times 674 \\ \hline 4032 \\ 7056 \\ 6048 \\ \hline 679392 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1685 \\ - 334 \\ \hline 1398 \mid 2 \\ - 12 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1685 \mid 5 \\ - 15 \\ \hline 78 \\ - 75 \\ \hline 337 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8088 \\ + 334 \\ \hline 8425 \end{array}$$

$$y = \frac{-2022 \cdot 334}{x}$$

$$x + \frac{-2022 \cdot 334}{x} = -334$$

$$\frac{x^2 - 2022 \cdot 334}{x} + 334 = 0$$

$$D = 334^2 + 4 \cdot 2022 \cdot 334 = 334 \cdot (334 + 8088) =$$

$$= (334 \cdot 5)^2$$

Уравнение имеет два решения в целых числах

$$x_1 = \frac{-334 + 1685}{2} = 674$$

$$x_2 = \frac{-334 - 1685}{2}$$

$$\begin{array}{r} 8425 \mid 5 \\ - 5 \\ \hline 34 \\ - 30 \\ \hline 42 \\ - 40 \\ \hline 25 \\ - 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(\overline{ab+bc})(\overline{bc+cd})(\overline{cd+de}) = 157605 \quad \sqrt{5} \quad \text{непробив}$$

$$(\overline{ab \cdot bc + ab \cdot cd + bc^2 + bc \cdot cd})(\overline{cd \cdot de}) = \overline{ab \cdot bc \cdot cd + ab \cdot cd^2 + bc^2 \cdot cd + bc \cdot cd^2 + 0}$$

$$10000a + 1000b + 100c + 10d + e = \overline{abcde}$$

$$(10a+b + 10b+c)(10b+c + 10c+d)(10c+d + 10d+e) = 157605$$

$$(10a+11b+c)(10b+11c+d)(10c+11d+e) = 157605$$

$$\begin{array}{r} 157605 \overline{) 5} \\ -15 \\ \hline 4 \\ -5 \\ \hline 26 \\ -25 \\ \hline 10 \\ -10 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 10507} \\ -9 \\ \hline 15 \\ -15 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 1501} \\ -14 \\ \hline 101 \\ -98 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \overline{) 1501} \\ -133 \\ \hline 171 \\ -171 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$157605 = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\overline{ab+bc} = 10a+b+10b+c = 11b+10a+c$$

$$\overline{ab+bc} = (a+b)(b+c)$$

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 1501} \\ -13 \\ \hline 20 \\ -13 \\ \hline 71 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 2022} \\ -14 \\ \hline 62 \\ -56 \\ \hline 62 \\ -56 \\ \hline 6 \end{array}$$

1) $\left. \begin{array}{l} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \\ d \neq 0 \end{array} \right\}$ m.k. \overline{ab}
 \overline{bc}
 \overline{cd} не глыбе.
 \overline{de}

2) ℓ $\text{м.к.м.} = 0$

$$x_n = \overbrace{x_{n-1} \cdot x_{n-3}}^{\wedge} \cdot \overbrace{x_{n-2} \cdot x_{n-4}}^{\wedge}$$

$$x_{n-3} \cdot x_{n-5}$$

$$x_n = x_{n-3} \cdot x_{n-5} \cdot x_{n-4} \cdot x_{n-3} = (x_{n-3})^2 \cdot x_{n-4} \cdot x_{n-5} = (x_{n-5})^2 \cdot x_{n-4}$$

$$x_n = x_{n-7}$$

$$x_{n-7} = x_{n-14} \quad \text{u.m.g.}$$

$$= x_4 \cdot x_2 \cdot x_3 = x_3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 =$$

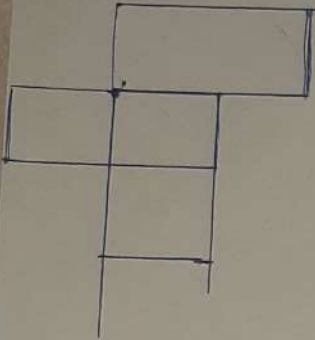
$$x_n = x_{n-7k}$$

$$\text{Объем: } x_{2022} = 1 = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot -1 = 1$$

9

Алгебра

№ 3



55

3) $a \neq 1$
 $b+c \neq 1$
 $c+d \neq 1$ (т.е. $a=1, b=0$ и т.д.)
 |
 невозможность

Т.е. в разложении числа 157605 на множ. не может быть числа начин. с 1, т.е. 18 чисел ^{случае} могут с 3, 5, или 7

Возможно разложение:
 $157605 = 35 \cdot 57 \cdot 79$ ①

$157605 = 21 \cdot 35 \cdot 79$ ②

① $\overline{ab} + \overline{bc} = (a+b)(b+c)$

$\overline{bc} + \overline{cd} = (b+c)(c+d)$

$\overline{cd} + \overline{de} = (c+d)(d+e)$

$a+b=3$

$b+c=5$

$c+d=7$

$d+e=8$

Пусть $a=2$

$b=1$

$c=4$

$d=3$

$e=6$

$a \neq 0$ Пусть $a=1$:

$b \neq 2$

$d=4$

$c=3$

$e=5$

Пусть $a=3$

$b=0$ (не угод. уст. м.к. \overline{bc} начин. с 0)

ме. $\overline{abcde} = 12345$
 $\overline{abcde} = 21436$

②