МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Мирошников Александр Игоревич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	10	15	0	15

Чистовик 1

Задача 1

$$B=\frac{6\sqrt{4-2\sqrt3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt3+1}}{3\sqrt2}=\frac{6\sqrt{(\sqrt3-1)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt3+1}}{3\sqrt2}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt3-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt3+1}}{3\sqrt2}=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt3)^2-1^2}{2}}=\sqrt[3]{\frac{2}{2}}=1$$

$$A=\frac{2\cdot1+1}{(1(1+1))^2}+\frac{2\cdot2+1}{(2(2+1))^2}+\ldots+\frac{2\cdot44+1}{(44(44+1))^2}.$$

Рассм. число $\frac{2\cdot1+1}{(1(1+1))^2}+\frac{2\cdot2+1}{(2(2+1))^2}+\ldots+\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$ и докажем, что оно равно $\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$. по индукции.

База индукции: $n=1 \Rightarrow \frac{2\cdot1+1}{(1(1+1))^2}=\frac34=\frac{(1+1)^2-1}{(1+1)^2}.$

$$n=2\Rightarrow\frac{2\cdot1+1}{(1(1+1))^2}+\frac{2\cdot2+1}{(2(2+1))^2}=\frac34+\frac5{36}=\frac{27+5}{36}=\frac{32}{36}=\frac89=\frac{(2+1)^2-1}{(2+1)^2}.$$

$$n=3\Rightarrow\frac89+\frac{2\cdot3+1}{(3(3+1))^2}=\frac89+\frac7{144}=\frac{128+7}{144}=\frac{135}{144}=\frac{15}{9}=\frac{(3+1)^2-1}{(3+1)^2}..$$

Инд. переход: $\underbrace{\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}}_{\text{сумма для } n}+\overbrace{\frac{2(n+1)+1}{((n+2)(n+1))^2}}^{n+1\text{-й член}}=\frac{(n^2+2n)(n+2)^2+2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=$

(перейдём от n к $n+1$)

$$=\frac{n^4+6n^3+12n^2+8n+2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{n^4+6n^3+12n^2+10n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}$$

$(n+1)^2(n^2+4n+3)=n^4+4n^3+3n^2+2n^3+8n^2+6n+n^2+4n+3=n^4+6n^3+12n^2+10n+3$ — ок.

$\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}$ — сумма для $(n+1)$. При этом для $\forall n$ $\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}=1-\frac{1}{(n+2)^2}<1=B$

A — это сумма для $n=89 \Rightarrow A<B$

~~Ответ~~: $A<B$.

Чистовик 2

Задача 2

Нет 2-зн. чисел начин. на 1, которые делятся на 23 => 2-я цифра 9

$19 \to 192$ (1)

$19 \to 195$ (2)

$92 = 23 \cdot 4$

$95 = 19 \cdot 5$

(1) После 2 должна идти 3, т.к. нет чисел $[20;29]$ $\vdots 19$, $23 \vdots 23$

После 3 должна идти 8, т.к. нет чисел $[30;39]$ $\vdots 23$, $38 = 19 \cdot 2$

Нет чисел $(80;89]$, $\vdots$ на 19 или 23 ($23 \cdot 3 = 69 < 80$, а $23 \cdot 4 = 92 > 80$, ~~$19 \cdot 3 = 57 < 80$~~, а $19 \cdot 4 = 76 < 80$, а $19 \cdot 5 = 95 > 80$).

Значит вариант 192... не подх.

(2) После 5 должна идти 7, т.к. нет чисел $[50;59]$ $\vdots 23$, $57 \vdots 19$ ($57 = 3 \cdot 19$).

После $7 \to 6$ ($69 = 3 \cdot 23$, $19 \cdot 3 = 57$, $19 \cdot 4 = 76$).

После $6 \to 9$.

Цикл замкнулся на 9.

$1, \underbrace{9576}, \underbrace{9576}, 9 \ldots$

$2021 = 1 + 2020 = 1 + 4 \cdot 505$. => Загаданное число состоит из первой цифры 1 и 505-ти последовательностей 9576.

=> последняя цифра 6.

Ответ: цифрой 6.

Задача 3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} \quad \text{1 раз}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{\left(\frac{1-x^7-1}{1-x^7}\right)}} = \sqrt[7]{\frac{1-x^7}{-x^7}} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}} \quad \text{2 раза}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{(x^7-1)}{x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{\left(\frac{x^7-x^7+1}{x^7}\right)}} = \sqrt[7]{\left(\frac{1}{x^7}\right)^{-1}} = x. \quad \text{3 раза}$$

т.е. На 3-м прим. f мы зациклились.

$1304 \underset{3}{\equiv} 2$ => искомое число равно $\sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}} = \sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}} =$ ($x = 2022$)

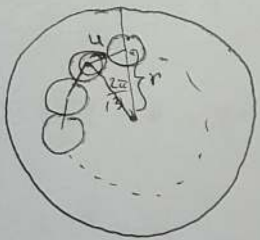
$= \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

Ответ: $\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

Чистовик 3

Задача 4

Вид сверху:



Расст. между центрами 2-х соседних шаров $2\cdot 2=4$.

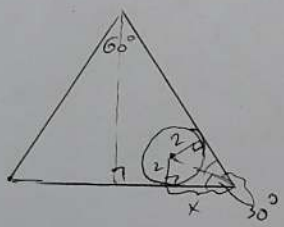
Угол с вершиной в центре основания и с лучами, проходящими через точки касания соседними шарами основания равен $\frac{2\pi}{13}$, т.к. шаров всего 13.

Точка касания шаром осн. – орт. проекция его центра на осн.

$4=2r^2-2r^2\cos\frac{2\pi}{13} \Rightarrow r^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{13}\right)=2 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{2}{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}$

Вид на осевое сечение конуса, проходящее через диаметр. сечение одного из шаров:

$\frac{2}{x}=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=2\sqrt{3}$.



$R=x+r=2\sqrt{3}+\sqrt{\frac{2}{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}$

<u>Ответ</u>: $R=2\sqrt{3}+\sqrt{\frac{2}{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}$.

Задача 5

$a=t^3-81t=t(t-9)(t+9)$

$a>0 \Leftrightarrow t\in(-9;0)\cup(9;+\infty)$.

$b=11^t-121$. $\quad b>0 \Leftrightarrow 11^t>121 \Leftrightarrow t>2$.

$c=\sin t-\frac{1}{2} \Rightarrow c>0 \Leftrightarrow \sin t>\frac{1}{2} \Leftrightarrow t\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$

Чтобы среднее было >0, нужно, чтобы хотя бы 2 числа из a, b и c были >0. Тогда большее из двух положит. чисел – максимум, а меньшее – среднее. Аналогично, если 2 числа из a, b и c ≤ 0, то и среднее ≤ 0.

1.) $t>0 \Rightarrow a, b>0$. – подх.

2.) $t\in(-9;0) \Rightarrow a>0,\ b<0$. Нужно, чтобы $c>0$.

$\frac{\pi}{6}>0$ – не подх. $\quad -\frac{7\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}-2\pi<0$ – подх. $\quad -\frac{11\pi}{6}=\frac{\pi}{6}-2\pi>-9 \Rightarrow -11\pi>-54$ – ист.

$-\frac{19\pi}{6}<-9 \Leftrightarrow -19\pi<-19\cdot 3=-57<-54$ – ист. – не подх.

Между $-\frac{11\pi}{6}$ и $-\frac{19\pi}{6}$ нет чисел вида $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$,

т.е. подх. $\left(-\frac{11\pi}{6};-\frac{7\pi}{6}\right)$

Чистовик 4

прод. Задача 5

3.) $t \in (2;9) \Rightarrow b > 0,\ a < 0$. Нужно $c > 0$.

$\frac{\pi}{6} < 2$. $\quad \frac{5\pi}{6} > 2 \Rightarrow 2\cdot 6 < 15 = 5\cdot 3 < 5\pi$ — ист. $\qquad \frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$

$\frac{17\pi}{6} < 9 \Rightarrow \pi < \frac{54}{17}$ $\qquad$ $54 : 17 = 3,17\ldots$ $\Rightarrow \frac{54}{17} > 3,17 > \pi$. — ист.

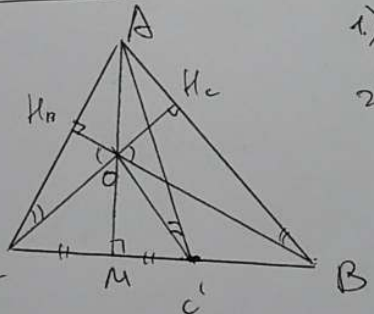
$\frac{5\pi}{6} + 2\pi$

$\frac{25\pi}{6} > 9$

т.е. подх. $\left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$.

Задача 7



1) $H_B\hat{O}C = H_C\hat{O}B \Rightarrow \triangle OCH_B \sim \triangle OH_CB \Rightarrow A\hat{C}O = A\hat{B}O$.

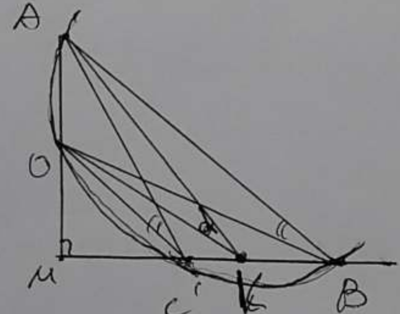
2) от. (.) M отложим $[MC']$ на $[MB)$: $|MC'| = |MC| = 3$.

$\Rightarrow A\hat{C}M = A\hat{C'}M$
$O\hat{C}M = O\hat{C'}M \Rightarrow A\hat{C'}O = A\hat{C}O = A\hat{B}O$.

$\Rightarrow$ Углы $\angle OC'A$ и $\angle OBA$ опир. на $[AO]$ и равны $\Rightarrow$

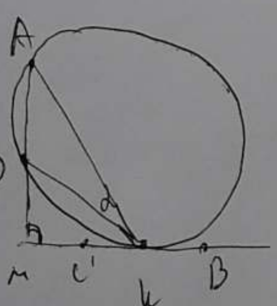
(.) O, C', B и A лежат на одной окр-ти.

3.)



Если (.) $K \in (BC')$, то $O\hat{K}A > O\hat{B}A$, т.к. (.) K лежит внутри окр-ти

Знач. нужна окр-ть, содержащая (.) O и A и касающаяся $[BC']$ в K $\Rightarrow$ $O\hat{K}A$ будет макс, при этом $K \in$ окр-ти.



$|MA| \cdot |MO| = |MB| \cdot |MC'| = 5 \cdot 3 = 15$.

$|MK|^2 = |MA| \cdot |MO| = 15 \Rightarrow |MK| = \sqrt{15}$.

Ответ: $|MK| = \sqrt{15}$

Черновик

$4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$ $\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}=\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$.

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{3-1}{2}}=1.$$

$24\cdot16=144$, $144+240=384$; $25\cdot15=125$, $125+250=375$

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}=\frac{27+5}{36}=\frac{32}{36}=\frac{8}{9}.$$

$A=\frac{3}{\quad}$

$$\frac{8}{9}+\frac{7}{144}=\frac{128+7}{144}=\frac{135}{144}=\frac{15}{16}. \qquad \frac{15}{16}+\frac{9}{400}=\frac{384}{400}=\frac{24}{25}.$$

$$\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}+\dots+\dots=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$$

$(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}+\frac{2(n+1)+1}{((n+1)(n+2))^2}=\frac{2n+3+(n^2+2n)(n+2)^2}{((n+1)(n+2))^2}=$$

$$=\frac{n(n+2)^3+2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{n^4+6n^3+12n^2+8n+2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{n^4+6n^3+12n^2+10n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=$$

$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}<1=B.$$

$$(n^2+2n+1)(n^2+4n+3)=n^4+4n^3+3n^2+2n^3+8n^2+6n+n^2+4n+3=n^4+6n^3+12n^2+10n+3.$$

19238

19576 9576 9

$2021A\ 1+2020=5\cdot404\cdot+1$

$2020:4\ (2020=505\cdot4)$

$\boxed{6}$

$19\cdot5=95$ $19\cdot3=57$

$19\cdot4=76$

$23\cdot3=69$

$23\cdot4=92$

$f(x)$

2 раза $f\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^7}}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{\sqrt{1-x^7}-1}{\sqrt{1-x^7}}}}=\sqrt[7]{\frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{\sqrt[7]{1-x^7}-1}}$

3 раза $f\left(f\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}}}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{\sqrt[7]{1-x^7}-1}}}=\sqrt[7]{\sqrt{1-x^7}-1}$

$$=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{\sqrt[7]{1-x^7}-1-\sqrt[7]{1-x^7}}{\sqrt[7]{1-x^7}-1}}}=\sqrt[7]{\frac{\sqrt[7]{1-x^7}-1}{-1}}=\sqrt[7]{1-\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$\Rightarrow f(f(x))=\sqrt[7]{\left(1-\sqrt[7]{1-x^7}\right)}$

4 раза Черновик

стр. 6

$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-(1-\sqrt[7]{1-x^7})}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\sqrt[7]{1-x^7}}}$

5 раз $\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}}}$

0 раз x

1 раз $f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

2 раза $f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1-x^7}{-x^7}} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}} = \sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}$

3 раза $f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-(1-\frac{1}{x^7})}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}} = \sqrt[7]{x^7} = x.$

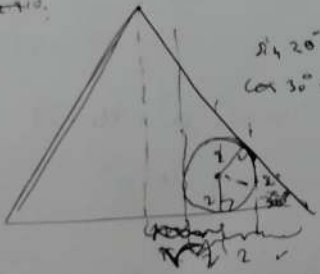
0 1 2 3 4 5 6

x x x

$1304 : 3 \Rightarrow x = 2022$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\frac{2}{2+x} = tg\, 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$2\sqrt{3} = 2+x \Rightarrow x = 2(\sqrt{3}-1)$

$2+x = 2\sqrt{3}$

$R = r + 2\sqrt{3}$

$4 = 2r^2 - 2r^2\cos\frac{2\pi}{13} \Rightarrow 2r^2(1-\cos\frac{2\pi}{13}) = 4 \Rightarrow r^2 = \frac{2}{1-\cos\frac{2\pi}{13}} = \frac{2(1+\cos\frac{2\pi}{13})}{\sin^2\cos\frac{2\pi}{13}}$

$c \in [-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$

$11^6 - 121 > -121$

$\cos b(b^2-81) = b(b-9)(b+9)$

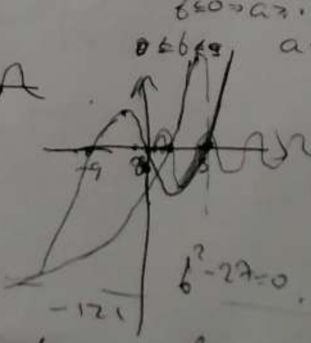
$b \le 0 \Rightarrow a \ge$

$3b^2 - 81 = 0 \Rightarrow$

$b^2 = 27 \Rightarrow$

$b = \pm 3\sqrt{3}$

$0 \le b \le 9$ $a \le 0$



$(-3\sqrt{3})^3 + 81 \cdot 3\sqrt{3} =$

$= -27 + 243\sqrt{3} =$

$= 27(9\sqrt{3}-1)$

$b^2 - 27 = 0$

a, b, c < 0 – не подх.

a, b, c > 0 – подх.

a, b, < 0, c > 0 – не подх.

$a > 0 \Rightarrow b \in (-9; 0) \cup (9; +\infty)$

$b > 0 \Rightarrow b \in (2; +\infty)$

$c > 0 \Rightarrow b \in (\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k), k \in \mathbb{Z}$

$b > 9 \Rightarrow a, b > 0$ – подх.

$b \le -9 \Rightarrow a, b \le 0$ – не подх.

$b \in (-9; 0)$ и $b > 0$

$\frac{\pi}{6}+2\pi k>-9 \Rightarrow 2\pi k>-9-\frac{\pi}{6} \Rightarrow k>-\frac{9}{2\pi}-\frac{1}{12}.$

$-\frac{9}{2\pi}>-\frac{9}{7}$

$-\frac{9}{2\pi}-\frac{1}{12}>-\frac{9}{7}-\frac{1}{12}=-\frac{108+7}{84} \in (-2;-1).$

$\frac{23\pi}{6} \vee 9 \Rightarrow 23\pi \vee 54$

$23\pi > 23\cdot 3=69>54.$

$\frac{19\pi}{6}\vee 9 \Rightarrow 19\pi \vee 54$ ... $19\pi>19\cdot 3=57>54.$

$\left(-\frac{11\pi}{6};-\frac{7\pi}{6}\right)\cup \cancel{(9;+\infty)}.$

$17\pi \not< 54$

$\pi \not< \frac{54}{17}.$

$54 : 17 = 3{,}17\ldots$

$\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$ $\frac{25\pi}{6}>9$; $\frac{29\pi}{6}$ ~~>9~~.

$\frac{17\pi}{6}<9 \Rightarrow 17\pi<54$ ~~...~~

~~$17\cdot 3{,}2=54$~~ . $\frac{54}{17}>3{,}15>\pi.$

$\frac{54}{17}>3{,}17>\pi\ldots$

$\frac{17\pi}{6}<9.$

$\frac{13\pi}{6}>2 \Rightarrow 13\pi>12$

$\frac{5\pi}{6}\vee 2 \Rightarrow 5\pi > 12.$ $\frac{\pi}{6}<2$

$5\pi>5\cdot 3=15>12 \Rightarrow$

$\left(-\frac{11\pi}{6};-\frac{7\pi}{6}\right)\cup\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{13\pi}{6};\frac{17\pi}{6}\right)\cup(9;+\infty)$

$2a^2-2a-1=$

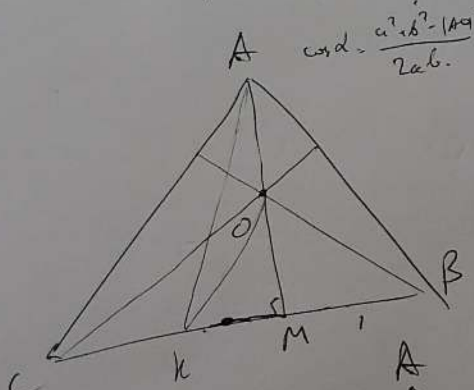
$2a^2+a-1=(2a\ \ )(a-\ \ )$

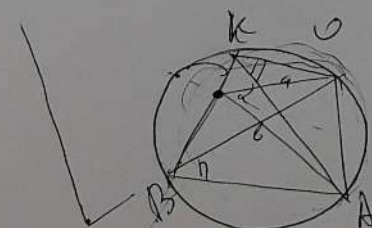
$=(2a-1)(a+1)=$

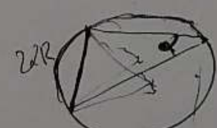
$\lg x = t$

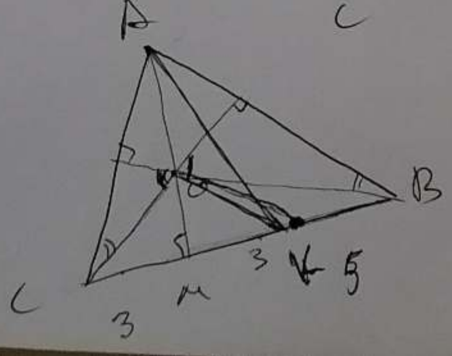
$at^3+(1-2a)(\cos x)t^2+(2a^2-2a-1)t+2a=0.$

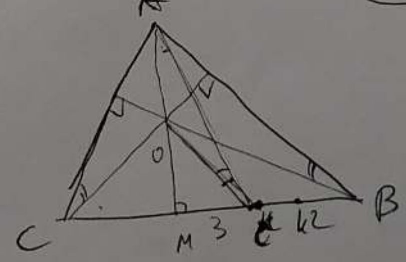
$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-|AB|^2}{2ab}.$

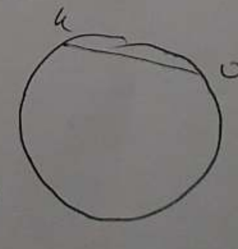












Черновик