МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Москвитин Владислав Вадимович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	5

Черновик 1

1) $A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$

$\cancel{2+3 \quad (2\cdot 3)^2}$

$\cancel{\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^2\cdot 3^2} + \frac{3}{2^2\cdot 3^2} + \frac{3}{3^2\cdot 4^2} + \frac{4}{3^2\cdot 4^2}}$

$$\frac{m+m+1}{m^2(m+1)^2} = \frac{2m+1}{(m(m+1))^2} = \frac{(m+1)^2-m^2}{(m(m+1))^2} = \frac{(m+1)^2}{(m+1)^2m^2} - \frac{m^2}{m^2(m+1)^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{43^2} - \frac{1}{44^2} + \frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2} = 1 - \frac{1}{45^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{3-2\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(3-1)^2}}{\sqrt[6]{4}} = \sqrt[6]{\frac{4}{4}} = 1$$ B больше

2) $\overline{a_1a_2\ldots a_{2021}}$ $\quad \overline{a_ia_{i+1}} \,\vdots\, 19$ или $\vdots\, 23$

$a_1 = 1 \quad a_{2021} - ?$ $\quad \overline{a_ia_{i+1}} \in \{19; 38; 57; 76; 95; 23; 46; 69; 92\}$

$19 \to 95 \to 57 \to 76 \to 69$

$92 \to 23 \to 38$ (X)

$a_1 = 1 \quad a_2 = 9 \quad a_3 = 5 \quad a_4 = 7 \quad a_5 = 6 \quad a_6 = 9 \qquad a_2 = a_{2+4k} = 9 \Rightarrow a_{2018} = 9$

$a_{2019} = 2$ или 5 $\quad a_{2020} = 3$ или 7 $\quad a_{2021} = 6$ или 8

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$ $\qquad f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x-1}{1-x}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x}{x-1}}}$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7}{x^7-1}}} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}}$$

4) $$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{x^7-1}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7-x^7+1}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}} = x$$

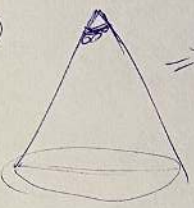
3 раза применив $f(x)$ получим x

$x \to \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} \to \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x}{x-1}}} \to \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}} \to x$ $\Rightarrow$ 1302 раза применив получим x, $\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{1304\text{ раза}} = f(f(x))$

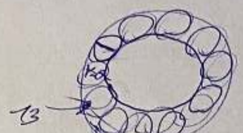
$$f(f(x)) = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}} = \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$$

Черновик (2)

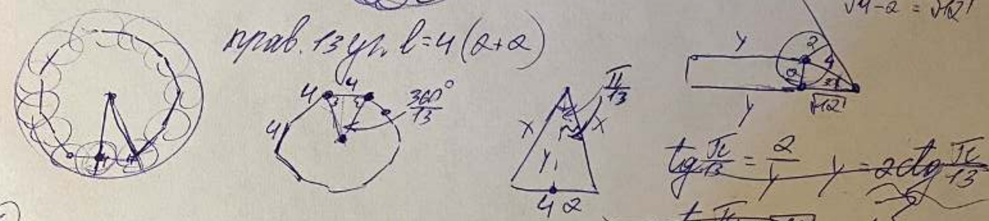
(4)



$\Rightarrow$ конус правильный



прав. 13 уг. $l = 4(a+a)$



$tg\frac{\pi}{13} = \frac{a}{y}$ ~~$y = a\,ctg\frac{\pi}{13}$~~

~~$a\,ctg\frac{\pi}{13} + \sqrt{12}$~~

(5)

$x_1 \le x_2 \le x_3$ x_2 – сред. из a, b, c

$x_2 \ge 0$ t – ?

$\underbrace{a = t^3 - 81t}_{>0 \text{ при } t > 9}$ $\underbrace{b = \pi^t - 121}_{>0 \text{ при } t > 2}$ $c = \sin t - \frac{1}{2}$ >0 при $t > \frac{\pi}{6}$

1) при $t > 9$ $a > 0, b > 0, c < a, c < b \Rightarrow$ среднее число – a или $b > 0$

2) при $t < 2$ $a < 0, b < 0 \Rightarrow$ если a, b сред < 0, если c сред., то оно $< a$ или b, тогда < 0

$c > 0$ при $t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $t \in [2; 9]$, то $c > 0$ при $t \in \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$

$\frac{5\pi}{6} > 2$

$\pi > \frac{12}{5} = 2{,}4$

$\pi \approx 3{,}14$

$\frac{25\pi}{6} > 9$

$25 \cdot 3{,}14 > 54$

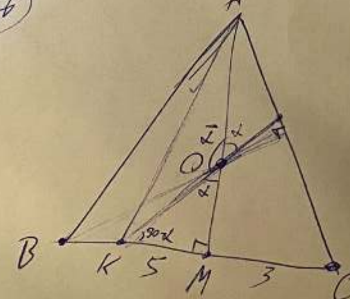
$\Rightarrow$ при $t \in \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$ $c > 0, b > 0, a < 0 \Rightarrow$ сред. > 0

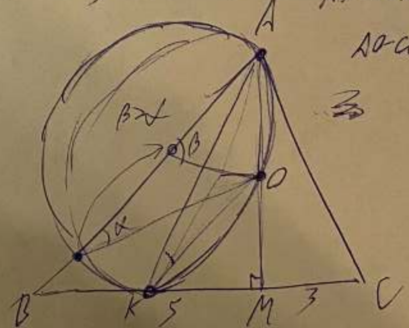
$t \in \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$

$\hat{AO}$ max при min R опис. окр.

AO – const

(7)





Черновик ③

⑥ $a\,tg^3x+(1-a-2a^2)tg^2x+(2a^2-2a-1)tg\,x+2a=0$

$a=0$

$tg^2x-tg\,x=0$

$tg\,x=0 \quad x=0$

$tg\,x=1 \quad x=\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}$ расст.

~~$a\,tg^3x-a^2tg^2x+(1-a-a^2)tg^2x-(a+$~~

$an^3+(1-a-2a^2)n^2+(2a^2-2a-1)n+2a=$

~~$an^3-a^2n^2+(1-a^2)n^2-(1-2a^2)n-2an+2a$~~

$a\,tg^3x+(1-a-2a^2)tg^2x+(2a^2-2a-1)tg\,x+2a=a\,tg^3x-a\,tg^2x+(1-2a^2)tg^2x-$

$-(1-2a^2)tg\,x-(2a\,tg\,x-2a)=a\,tg^2x(tg\,x-1)+(1-2a^2)tg\,x(tg\,x-1)-2a(tg\,x-1)=$

$-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}$

$=(tg\,x-1)(a\,tg^2x+(1-2a^2)tg\,x-2a)=0$

$\exists\, tg\,x=t \qquad at^2+(1-2a^2)t-2a=0$

$$\frac{2a^2-1\pm\sqrt{1+4a^2+4a^4+8a^2}}{a}=\frac{2a^2-1\pm(1+2a^2)}{a}=t$$

$t_1=\frac{2a^2-1+1+2a^2}{2a}=\frac{4a^2}{a}=\frac{2}{4a}$

$t_2=\frac{2a^2-1-1-2a^2}{2a}=-\frac{2}{a}$

$tg\,x=1 \leftarrow x=\frac{\pi}{4}$

$tg\,x=4a$ — один >0, др. <0

$tg\,x=-\frac{2}{a}$ ~~$tg\,x<0$~~

$a=-\frac{1}{4} \quad tg\,x=-1 \leftarrow -\frac{\pi}{4}$

$tg\,x=\frac{1}{2}\leftarrow$

при $a\to\infty$ $tg\,x_1\to 0$, $tg\,x_2\to+\infty$ $\approx\frac{\pi}{2}$ расст.

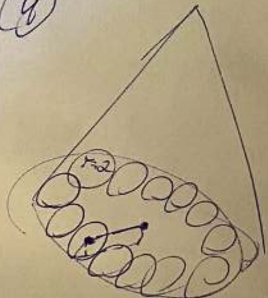
всегда д. такой кор. наиб. расст. хотя бы $\frac{\pi}{4}$

$x_1 \quad \frac{\pi}{4} \quad x_2$

при $a=0$ т.к. должен быть корень $=0$

при $a=0$ ~~tg~~$x_1=0$, ~~tg~~$x_2=\frac{\pi}{4}$ $\quad l=\frac{\pi}{4}$

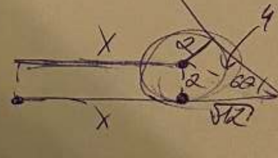
④



прав. 13уг. $\Rightarrow \angle=\frac{360}{13}$

$\sin\frac{\pi}{13}=\frac{2}{x}$

$x=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{13}}$

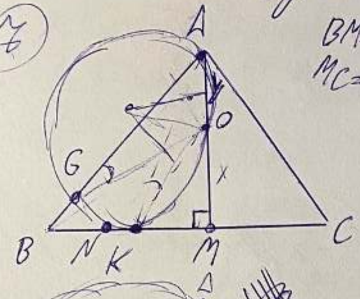


$\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$

$R_2=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{13}}+\sqrt{12}$

Черновик 4

7



$BM=5$
$MC=3$

$\angle AKO - max \Rightarrow R = \frac{l}{2\sin\angle AKO} - min.$

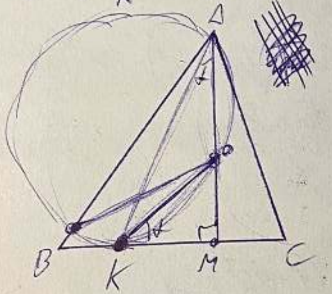
$R(AKO) - min$

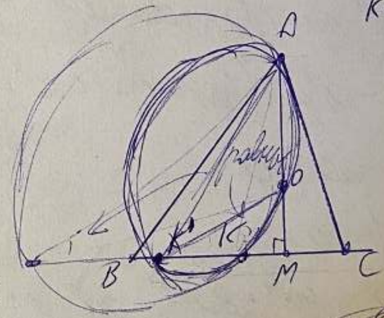
~~=> AB~~

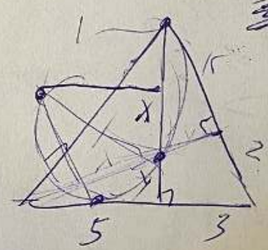
$MK \cdot MN = MO \cdot OA$

Если (·)N = (·)K, то $MK^2 = MO \cdot OA$

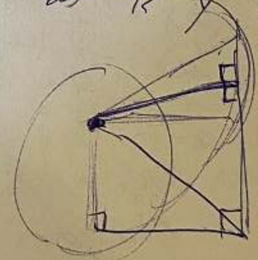
K - касается BC (?)

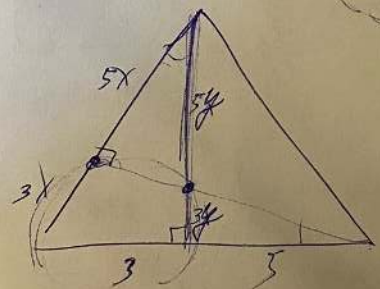






$\frac{2}{K} \cdot \frac{X}{y} \cdot \frac{5}{8} = 1$





1

Чистовик

Задача 1.

$$A=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{87}{(43\cdot 44)^2}+\frac{89}{(44\cdot 45)^2}$$

Заметим, что каждое слагаемое в A можно представить в виде

$$\frac{m+(m+1)}{m^2(m+1)^2}=\frac{2m+1}{m^2(m+1)^2}=\frac{(m+1)^2-m^2}{m^2(m+1)^2}=\frac{1}{m^2}-\frac{1}{(m+1)^2}$$

Тогда $A=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{43^2}-\frac{1}{44^2}+\frac{1}{44^2}-\frac{1}{45^2}=$

$=1-\frac{1}{45^2}$

$$B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} \qquad \sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}=\sqrt[6]{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$$

$$B=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2}}=\sqrt[3]{\frac{3-1}{2}}=1$$

$1>1-\frac{1}{45^2}$, значит $B>A$.

Ответ: число B больше.

Задача 2.

$\overline{a_1a_2\ldots a_{2021}}$ $\quad \overline{a_ia_{i+1}}\,⋮\,19$ или $⋮\,23$

$a_1=1$

$a_{2021}-?$

Посмотрим, какие бывают $\overline{a_ia_{i+1}}$:

Если $\overline{a_ia_{i+1}}\,⋮\,19$, то это может быть 19; 38; 57; 76; 95

Если $\overline{a_ia_{i+1}}\,⋮\,23$, то это может быть 23, 46, 69, 92.

Заметим, что ~~мы можем~~ если нам известно a_i, то a_{i+1} задано однозначно, не считая случай $a_i=9$ (тогда a_{i+1} может быть 2 или 5). Но, если $a_{i+1}=2$, тогда $a_{i+2}=3$, $a_{i+3}=8$, но у нас нет такого a_{i+4}, что $\overline{a_{i+3}a_{i+4}}\,⋮\,19$ или $⋮\,23$. Если же $a_{i+1}=5$, тогда $a_{i+2}=7$, $a_{i+3}=6$, $a_{i+4}=9$, ~~а~~ получается, что $a_i=a_{i+4}$. Заметим, что $a_2=9=a_{2018}$ (иначе, если у нас некоторое $a_k=2$, то a_{k+3} не будет существовать, иначе нарушиться условие кратности на 19 или 23).

②

Чистовик.

Если $a_{2018}=9$, тогда $a_{2019}=2$ или 5, тогда $a_{2020}=3$ или 7, тогда $a_{2021}=8$ или 6

Ответ: $a_{2021}=6$ или 8.

Задача 3.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$, тогда $f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}}=\sqrt[7]{\frac{1-x^7}{-x^7}}$,

$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\sqrt[7]{\frac{1-x^7}{-x^7}}\right)^7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1+\frac{1-x^7}{x^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7+1-x^7}{x^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}}=\frac{1}{1/x}=x$,

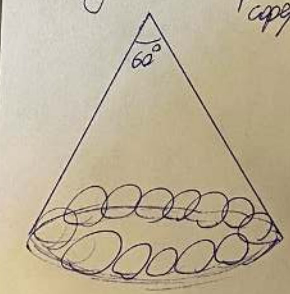
значит $x=f(f(f(x)))$, тогда $f(f(f(\ldots f(2022))\ldots)))$, где f применена 1304 раза равно $f(f(2022))$, где f применена 2 раза (каждый раз мы заменяем 3 раза применённую f просто на x, остаток при делении 1304 на 3 равен 2).

$f(f(2022))=\sqrt[7]{\frac{1-2022^7}{-2022^7}}=\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

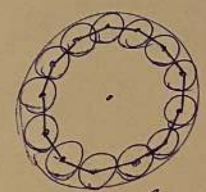
Ответ: $f(f(f(\ldots f(2022))\ldots)))$, где f применена 1304 раза равно $\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$.

Задача 4.

$r_{сферы}=2$



Посмотрим на сечение ~~сферы~~, проходящее через ~~центры~~ главные окружности всех сфер (такое сечение будет т.к. все сферы касаются основания и их центры ~~у~~ расположены так, что расстояние до основания равно 2):

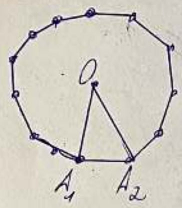


Заметим, что все расстояния между центрами соседних сфер равны $2+2=4$ (т.к. сферы касаются друг друга). Таким образом получается замкнутая ломаная из 13 равных звеньев, каждое из которых равноудалено от центра, то есть правильный 13-угольник со стороной 4.

③

Чистовик

В таком 13-угольнике рассмотрим $\triangle A_1A_2O$:

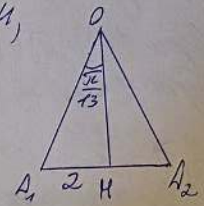


$\triangle A_1A_2O$ – равнобедренный ($A_1O = A_2O$), $A_1A_2 = 4$,

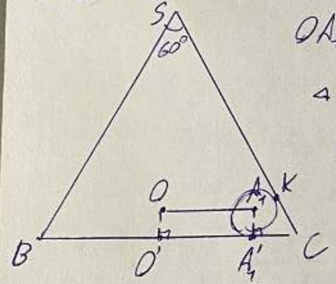
$\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{13} = \frac{2\pi}{13}$, значит $A_1H = 2$,

$\angle A_1OH = \frac{\pi}{13}$ (где AH – высота $\triangle A_1OA_2$),

тогда $\sin A_1OH = \frac{2}{A_1O}$; $\underline{A_1O = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{13}}}$.



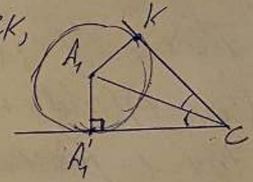
Посмотрим на осевое сечение конуса:



$OA_1 = O'A_1'$, $R = O'A_1' + A_1'C$

$\triangle BSC$ – р/б, значит $\angle SCB = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

$\angle A_1'CA_1 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ (т.к. $\triangle A_1'A_1C = \triangle A_1CK$, значит $\angle A_1'CA_1 = \angle A_1CK$)



$A_1A_1' = r = 2 \Rightarrow \sin\angle A_1'CA_1 = \frac{A_1A_1'}{A_1'C} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A_1C = 2\cdot 2 = 4$

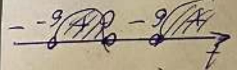
$A_1'C = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$ $R = O'A_1' + A_1'C = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{13}} + \sqrt{12}$

Ответ: $R = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{13}} + \sqrt{12}$

Задача 5:

$a = t^3 - 81t$ $b = 11^t - 121$ $c = \sin t - \frac{1}{2}$

$a > 0$ при $t \in (-9;0) \cup (9;+\infty)$; $b > 0$ при $t > 2$; $c > 0$ при $t \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$



$t(t-9)(t+9) > 0$

Заметим, что если 2 числа больше 0, то и среднее >0).

Найдем все такие t, когда $x_2 > 0$.

При $t > 9$: $a > 0$, $b > 0 \Rightarrow x_2 > 0$

При $t \in [2;9]$: $a < 0$, $b > 0$, посмотрим на c: $\frac{\pi}{6} < 2$; $\frac{5\pi}{6} \approx 2{,}5 > 2$;

$\frac{13\pi}{6} < 9$; $\frac{17\pi}{6} \vee 9$, $\pi \vee \frac{54}{17}$, $\frac{22}{7} \vee \frac{54}{17}$, $\frac{1}{7} < \frac{3}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{17\pi}{6} < 9$

(4)

Чистовик

Тогда при $t \in (2; \frac{5\pi}{6}] \cup (\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6})$, $c>0$; $b>0$, значит $x_2>0$

При $t \in [0; 2] \cup (-\infty; -9]$; $a \leq 0$; $b \leq 0$, значит $x_2 \leq 0$

При $t \in (~~2; -9~~)(-9; 0)$: $a>0$; $b<0$, рассмотрим c: $-9 > -\frac{23\pi}{6}$,

$-9 > \frac{-19\pi}{6}$, $-9 < \frac{-11\pi}{6}$, $-9 < -\frac{7\pi}{6} < 0$, значит при $t \in (-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6})$:

$c>0$, значит $x_2>0$.

Ответ: $x_2>0$ при $t \in (-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}) \cup (2; \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}) \cup (9; +\infty)$

Задача 6.

$a\,tg^3x + (1-a-2a^2)tg^2x + (2a^2-2a-1)tgx + 2a = 0$

$a\,tg^3x - a\,tg^2x + (1-2a^2)tg^2x - (1-2a^2)tgx - (2a\,tgx - 2a) = 0$

$(tgx-1)(a\,tg^2x + (1-2a^2)tgx - 2a) = 0$

$tgx = 1$ - решение

$x = \pi/4$ (т.к. $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$a\,tg^2x + (1-2a^2)tgx - 2a = 0$

при $a=0$: $tgx=0$, $x=0$ - решение

при $a \neq 0$:

$$\frac{2a^2-1 \pm \sqrt{1-4a^2+4a^4+8a^2}}{2a} = tgx = \frac{2a^2-1 \pm \sqrt{(1+2a^2)^2}}{2a} = \frac{2a^2-1 \pm (1+2a^2)}{2a}$$

$tgx_1 = \frac{4a^2}{2a} = 2a$

$tgx_2 = \frac{-2}{2a} = -\frac{1}{a}$

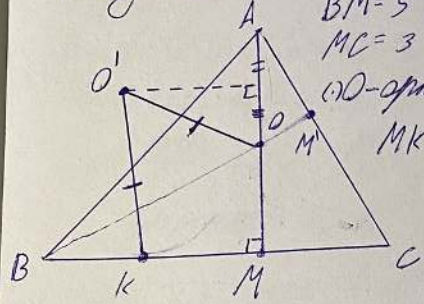
т.к. $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, если $tgx<0$, то и $x<0$ (и наоборот). $2a$ и $-\frac{1}{a}$ разные по знаку, значит у нас будет корень $x<0$. т.к. у нас всегда есть решение $x=\pi/4$, то ~~длина~~ наибольшее расстояние между корнями будет $\geq \pi/4$.

При $a=0$ $x_1=0$, $x_2=\pi/4$ и расстояние $= \pi/4 - 0 = \pi/4$.

Ответ: наименьшее значение $\pi/4$ (при $a=0$).

(5) Чистовик

Задача 7.



$BM = 5$
$MC = 3$
(·)O – ортоцентр.
$\angle AKO$ – max ~~min~~
MK – ?

Решение:

Заметим, что если $\angle AKO$ макси ~~минимален~~, то R описанной окружности около $\triangle AKO$ минимален.

Центр такой окружности лежит на серединном перпендикуляре к AO, при этом $O'K = R$ – min, где $\angle KO'O = 2\angle KAO$.

Пусть BM' – высота, тогда $\triangle BMO \sim \triangle AM'O$, также BMM'A ~~OMCM'~~ – вписан. чет.-угольник, значит $BO \cdot OM = AO \cdot OM$, а $BO \cdot BM = BM \cdot BC$ (т.к. OMCM' вписанный). $BO \cdot BM = 5 \cdot 8 = 40$ ~~$= BO^2 + BO \cdot OM = BO^2 + AO \cdot OM$~~.

Величина $\angle AKO$ максимальна, когда BC касается окружности описанной около $\triangle AKO$, значит KM – касательная, значит
$KM^2 = OM \cdot AM$

$BO \cdot OM' = OM \cdot AO \Rightarrow BO \cdot BM = OM \cdot AM = KM^2 = 40 \Rightarrow KM = \sqrt{40}$
(следует из подобия)

Ответ: $KM = \sqrt{40}$.