МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Минеев Дмитрий Александрович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	10	0	15

(2) Чистовик

Все двузначные числа, которые делятся на 19 – это 19, 38, 57, 76, 95, а на 23 – это 23, 46, 69 и 92.

После первой цифры 4 точно идёт цифра 6 (единственное подходящее число, начинающееся на 4, – это 46). После 6 точно 9. Если после 9 идёт 2, то потом 3 и 8. А после восьмёрки уже нечего написать. Значит, после 9 идёт 5, потом 7, потом 6, потом 9, после 9 (по аналогичным причинам) 5 и т.д. Идём так до 2017 цифры, наше число имеет вид:

$$\overline{4\underbrace{6957\,6957\,6957\ldots6957}_{504\text{ группы }6957}abcde}$$, где a, b, c, d, e – последние 5 цифр. a точно 6, b точно 9. c или 2, тогда $d = 3$, $e = 8$, или $c = 5$, тогда $d = 7$, $e = 6$.

<u>Ответ:</u> 6 или 8.

Чистовик

③ (начало)

Заметим, что:

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}} =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{1-x^5}{-x^5}} = -\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x},$$ при всех x для которых $f(x)$ и $f(f(x))$ существуют

$$f(f(f(x))) = f\left(-\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(-\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x}\right)^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}}} =$$

Чистовик

3 (окончание)

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{\dfrac{x^5+1-x^5}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^5}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x,$$ при всех x, для которых $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ существуют.

Т.е. $f(f(f(x))) = x$ для всех x, для которых определена $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$. $f(x)$ определена $\Leftrightarrow \sqrt[5]{1-x^5} \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-x^5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. $f(f(x))$ имеет смысл $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \neq 1 \\ \text{имеет смысл } f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}} \neq 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{1-x^5} \neq 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^5 \neq 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$ $f(f(f(x)))$ имеет смысл $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x} \neq 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{x^5-1} \neq x \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5-1 \neq x^5 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Значит, для $x \neq 0$, $x \neq 1$ $f(f(f(x))) = x$.

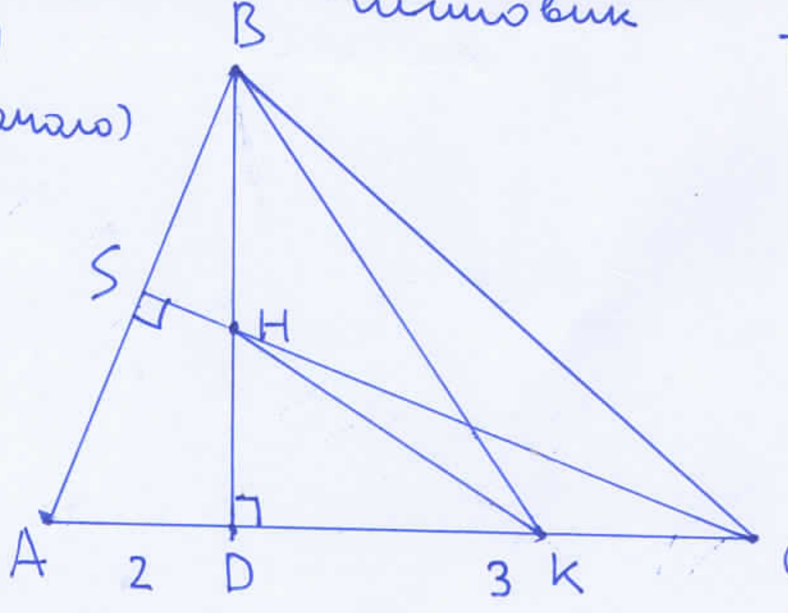
$$\underbrace{f(f(f(\ldots f(2022)\ldots)))}_{1303} \overset{\uparrow}{=} f(2022) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$$

т.к. $1303 \bmod 3 = 1$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

(7) (начало)

Чистовик



Пусть CS – высота $\triangle ABC$

$\triangle ABD \sim \triangle ACS$ по 2 углам ($\angle BDA = \angle CSA = 90^\circ$, $\angle BAD = \angle CAS$)

$\triangle SCA \sim \triangle DCH$ по 2 углам ($\angle SCA = \angle DCH$, $\angle ASC = \angle HDC = 90^\circ$).

$\triangle BAD \sim \triangle CHD$, т.к. $\triangle BAD \sim \triangle CAS$ и $\triangle CAS \sim CHD$. Значит, $\frac{AD}{BD} = \frac{HD}{CD} \Rightarrow BD \cdot HD = AD \cdot CD = 6$.

$$\operatorname{tg}\angle BKH = \operatorname{tg}(\angle BKD - \angle HKD) = \frac{\operatorname{tg}\angle BKD - \operatorname{tg}\angle HKD}{1 + \operatorname{tg}\angle BKD \cdot \operatorname{tg}\angle HKD} =$$

Используем неравенство о средних в знаменателе, $DK > 0$

$$= \frac{\frac{BD}{DK} - \frac{DH}{DK}}{1 + \frac{BD}{DK} \cdot \frac{DH}{DK}} = \frac{BD - DH}{DK + \frac{6}{DK}} = \frac{BH}{DK + \frac{6}{DK}} \leq \frac{BH}{2\sqrt{DK \cdot \frac{6}{DK}}} = \frac{BH}{2\sqrt{6}}.$$

Чистовик

(7) (Окончание)

острые

Т.к. $\angle BKH$ – острый ($\angle BKH = \angle BKD - \angle HKD$) и

$y = \operatorname{arctg} x$ – возрастающая функция, то

$\angle BKH \leq \operatorname{arctg} \frac{BH}{2\sqrt{6}}$.

из нер-ва о средних

Равенство достигается $\Leftrightarrow DK = \frac{6}{DK} \Leftrightarrow DK = \sqrt{6} \Leftrightarrow$ точка K расположена на отрезке CD на расстоянии $\sqrt{6}$ от D (K не может быть на отрезке AD, т.к. $\sqrt{6} > 2$, и может быть на CD, т.к. $\sqrt{6} < 3$). Вспомним, что точка K выбрана так, что $\angle BKH$ максимален. Значит, K лежит на отрезке CD, $DK = \sqrt{6}$, при такой точке K (и только при такой) $\angle BKH = \operatorname{arctg} \frac{BH}{2\sqrt{6}}$, т.е. максимален.

Ответ: $\sqrt{6}$.

① (начало) чистовик

Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$

Заметим, что:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(x+1-x)(x+1+x)}{(x(x+1))^2} =$$

$$= \frac{2x+1}{(x(x+1))^2}$$

Значит;

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot 1+1}{(1(1+1))^2} + \frac{2\cdot 2+1}{(2(2+1))^2} + \dots + \frac{2\cdot 43+1}{(43(43+1))^2} + \frac{2\cdot 44+1}{(44(44+1))^2} =$$

$$= f(1) + f(2) + \dots + f(43) + f(44) =$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{43^2} - \frac{1}{44^2} + \frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{45^2} < 1.$$

① (окончание) Чистовик

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{(3-2\sqrt{3}+1)^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\left(\left((\sqrt{3}-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{|\sqrt{3}-1|^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} \underset{\uparrow}{=} \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

т.к. $\sqrt{3} > 1$, то $|\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$

$$= \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1 > A.$$

<u>Ответ:</u> $B > A$ (больше число B).

(начало) чистовик

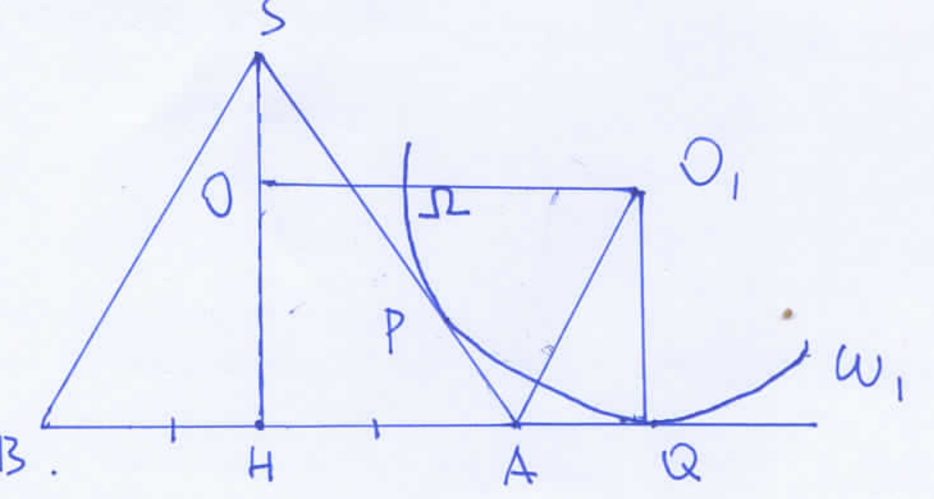
(4) Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{11}$ – наши шары, $O_1, O_2, \ldots, O_{11}$ – их ~~[illegible]~~ центры соответственно, причём ω_1 касается ω_{11} и ω_2, ω_2 касается ω_1 и $\omega_3, \ldots,$ ω_{11} касается ω_{10} и ω_1.

Заметим, что при повороте на $\left(\frac{360}{11}\right)^\circ$ вокруг оси конуса вся ~~[illegible]~~ конструкция переходит в себя, значит, $O_1 O_2 O_3 \ldots O_{11}$ – правильный 11-угольник с центром O, являющимся пересечением плоскости $O_1O_2O_3$ с прямой, содержащей ось конуса. Сторона $O_1 O_2 \ldots O_{11}$ равна удвоенному радиусу шара ω_1, т.е. 6. Значит, OO_1, т.е. радиус описанной окружности $O_1 O_2 \ldots O_{11}$, равен

$$OO_1 = \frac{3}{\sin\left(\left(\frac{180}{11}\right)^\circ\right)}$$

Рассмотрим ~~[illegible]~~ плоскость, которая проходит через вершину конуса S, ~~[illegible]~~ центр его основания H и точку O_1.

4 (продолжение) Чистовик



Точка O также лежит в плоскости SHO_1, причем $OO_1 \perp SH$.

Точка касания P шара ω_1 с конусом тоже лежит в этой плоскости, точка касания Q ω_1 с плоскостью основания конуса тоже лежит в ней. Пусть SA - образующая, которой касается ω_1, а SB - вторая образующая конуса, лежащая в SHO_1. $SB = SA$, $\angle BSA = 60° \Rightarrow \Delta BSA$ - правильный $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle SAB = 60° \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\angle QAP = 120°$

т.к. $\angle SAB$ и $\angle QAP$ смежные

Сечением шара ω_1 плоскостью SHO_1 является круг Ω, вписанный в $\angle PAQ$, с центром в точке O_1, касающийся SA в P, AH в Q. $\Rightarrow AO_1$ - биссектриса $\angle PAQ \Rightarrow \angle O_1AQ = \dfrac{\angle PAQ}{2} = 60°$.

④ (окончание) Чистовик

$O_1Q \perp AQ$ (радиус Ω к касательной AQ) $\Rightarrow AQ = O_1Q \operatorname{ctg} \angle O_1AQ = 3 \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

$SH \perp AB$, т.к. SH – высота конуса, а AB – диаметр основания

Т.к. $SH \perp AB$, $O_1Q \perp AB$, $OO_1 \perp SH$, то HOO_1Q – прямоугольник $\Rightarrow HQ = OO_1 = \frac{3}{\sin\left(\left(\frac{180}{11}\right)^\circ\right)}$

$HA = HQ - AQ = \frac{3}{\sin\left(\left(\frac{180}{11}\right)^\circ\right)} - \sqrt{3}$.

<u>Ответ:</u> $\frac{3}{\sin\left(\left(\frac{180}{11}\right)^\circ\right)} - \sqrt{3}$.

(5) (начало) Черновик

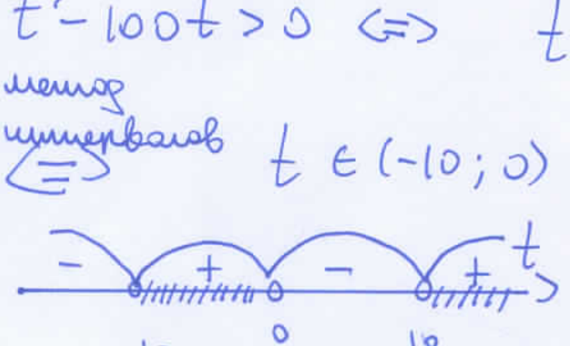
Заметим, что если среднее из чисел a, b, c положительно, то не меньше двух из чисел a, b, c положительны (среднее и наибольшее). А если среди a, b, c хотя бы 2 положительных, то среднее тоже положительно, т.к. если оно неположительно, то наименьшее из a, b, c тоже неположительно, всего неположительных не меньше двух, тогда положительных не больше одного, а это не так. Значит, среднее из a, b, c положительно тогда и только тогда, когда хотя бы 2 из этих чисел положительны, т.е.. верна совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases} \\ \begin{cases} b>0 \\ c>0 \end{cases} \\ \begin{cases} c>0 \\ a>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t^3-100t>0 \\ 2^t-16>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^t-16>0 \\ \sin t-\frac{1}{2}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin t>\frac{1}{2} \\ t^3-100t>0 \end{cases} \end{array}\right. \quad (*)$$

Решим нер-во:

$t^3-100t>0 \Leftrightarrow t(t^2-100)>0 \Leftrightarrow t(t-10)(t+10)>0 \Leftrightarrow$

метод интервалов $\Leftrightarrow$ $t \in (-10;0) \cup (10;+\infty)$.



(продолжение 1) Чистовик

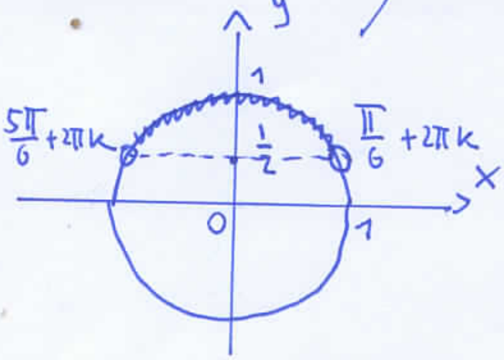
5 Решим нер-во:

$$2^t-16>0 \Leftrightarrow 2^t>2^4 \Leftrightarrow t>4$$

т.к. $y=2^x$
строго монотонно возрастающая функция

Решим нер-во

$$\sin t-\frac{1}{2}>0 \Leftrightarrow t\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$$



При $t>10$ верна верхняя система в совокупности (*), значит, верна и вся ~~[illegible]~~ совокупность. $t>10$ подходят.

При $t\in[0;4]$ $t^3-100t\le 0$ и $2^t-16\le 0$. Значит, ни одна из систем (*) не верна, значит, неверна и вся совокупность. $t\in[0;4]$ не подходят. ~~[illegible]~~

Аналогично, не подходят $t\le -10$, т.к. при них $t^3-100t\le 0$ и $2^t-16<0$. ~~не подходят [illegible] т.к.~~

~~при $t=10$, $t^3-100t=0$ и 2^t-16~~

(5) (продолжение 2) чистовик

Осталось исследовать $t \in (-10; 0)$ и $t \in (4; 10]$.

При $t \in (-10; 0)$ $2^t - 16 \leq 0$, $t^3 - 100t > 0$. Значит, чтобы выполнялось (*) необходимо и достаточно выполнения $\sin t - \frac{1}{2} > 0$. Т.е. нужно найти все t, для которых верна система:

$$\begin{cases} -10 < t < 0 \\ t \in \underbrace{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)}_{\text{интервал } A}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

При $k \geq 0$ нет решений, т.к. границы отрезка A будут положительными. ~~При $k \leq -2$ правая граница отрезка A $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq \frac{5\pi}{6} - 4\pi < \pi - 4\pi = -3\pi$~~

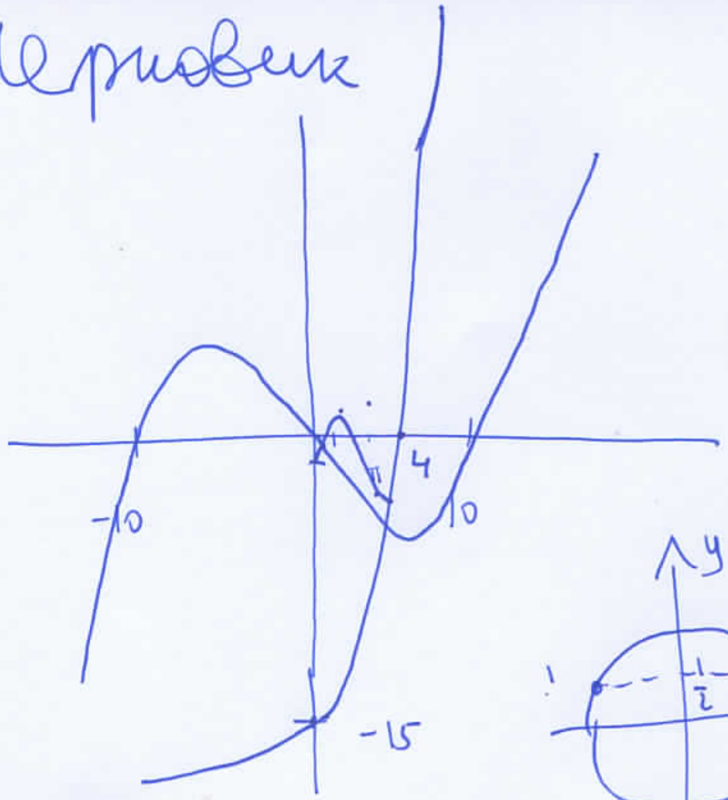
При $k \leq -3$ правая граница A $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq$ $\leq \frac{5\pi}{6} - 6\pi < \pi - 6\pi = -5\pi < -10$, т.е. нет решений.

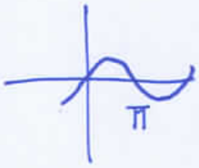
При $k = -1$ интервал A имеет вид $\left(\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi\right)$

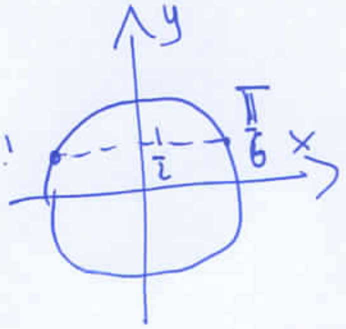
$\frac{5\pi}{6} - 2\pi < 0$, $\frac{\pi}{6} - 2\pi > -2\pi > -10$ => интервал $\left(\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi\right)$ подходит весь.

(5) (окончание) чистовик.

Черновик





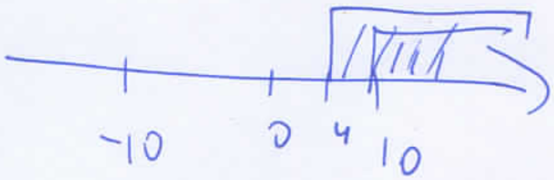


$\frac{\pi}{6}$;

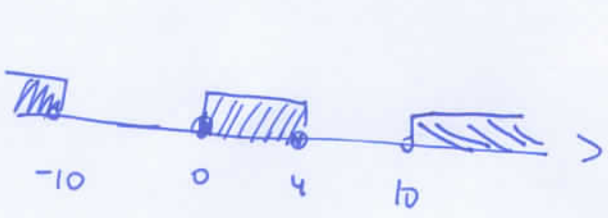
$$\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k ; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$$

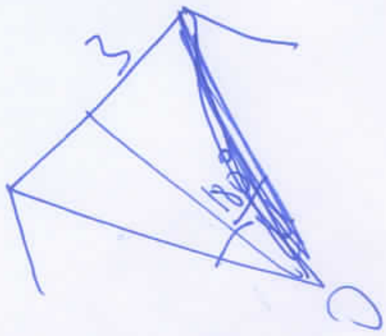
$t \in (-10; 0) \cup (10; +\infty)$

$t > 4.$



$t > 10.$





Черновик

$$f(f(x)) = x$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}$$

$$\frac{1-x^5-1}{1-x^5} \qquad \frac{-x^5}{1-x^5} \qquad \frac{1}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^5}}} = -\frac{\sqrt{1-x^5}}{x}$$

$$\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}} = \sqrt{\frac{x^5+1-x^5}{x^5}} =$$

$$= \frac{1}{x^5}$$

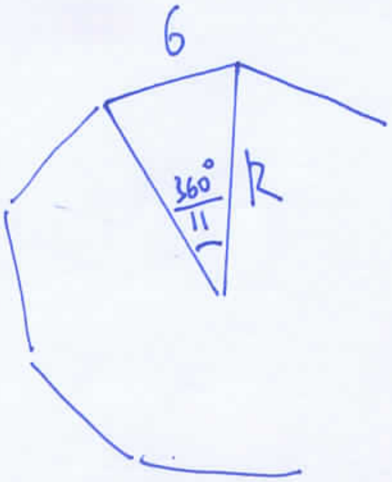
$$x$$

черновик

19	23
38	46
57	69
76	92
95	

4695769

238



$\frac{3}{R} = \sin \frac{180°}{11}$

2016 | 4

$R = \frac{3}{\sin\left(\frac{180°}{11}\right)}$ 504

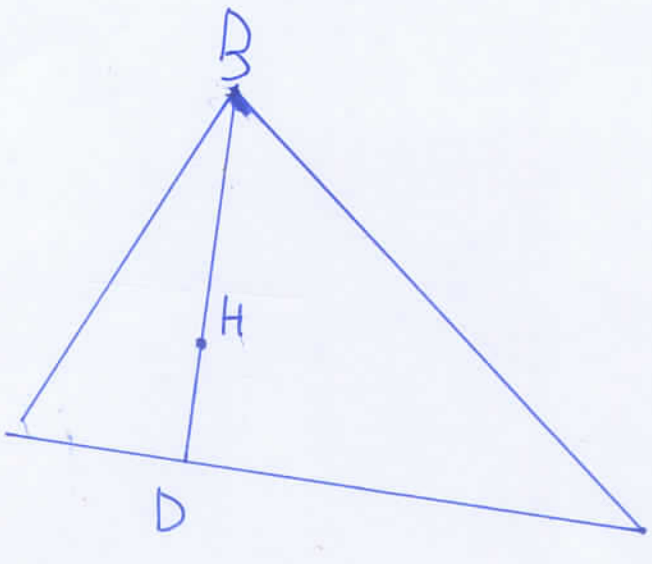
360°

Черновик

$t^3-100t \geq 2^t-16$

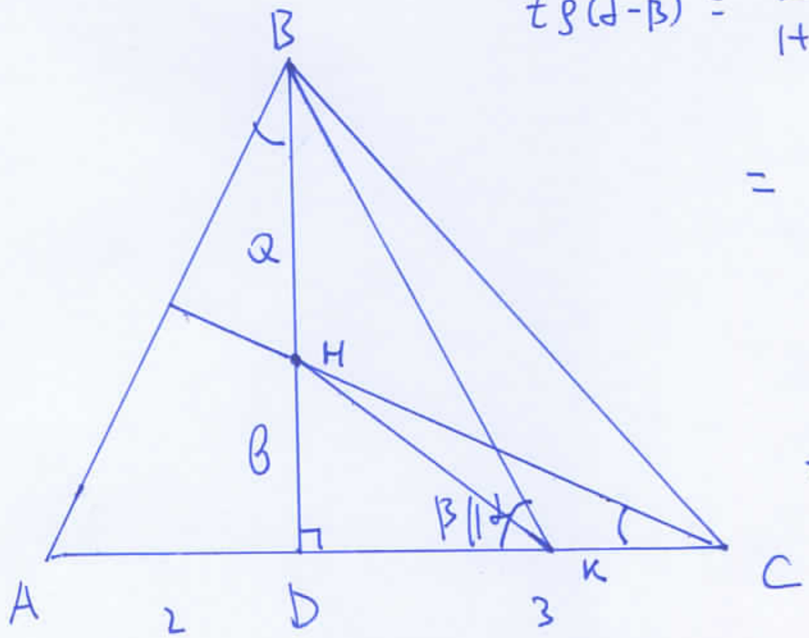
$2^t-16-t^3+100t \leq 0$

$2^t \ln 2 - 3t^2+100$



СТР 18

Черновик



$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta} = \frac{\frac{BD}{DK}-\frac{DH}{DK}}{1+\frac{BD\cdot DH}{DK^2}} = \frac{BH\cdot DK}{DK^2+BD\cdot DH} =$$

$$\frac{ax}{x^2+(a+в)в}$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DC}{HD}$$

$$\left(\frac{a}{x+\frac{(a+в)в}{x}}\right)'$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos}}$$

Черновик

$\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}$

$\frac{2a+1}{a^2(a+1)^2} + \frac{2a+3}{(a+1)^2\cdot(a+2)^2}$

$(\sqrt{3}-1)^2 = 3+1-2\sqrt{3}$

$\frac{(2a+1)(a+2)^2+(2a+3)a^2}{a^2}$

$\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$

$\underline{3}$

$\frac{1}{(a+1)^2} - \frac{1}{a^2}$

$\sqrt[3]{2}$

$\frac{32}{2^2\cdot 3^2}$

$\frac{3\cdot 3^2+5}{12^2\cdot 3^2}$

$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2} =$

$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144}$

$=$

$\frac{a+b}{a^2b^2}$

$\frac{2a+1}{a^2(a+1)^2} \leqslant$

$\leqslant \frac{2a+2}{a^2(a+1)^2} =$

$= \frac{2}{a^2(a+1)} < \frac{2}{a^3}$