МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Михалко Ярослав Александрович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	0

Чистовик 1

№1 1) $A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$= \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = 1$

2) $B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} =$

$= \underbrace{\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}}_{\frac{3}{(1\cdot2)^2}} + \underbrace{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}}_{\frac{5}{(2\cdot3)^2}} + \ldots + \frac{1}{59^2} - \frac{1}{60^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{60^2} = 1 - \frac{1}{60^2} < 1$

Ответ: $A > B$

№2 1) Выпишем все двузначные числа, которые делятся на 19 и на 23

на 19	на 23
19	23
38	46
57	69
76	92
95	

1

2) Р-м наше число: $\overline{4\ldots\ldots a}$

Если первая цифра 4, то вторая 6 (См пункт 1) →

→ 3-я цифра 9

3) Далее возможны 2 варианта: Чистовик 2

4-я цифра 2 или 4 цифра 5

4 6 9 2

4 6 9 5

Продолжим восстанавливать наше число

4 6 9 2 3 8 ✗

Заметим, что нет двузначного числа начинающегося с 8 и уд. условию → блок 9238 стоит последним

$4\underbrace{6957}6\,9\,5\ldots$

~~Наше число~~

Заметим, что блок 6957 будет повторятся длиной 4

4) Из пункта 3 получим 2 варианта числа:

4 6 9 5 7 6 9 ... 6 9 5 7 (т.к. $(2024-1) \equiv 0 \pmod 4$)

23

первое число вне блока

Ответ: 7 или 3

№3

1) Пусть $g(x) = f^{-1}(x)$

Найдём $g(x)$

$$y = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}};\quad y^7 = \frac{1}{1-x^7};\quad x^7 = \frac{y^7-1}{y^7}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$$

2

Чистовик 3

2) $f(f(x)) = \cancel{4}\frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x} = g(x)$

$\Rightarrow \quad f(f(f(x))) = \cancel{g} \quad f(g(x)) = x$

обратимость ф-ции

3) $\underbrace{f(f(f(\ldots f(2022)\ldots)}_{1304 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)} = f(f(2022)) = \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

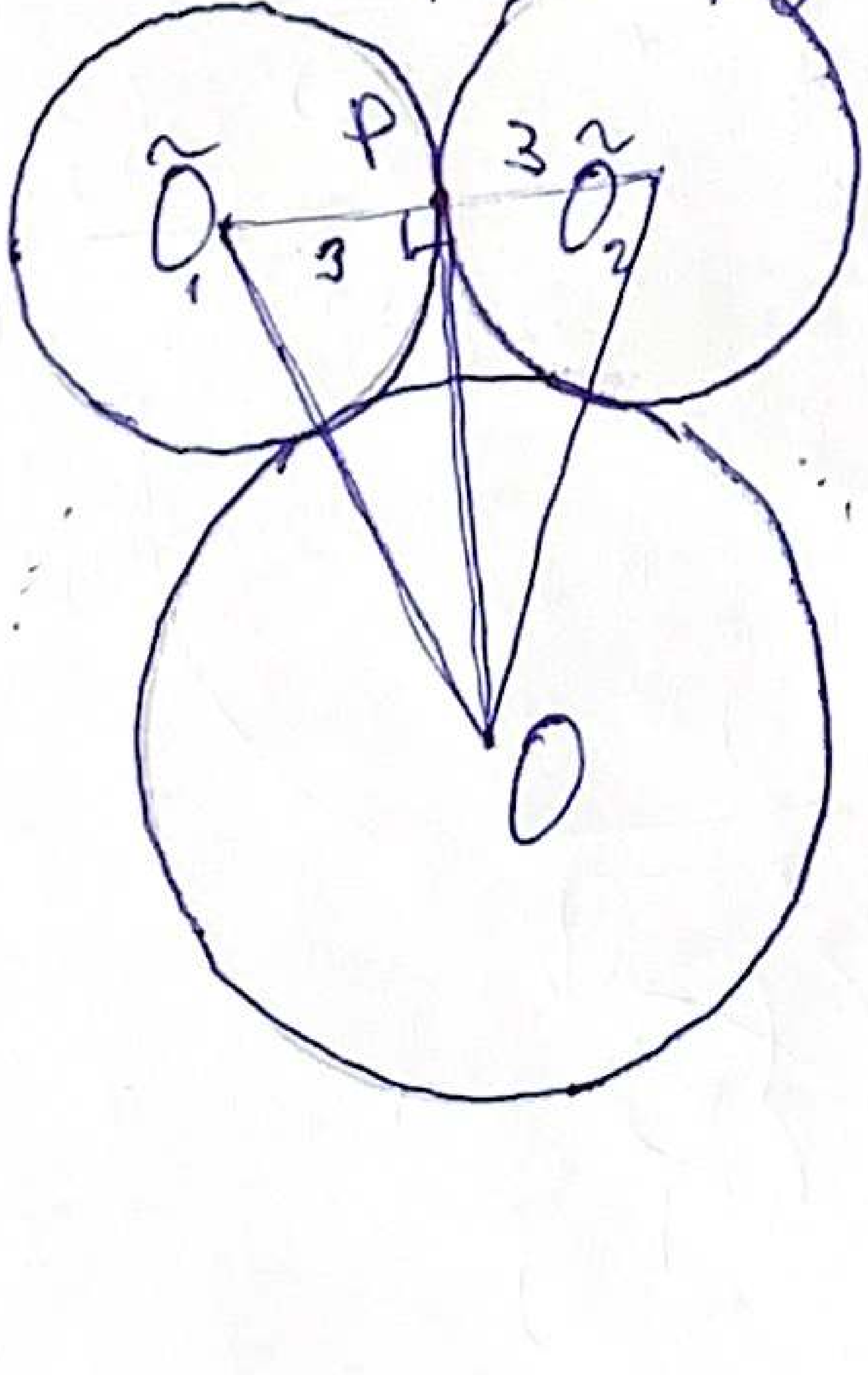
Ответ. $\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

№4 1) Пусть O - центр основания конуса,

$O_1, O_2 \ldots O_{11}$ - центры шаров

2) Спроецируем т. $O_1, O_2 \ldots O_{11}$ на пл.-ть основания

$O_i \to \tilde{O}_i$



На плоскости образуется 11 треугольников равных

$\tilde{O}_i O \tilde{O}_{i+1}$ $\quad \angle \tilde{O}_i O \tilde{O}_{i+1} = \frac{2\pi}{11}$

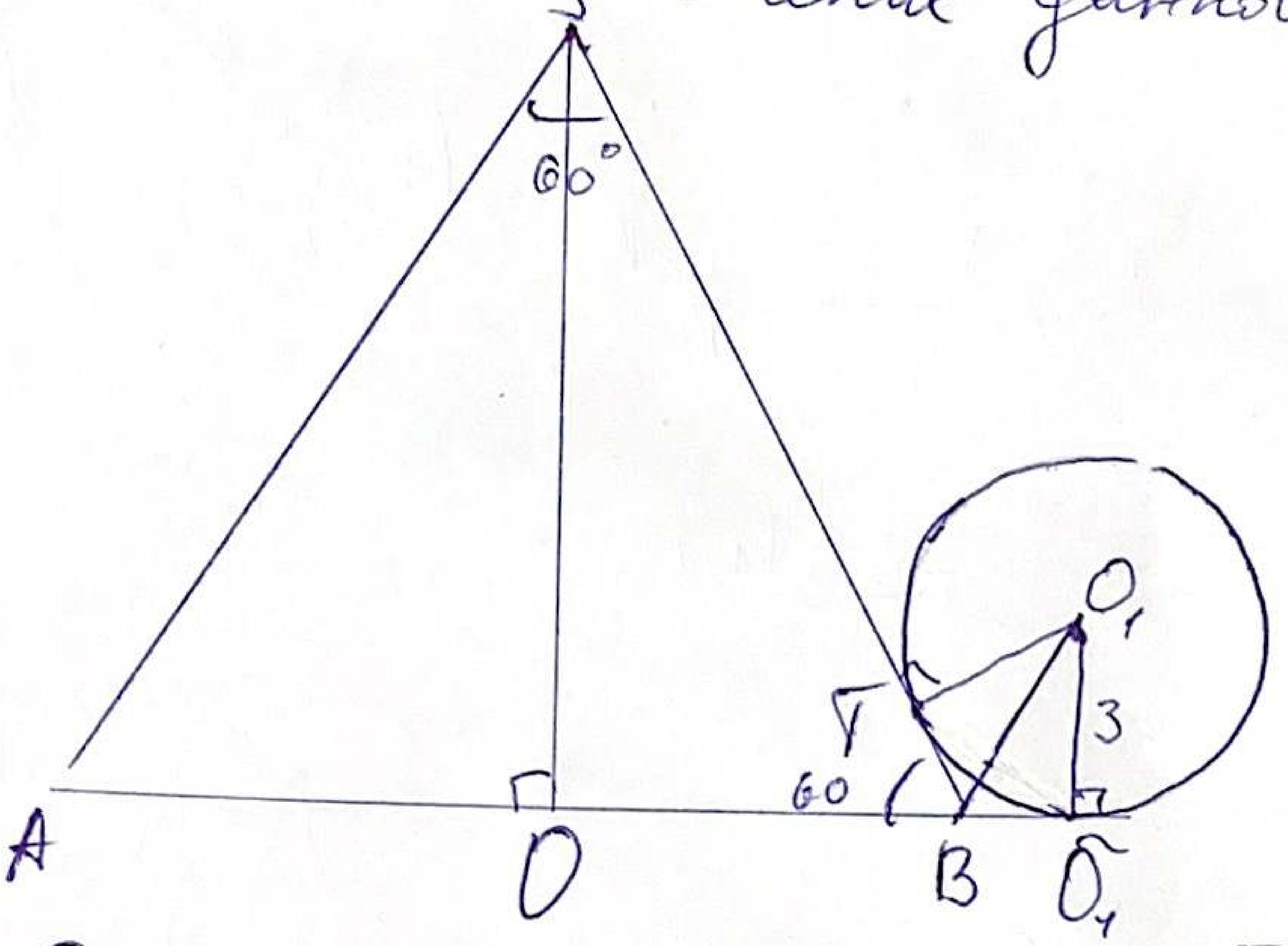
$\angle O_1 O P = \frac{\pi}{11}$ ($\triangle \tilde{O}_1 O \tilde{O}_2$ - Р/б)

$\tilde{O}_1 \tilde{O}_2 = O_1 O_2 = 6 \to \tilde{O}_1 O = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{11}}$

3

Чистовик 4

3) Р-м осевое сечение данного конуса



$\triangle ASB$ равносторонний (РБ с углом 60)

$\angle BO_1\tilde{O}_1 = \frac{1}{2}\angle TO_1\tilde{O}_1 = \frac{1}{2}(180 - \angle TB\tilde{O}_1) = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$

$\to B\tilde{O}_1 = O_1\tilde{O}_1\, tg 30° = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

4) $R = OB = O\tilde{O}_1 - B\tilde{O}_1 = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{11}} - \sqrt{3}$

Ответ: $\frac{3}{\sin\frac{\pi}{11}} - \sqrt{3}$

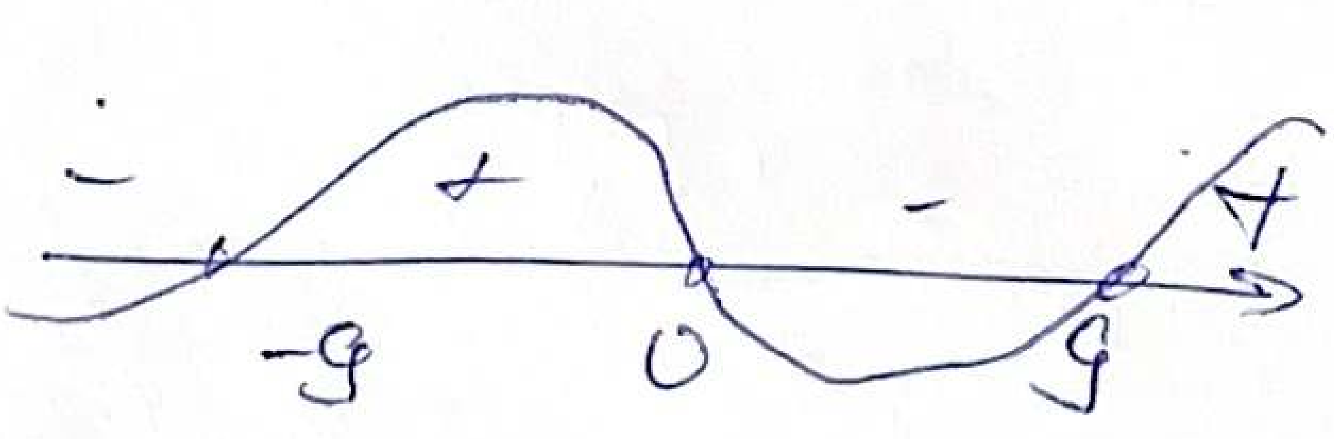
№5

1) $x_1 \le x_2 \le x_3$, $x_2 > 0 \to \begin{cases} x_2 > 0 \\ x_3 > 0 \end{cases}$

То есть нам подойдут такие t, при которых хотя бы два числа из a, b, c > 0

2) $a > 0$ $t^3 - 81t > 0$

$t(t-9)(t+9) > 0$



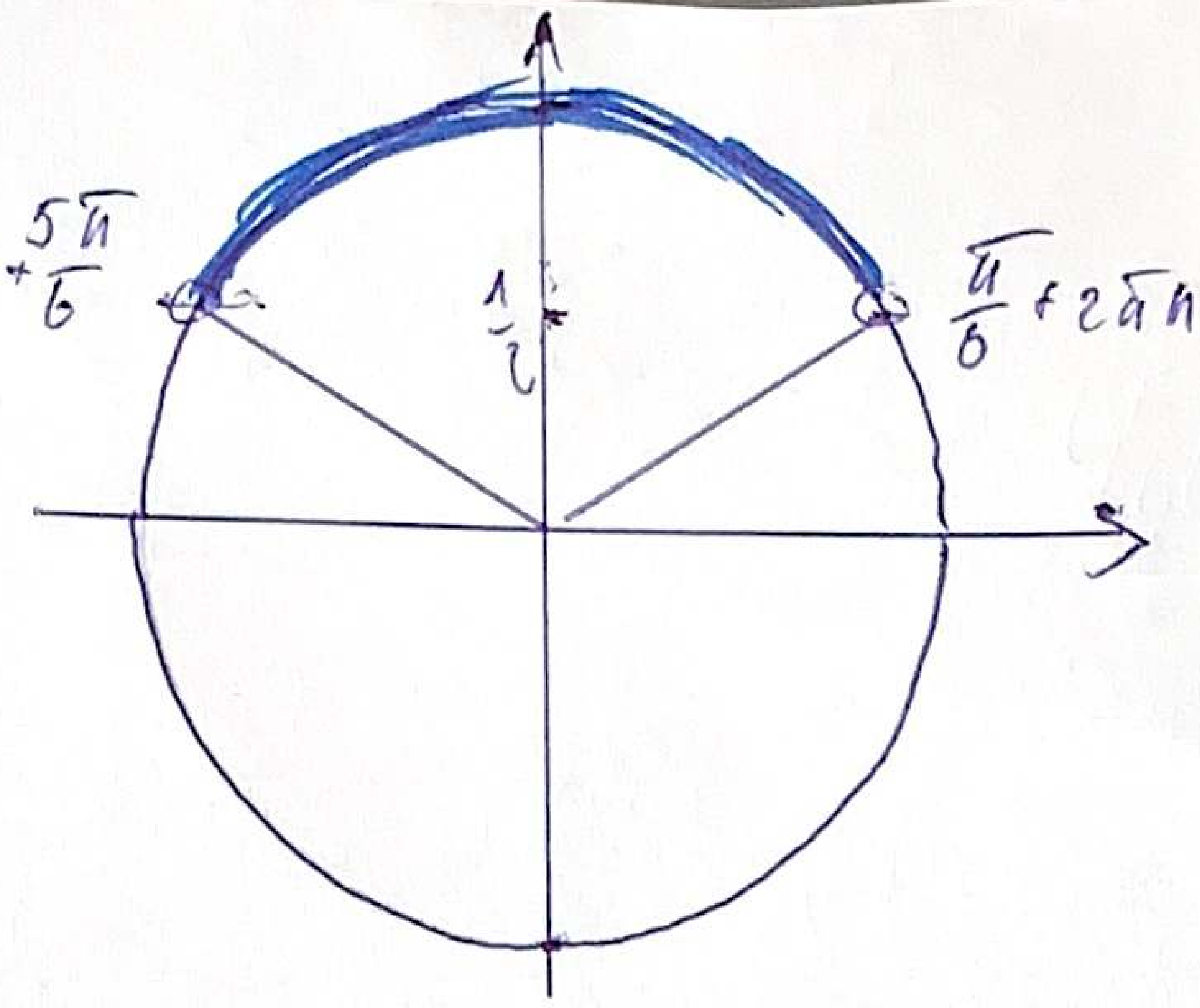
3) $b > 0$

$11^t > 121 \iff t > 2$

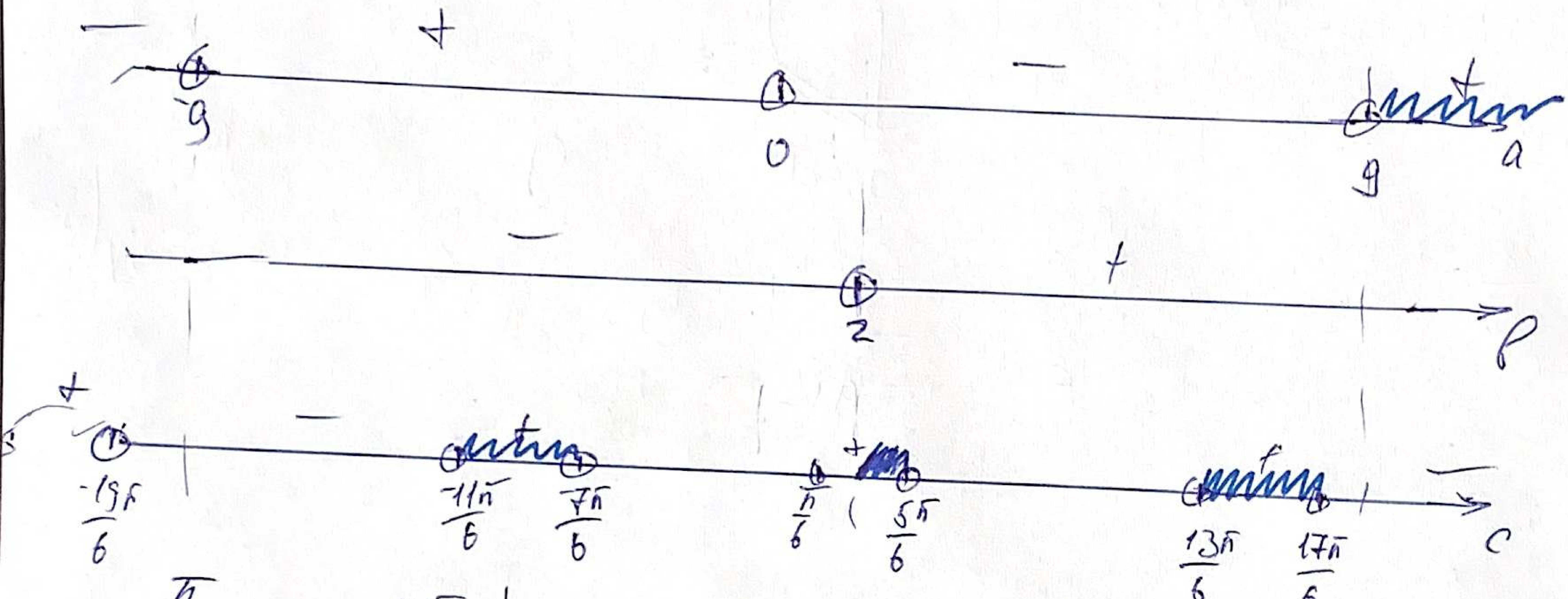
4

Частовик 5

4) $c = \sin t - \frac{1}{2} > 0$



5)



$\frac{\pi}{6} < 2 < \frac{5\pi}{6}$

$2 < \frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6} < 9$

$-9 < -\frac{11\pi}{6}$

$-\frac{19\pi}{6} < -9$

Ответ: $\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$

№6 1) $ctg\,x = t$

при $x \in (0;\pi)$ $t = ctg\,x$ - монотонная ф-ция

2) $at^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 + (2 - 4a - 2a^2)t + 4a = 0$

5

Чистовик 6

Заметим, что $t=1$ - корень этого уравнения

$a + 2a^2 - a - 2 + 2 - 4a - 2a^2 + 4a = 0$

$0 = 0$ - верно

	a	$2a^2-a-2$	$2-4a-2a^2$	$4a$
1	a	$2a^2-2$	$-4a$	0

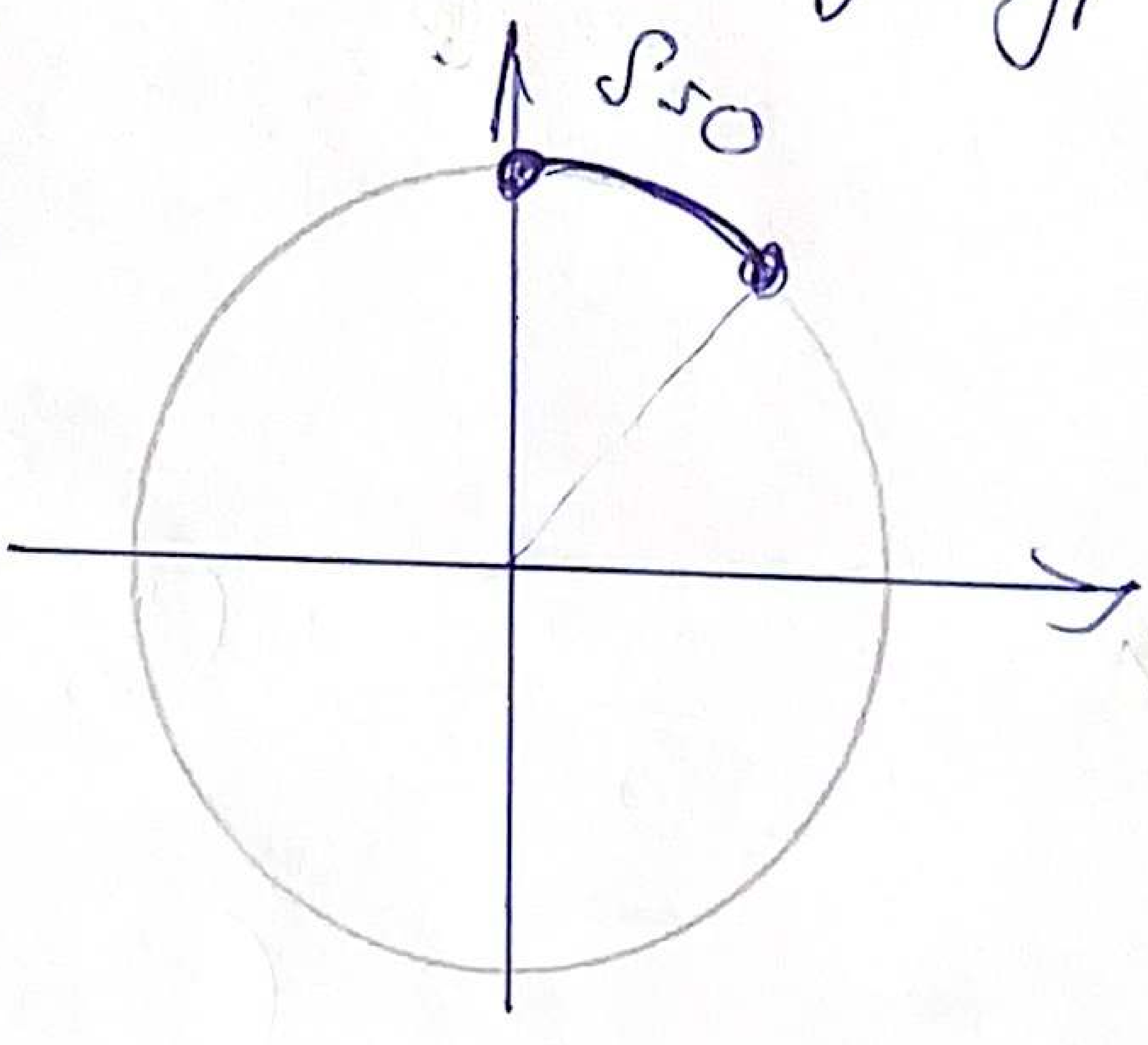
$(t-1)(at^2+(2a^2-2)t-4a)=0$

По теореме Виета: $(t-1)(t+2a)(at-2)=0$

4) Р-м случай, когда $at^2+(2a^2-2)t-4a$ не квадр. уравнение

$a=0$ — тогда $\left[\begin{array}{l} t=1 \quad ; \operatorname{ctg} x = 1 \\ t=0 \quad ; \operatorname{ctg} x = 0 \end{array}\right.$

Пусть S - расст. расстояние между корнями

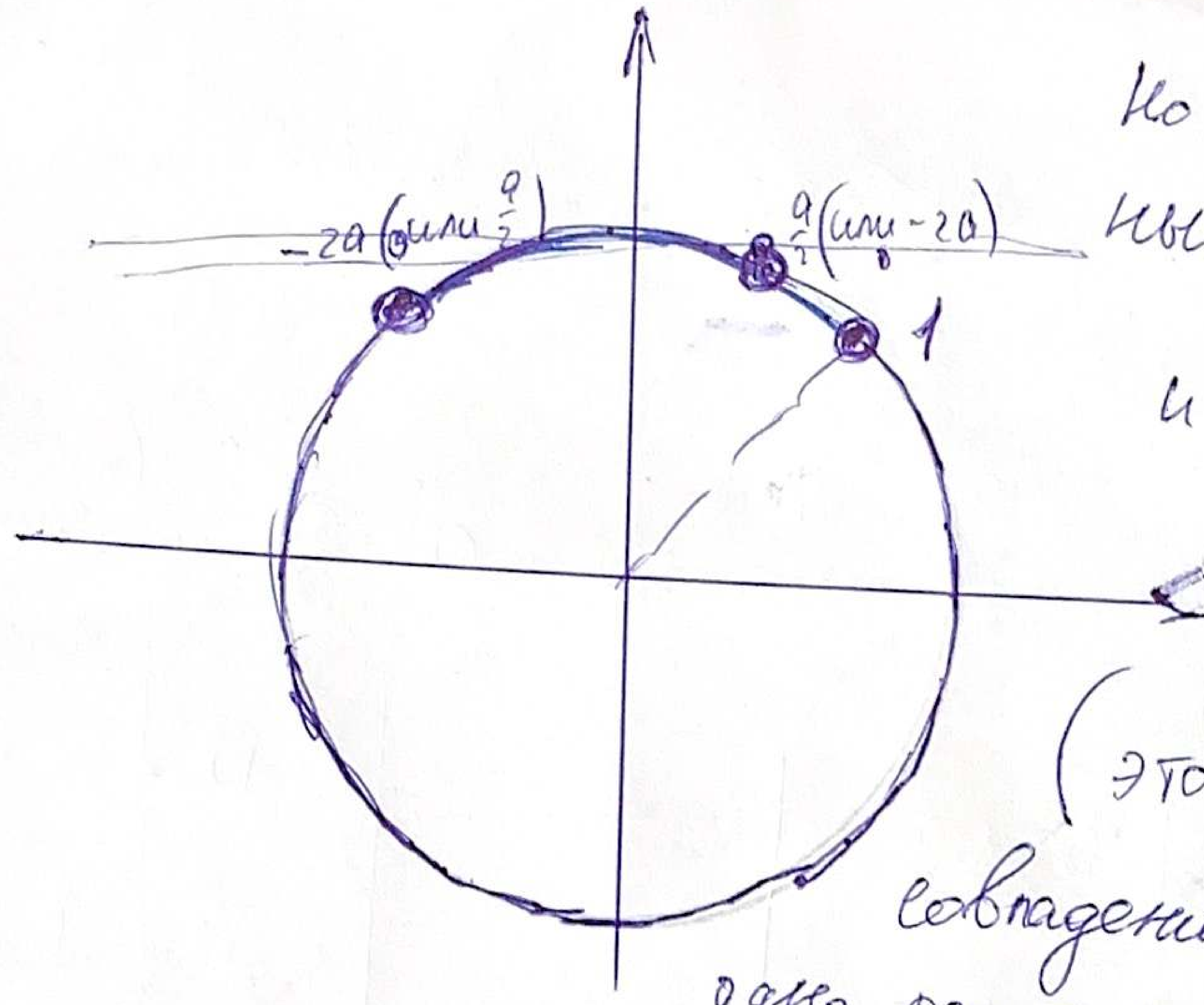


5) $a \neq 0$ тогда корни $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2a \\ t=\frac{2}{a} \end{array}\right.$

Заметим, что корни $-2a$ и $\frac{2}{a}$ разных знаков

6

Чистовик 1



Но т.к. у нас есть положительный корень 1 (не зависит от a) и есть отрицательный корень, то $S > \frac{\pi}{4}$

(этот случай учитывает совпадения корней (просто будет одно расстояние $S > \frac{\pi}{4}$))

$\longrightarrow$ $\min S = \frac{\pi}{4} \longrightarrow a = 0$ $\longrightarrow$

Ответ: $a = 0$

$S = \frac{\pi}{4}$

7

$ctg\,x = t$

Черновик 1

$at^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 + (2 - 4a - 2a^2)t + 4a = 0$

$t = 1$: $a + 2a^2 - a - 2 + 2 - 4a - 2a^2 + 4a = 0$

$t = 1$ — корень, не зависящий от параметра

	a	$2a^2 - a - 2$	$2 - 4a - 2a^2$	$4a$
1	a	$2a^2 - 2$	$-4a$	0

$2a^2 - 2 + 2 - 4a - 2a^2 =$

$(t-1)(at^2 + (2a^2 - 2)t - 4a)$

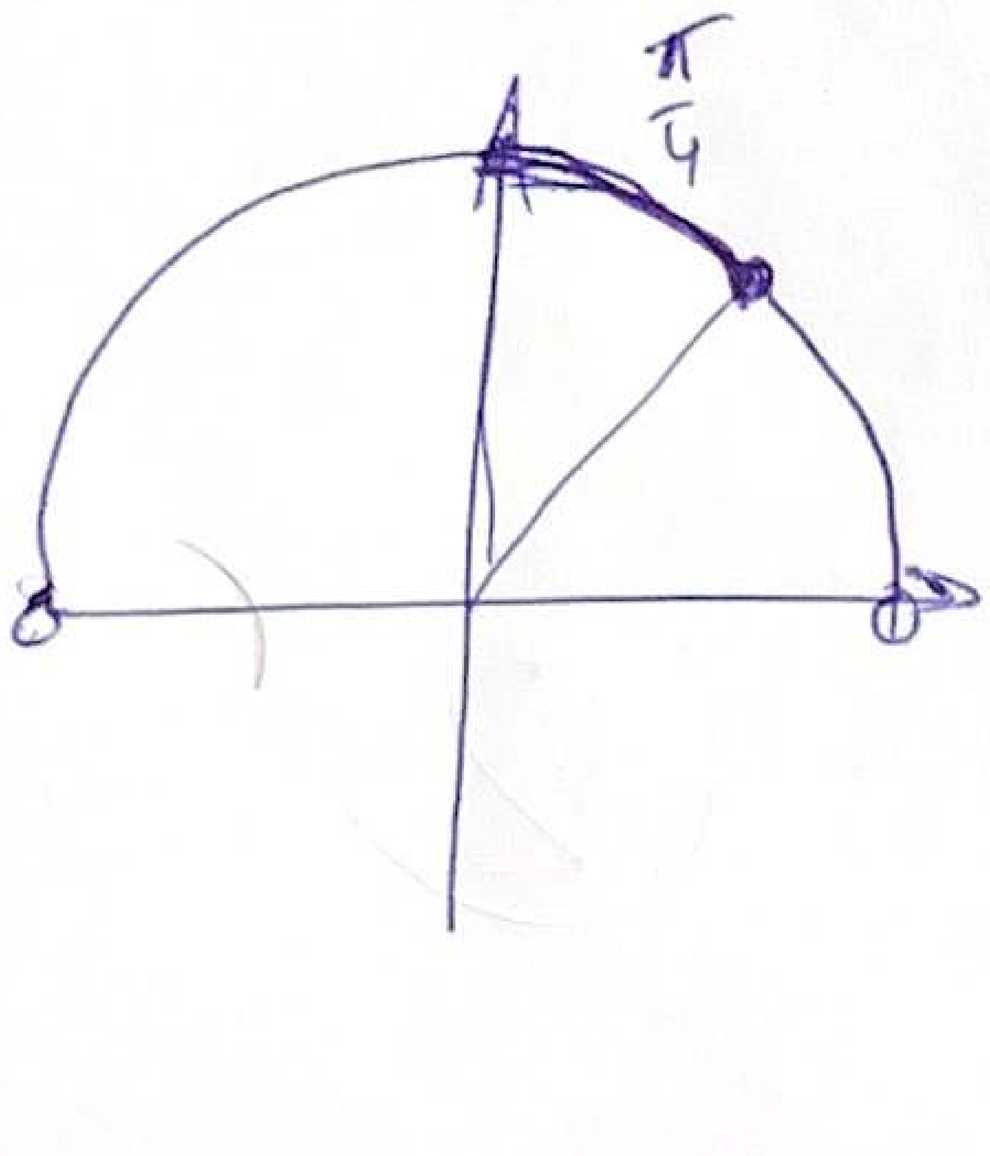
$-2a + \frac{2}{a}$

$(t-1)(t+2a)(at-2) = 0$

$\frac{2}{a}$

0) $a = 0$: $t = 1$, $t = 0$

$-2a$



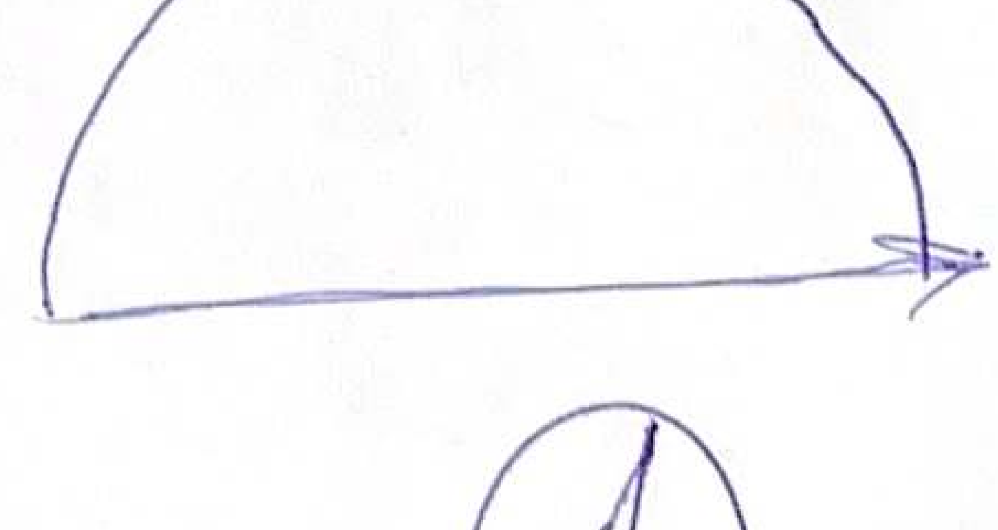
$-2a = \frac{2}{a}$ $a^2 = 4$

$\cos = 0$

1) $ctg\,x = 1$

$ctg\,x = -2a$

$ctg\,x = \frac{2}{a}$



1

Черновик 2

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{1\sqrt{x^7-1}}{x} = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{x^7-1}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{\cancel{x^7}-\cancel{x^7}+1}{x^7}}} =$$

$$= x$$

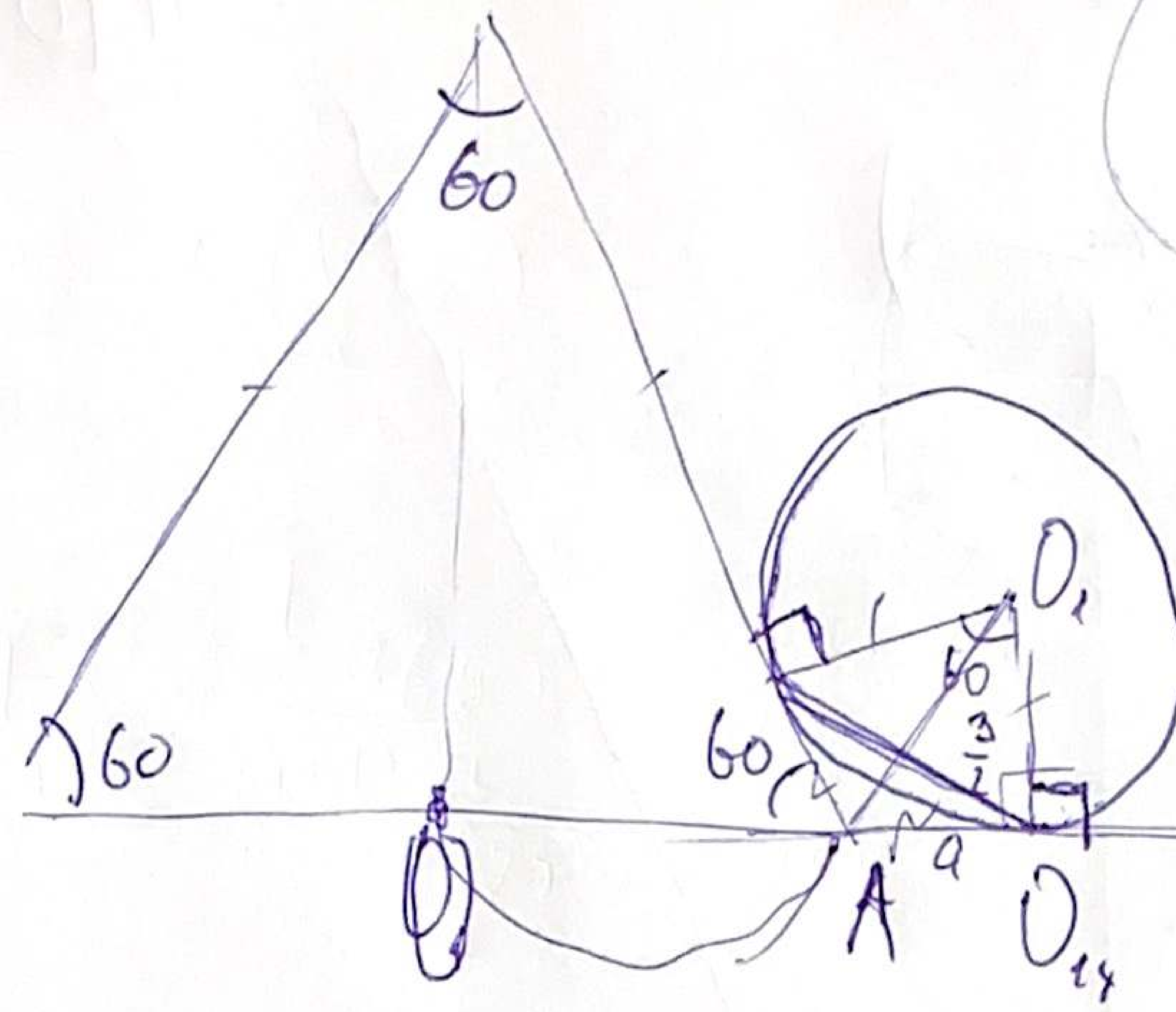
$1304 \equiv 2 \pmod 3$

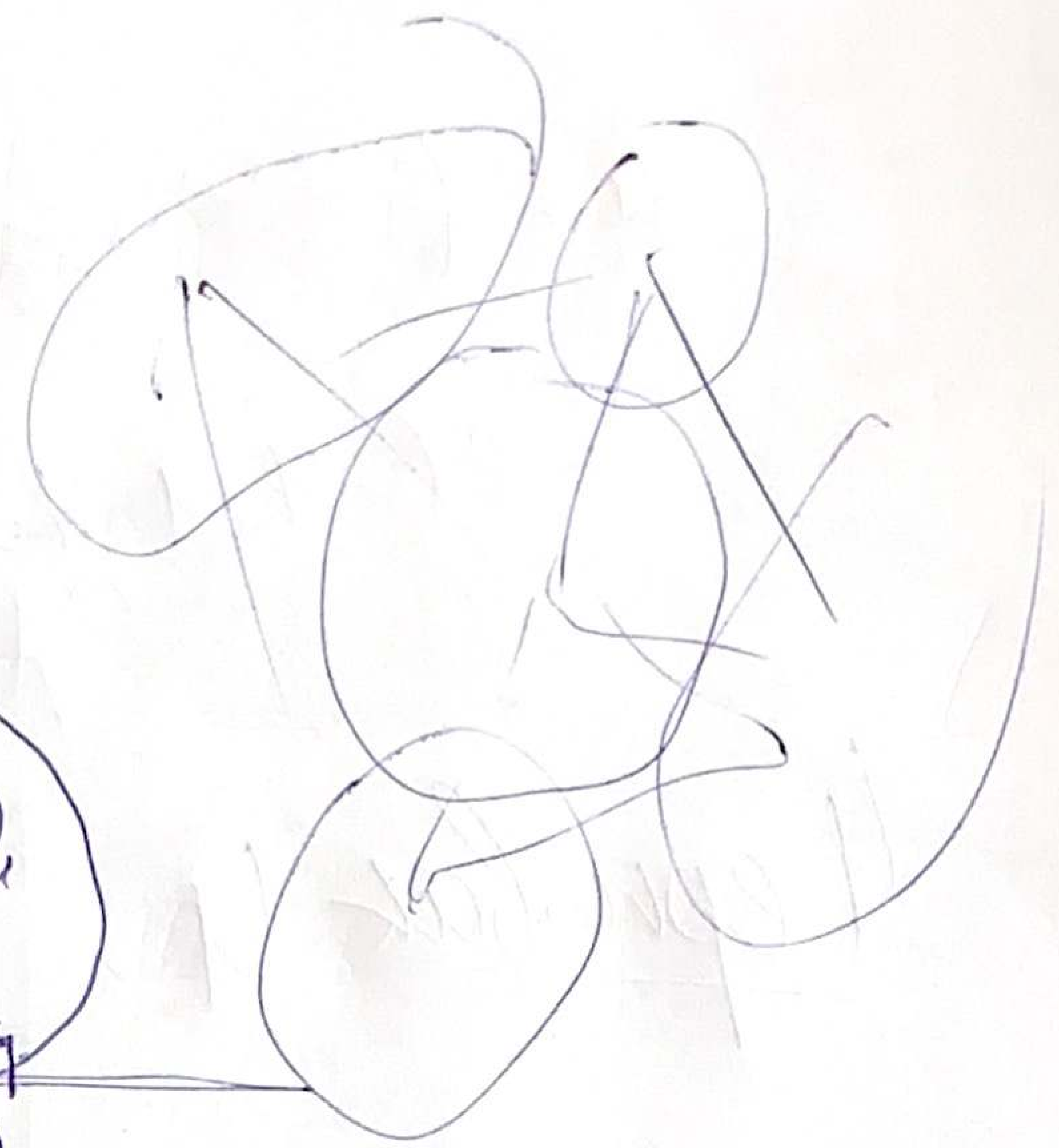
$$f(f(x)) = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$$

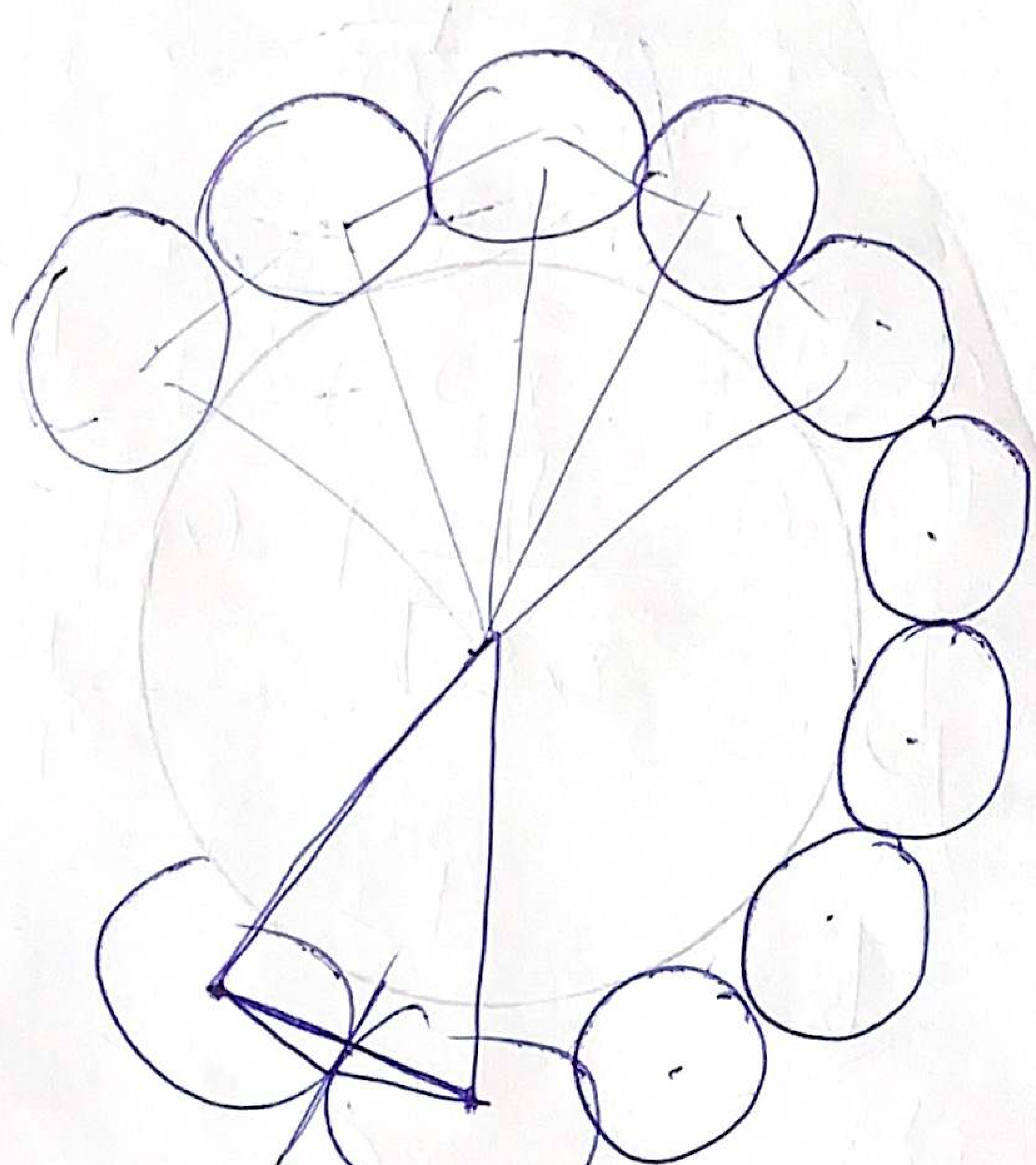
Ответ: $\boxed{\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}}$

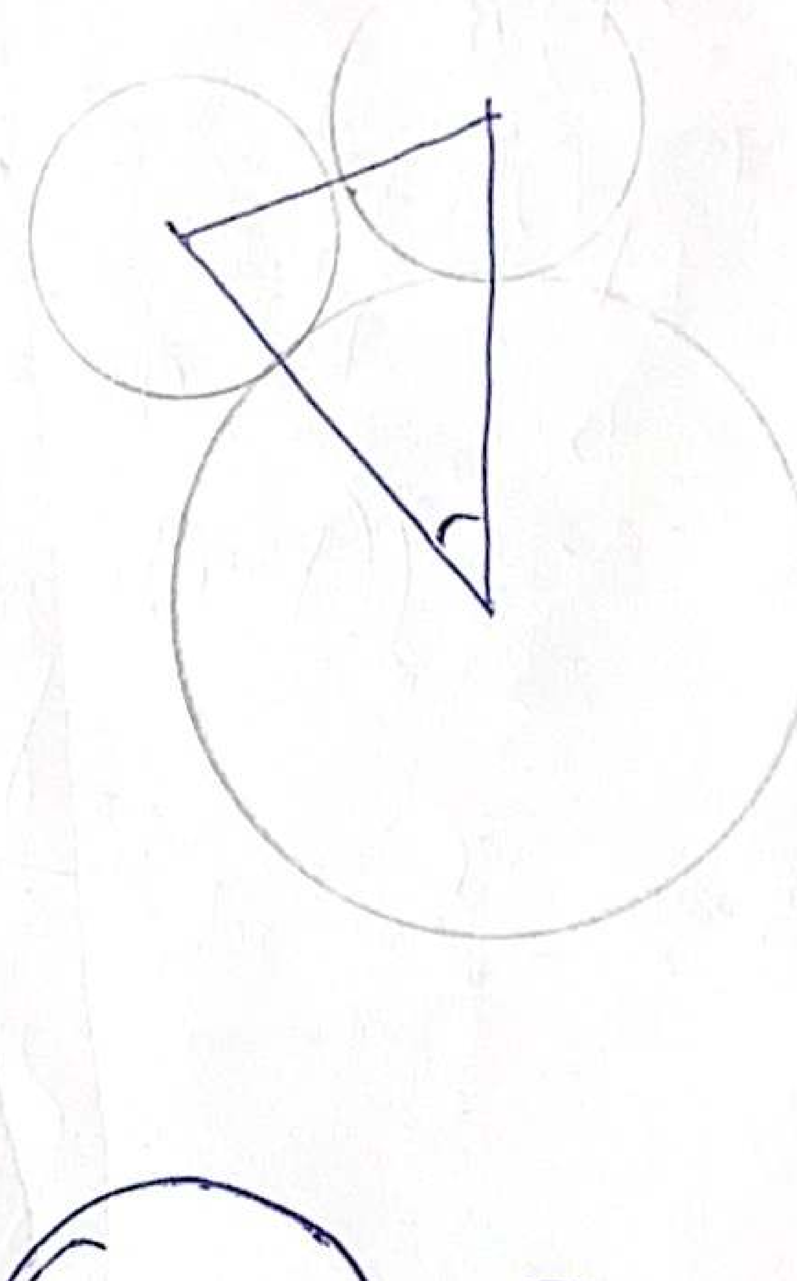
2

Черновик 3

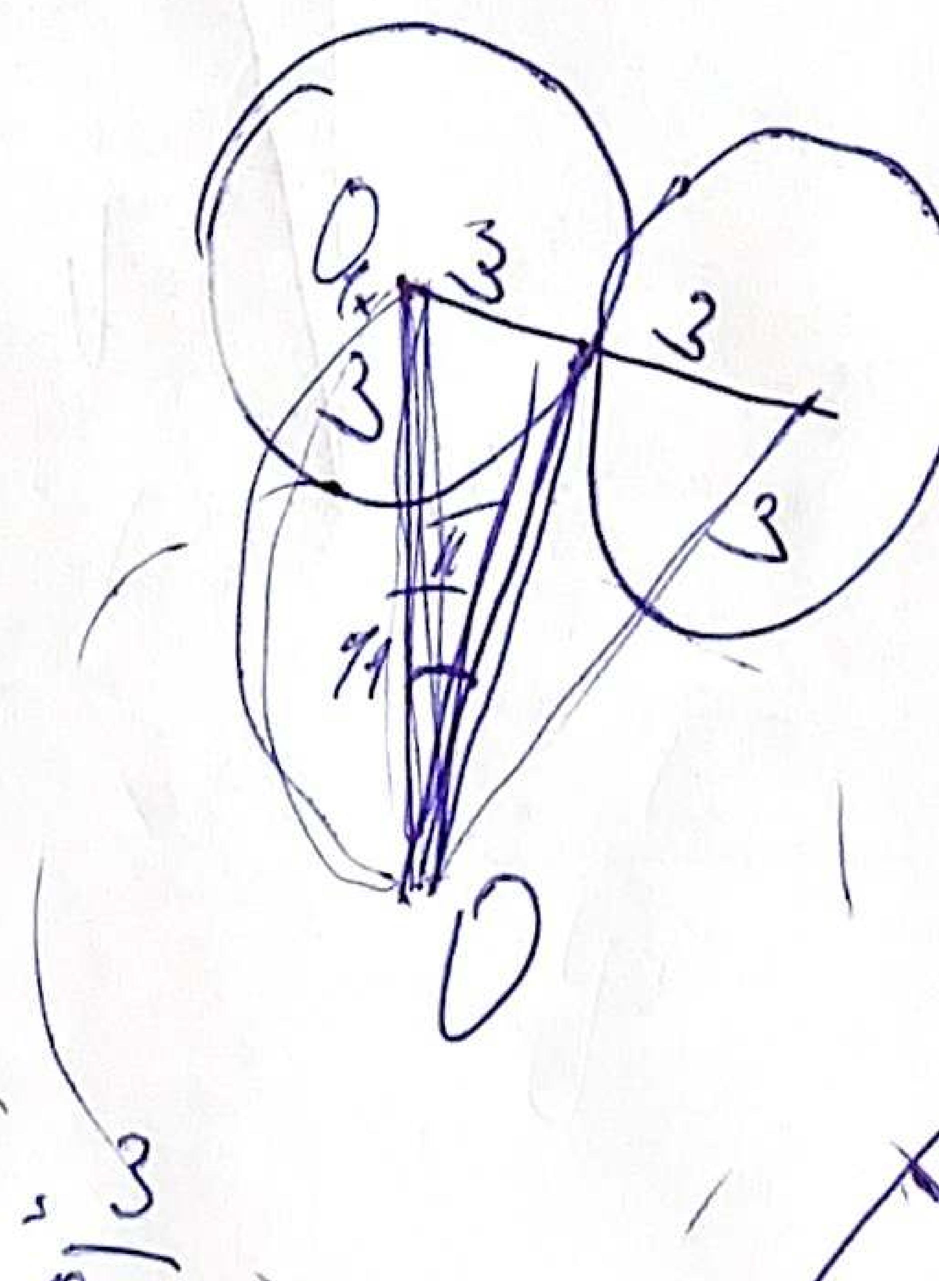








$\frac{360}{11}$



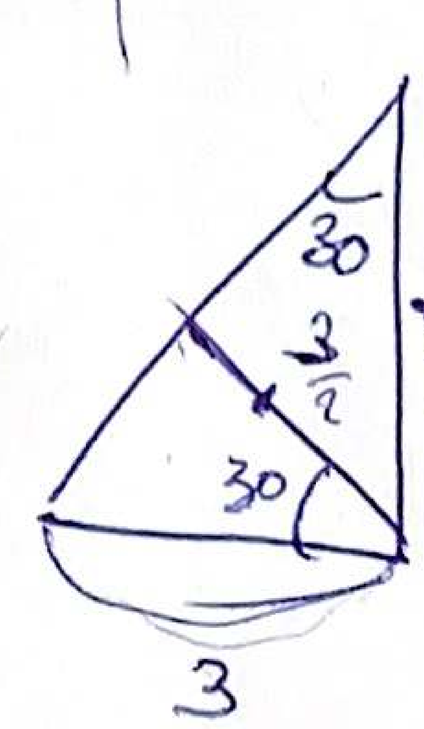
$2a^2$

$$\boxed{\frac{3}{\sin\frac{\pi}{11}} - \frac{3}{\sqrt{3}}}$$

$\cancel{\frac{3}{\sqrt{3}} -}$

$\sin\frac{\pi}{11} = \frac{3}{O_1O_{11}}$

$O_1O = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{11}}$



$\frac{3}{\sqrt{3}}$

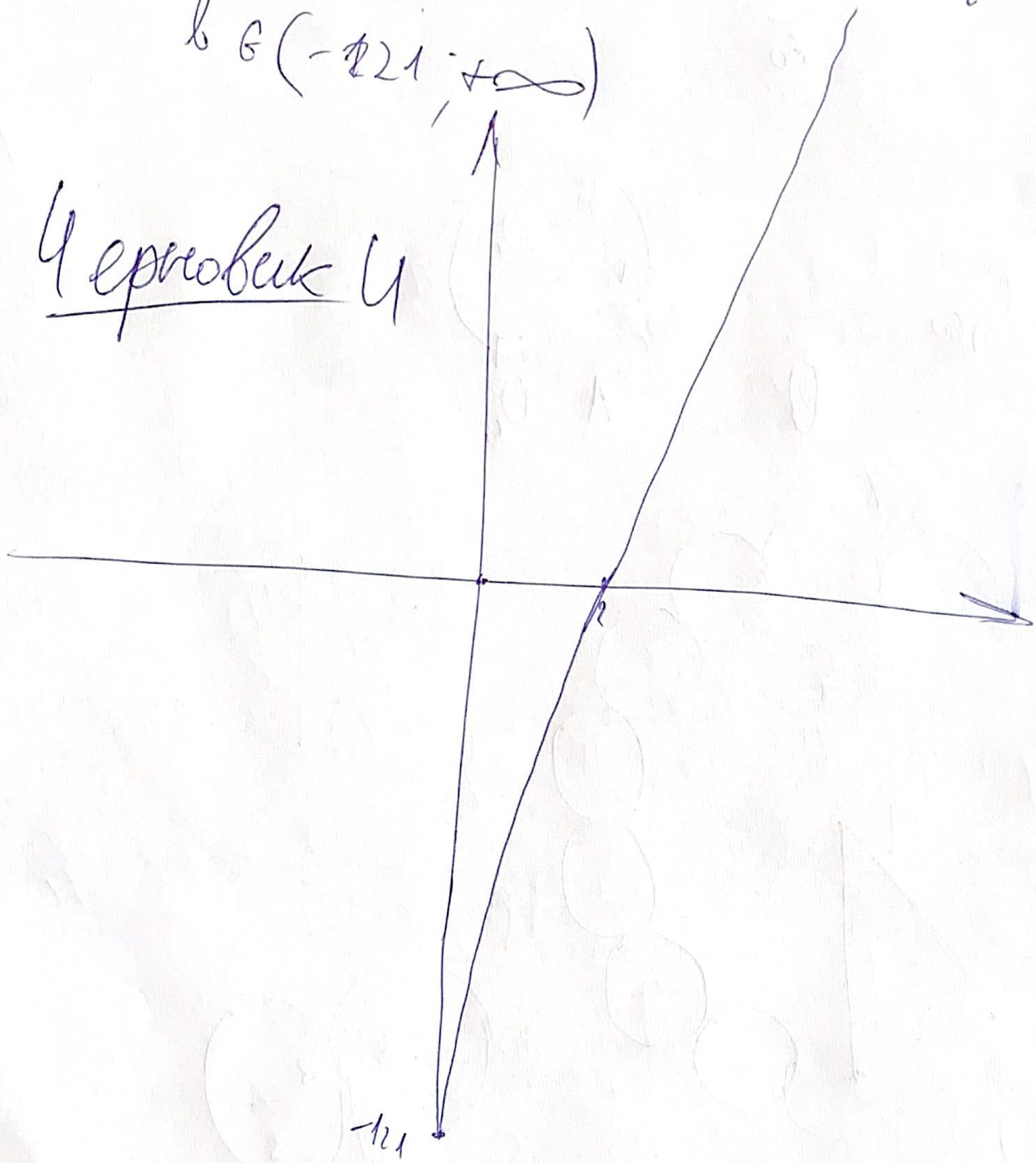
3

$a \in (-\infty; +\infty)$

$b \in (-121; +\infty)$

$11^3 - 11^2 =$
$= 11^2 \cdot 10 = 1120$

Черновик



4

Черновик 5

-19

$a = t^3 - 81t = t(t-9)(t+9)$

$-\ \ +\ \ -\ \ +$; $-9 \quad 0 \quad 9$

$b = 11^2 - 121$

$b > 0$ при $t > 2$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$

$-\frac{23\pi}{6}$

$\sin t > \frac{1}{2}$

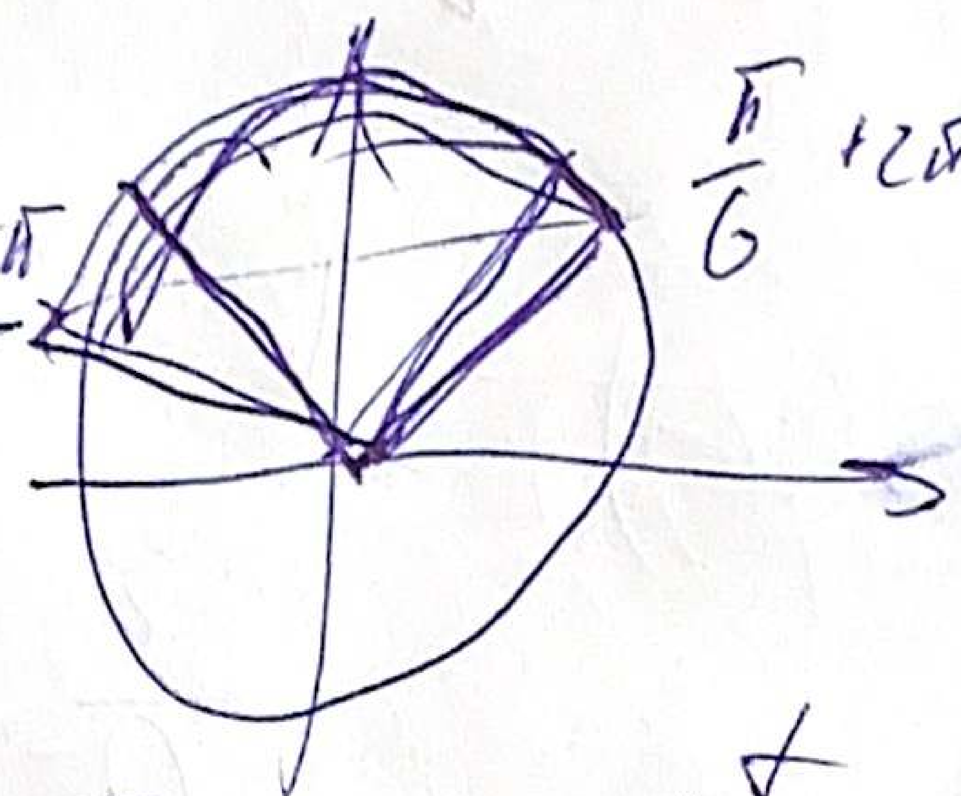
$-\frac{19\pi}{6}$

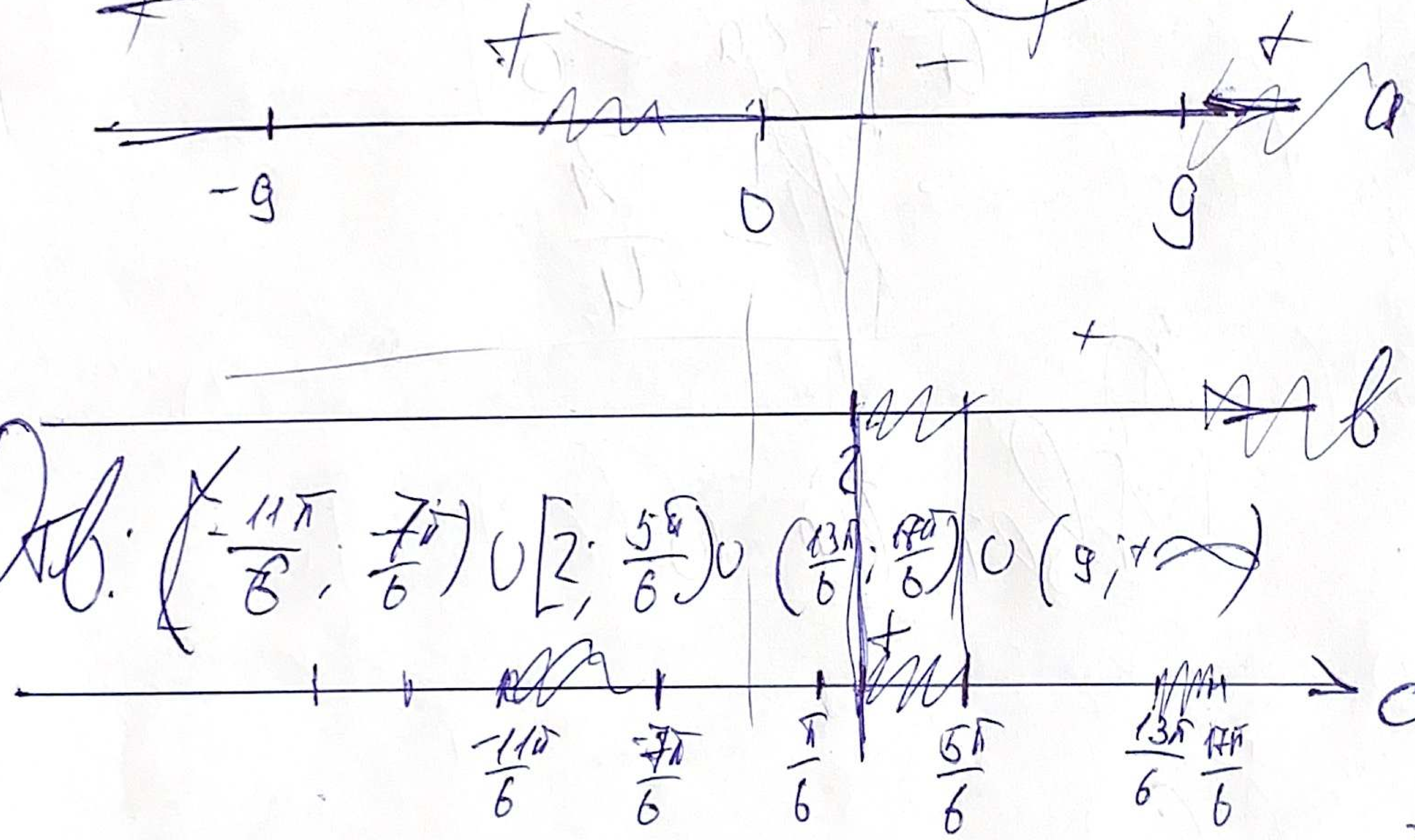
$\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{-12+1\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$

$\frac{7\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$2\pi n + \frac{5\pi}{6}$





Отв: $\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left[2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$

$\frac{\pi}{6} < 1$

$9 > \frac{17\pi}{6}$ $\quad \frac{54}{17} > \pi$ $\quad +\frac{17}{17}$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi$

81 V $\quad 9 \cdot 6$ $\quad 54 \div 17 = 3$, 51

$\frac{14}{100} < \frac{3}{17}$ $\quad \frac{3}{17} - x$

$\frac{13\pi}{6}$

5

$17 \cdot 14 = 68$, 17, 238

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi$

$\frac{13 \cdot 3}{6_2} = 6{,}5$

$\frac{17\pi}{6_2}$

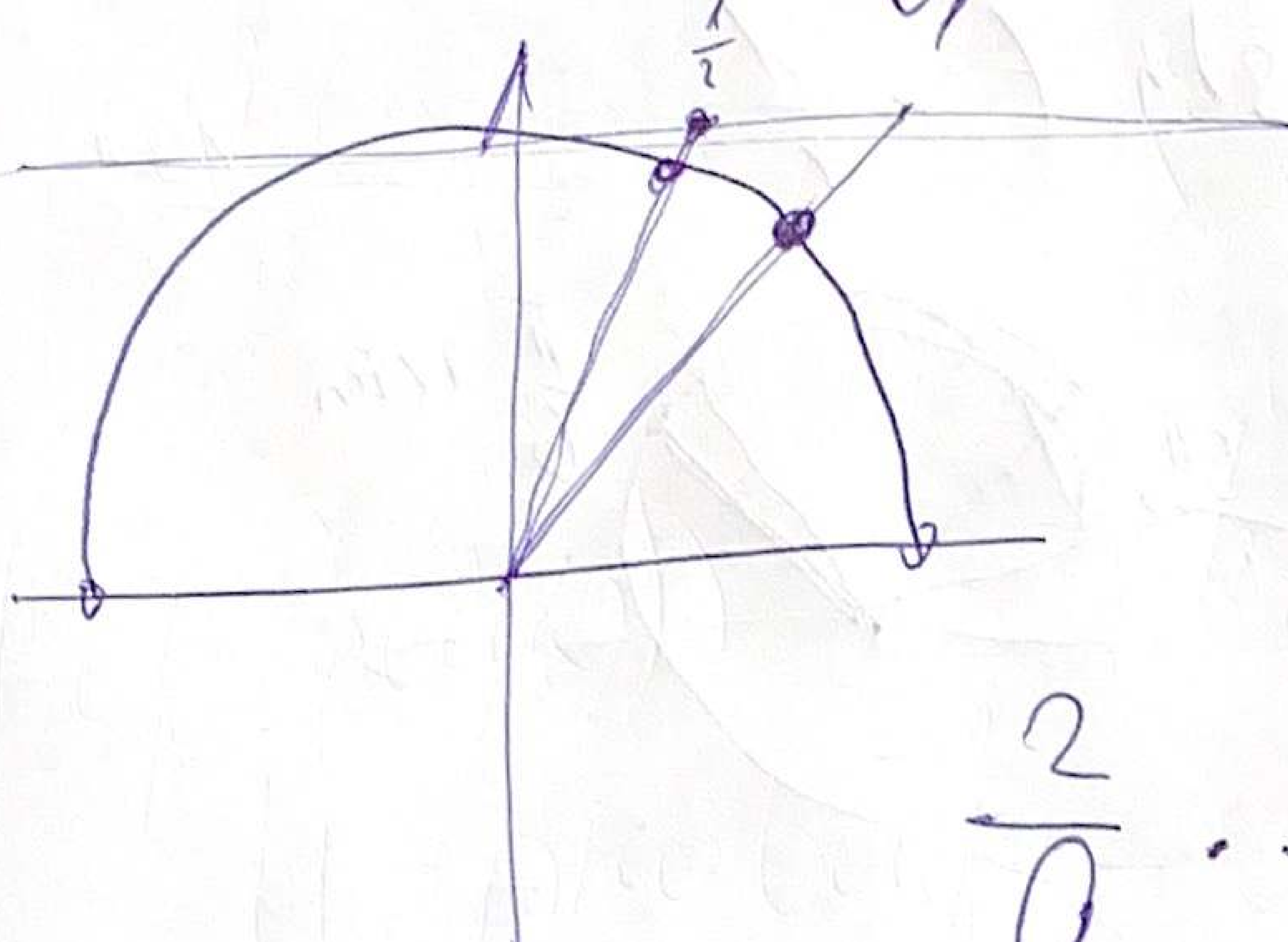
Черновик б

$1 = -2a$; $a = -\frac{1}{2}$

$a = 2$

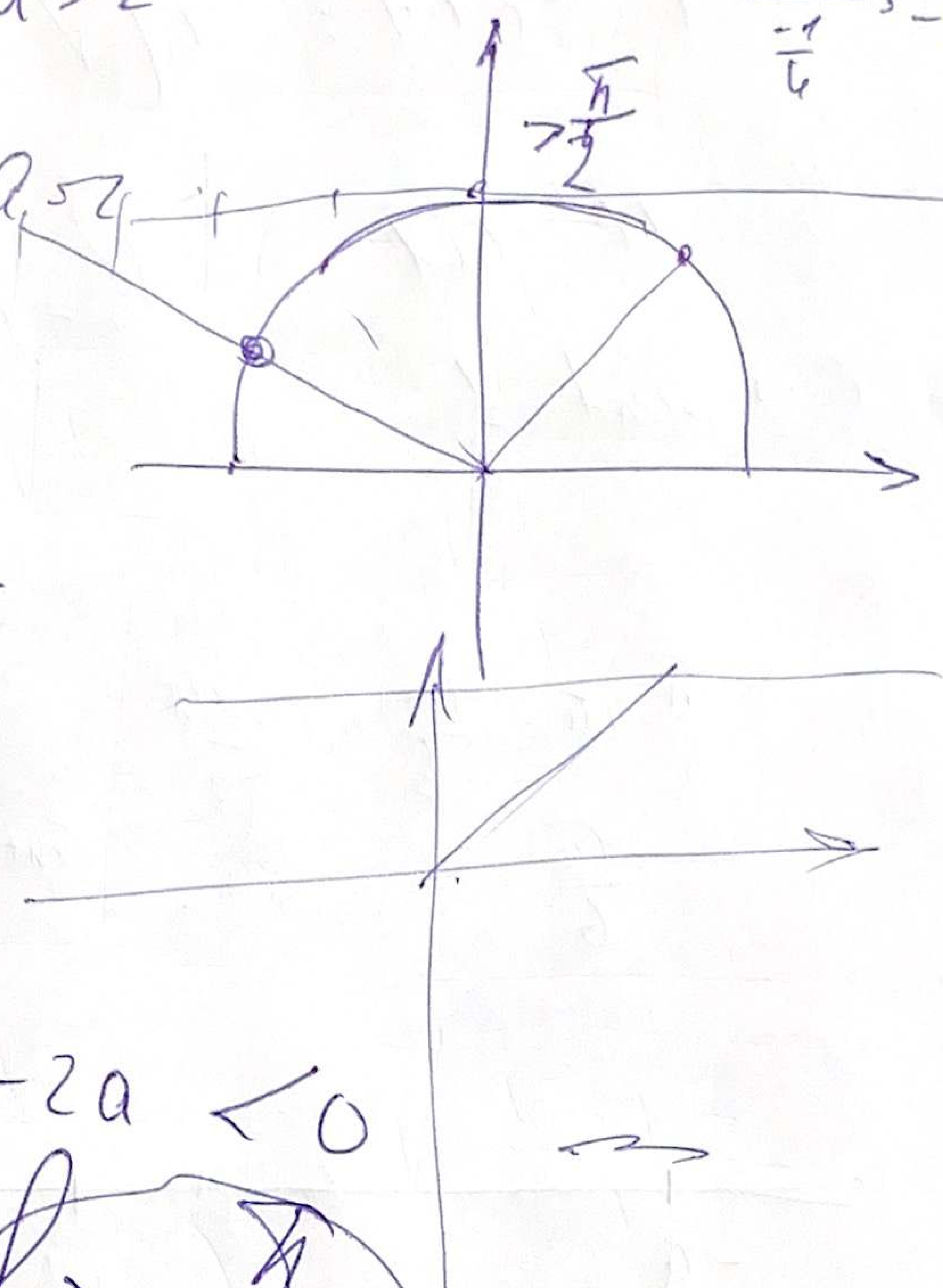
$ctg\,x = \frac{2}{a} = 1$

$a = -\frac{1}{2}$ $ctg\,x = -\frac{1}{2}$



$\frac{2}{a} \cdot -2a < 0$

$\rightarrow \varphi > \frac{\pi}{4}$



$\frac{2}{-\frac{1}{4}} = -4$

Ответ: $a = 0$

6

Черновик 7

$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(1+\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$= \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = 1$

$B = \frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\frac{7}{(3\cdot4)^2}\dots =$ 16

$= \frac{1}{(1\cdot2)^2}+\frac{2}{(1\cdot2)^2}+\frac{2}{(2\cdot3)^2}+\frac{3}{(2\cdot3)^2}+\frac{3}{(3\cdot4)^2}+\frac{4}{(3\cdot4)^2}\dots =$

$= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{48}+\frac{1}{36}$

$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-n^2}{(n(n+1))^2} = \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = \frac{n+(n+1)}{(n(n+1))^2}$

$B = \frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{59^2}-\frac{1}{60^2} =$

$= 1-\frac{1}{60^2}<1 \Rightarrow A>B$

7

Черновик 8

$$\underbrace{469 \ldots\ldots\ldots\ldots}_{2021}$$

$19 \times 3 = 57$

$23 \times 3 = 69$

4692 или 4695

$92 \mid 23$

465238 ~~X~~

$\boxed{4695}$ ~~7~~ 76

$19 \times 5 = 95$

23×4

$1 + 4n + r = 2021$

Ответ: 7

$2020 \mid 4$

19
38
57
76
95

23
46
69
92

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$$y^7 = \frac{1}{1-x^7}$$

$$\frac{1}{y^7} = 1-x^7$$

$$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$$

$$x^7 = 1 - \frac{1}{y^7} = \frac{y^7-1}{y^7}$$

8