МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Мукосеев Лев Андреевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	15	15	15

1. Посмотрим на:

$\cdot\ B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$4-2\sqrt{3} = 3-2\sqrt{3}+1 = (\sqrt{3}-1)^2$, $\sqrt{3}-1 > 0$

$= \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = 1 \Rightarrow \underline{B=1}$

$\cdot\ A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{89}{(44\cdot 45)^2} = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2^2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2^2}} - \cancel{\frac{1}{3^2}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{44^2}} - \frac{1}{45^2}\right)$

$= 1 - \frac{1}{45^2} < 1 \Rightarrow \underline{A < B}$

Ответ: $A < B$

3. Проделаем f несколько раз:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$ $\quad f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{-x^9}{1-x^9}}} = \sqrt[9]{\frac{1-x^9}{-x^9}} =$

$= -\sqrt[9]{\frac{1}{x^9}-1}$, $\quad fff(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1}{x^9}-1}} = x$, $\quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}} \dots$

$\Rightarrow$ каждое 3е применение f возвращает x

$\Rightarrow 1305 \vdots 3 \Rightarrow$ ответ $= x = 2022$

Ответ: 2022

1й лист

2. Будем продолжать число, чтобы выполнялось, что две подряд идущие цифры $\vdots 19$ или $\vdots 23$

$1 \xrightarrow{19} 9 \xrightarrow{23} 2 \xrightarrow{23} 3 \xrightarrow{19} 8 \xrightarrow{\varnothing} \varnothing$ — нету числа нач-ся с 8 и $\vdots 19$ или $\vdots 23$

$9 \xrightarrow{19} 5 \xrightarrow{19} 7 \xrightarrow{19} 6 \xrightarrow{23} 9$ — единственный возможный вариант

$\Rightarrow$ последовательность цифр: 19576957695769...

1 2 3 4 5 6 7 8 — ← номер цифры

1 2 3 0 1 2 3 0 1 2 3 — ← mod 4

$\Rightarrow$ если: mod 4 = 0 → 7

1 → 6

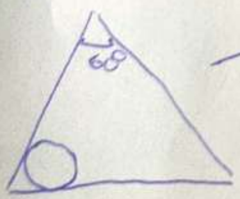
2 → 9

3 → 5

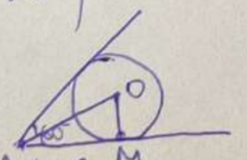
$2021 \equiv_4 1 \Rightarrow$ последняя цифра $\boxed{6}$

Ответ: 6

4. 1) Осевое сечение



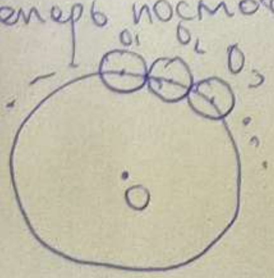
— раз шар касается бок. поверхности и основания, то выходит это так:



найдем r: AM

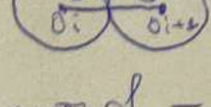
$OM = 3 \quad tg\angle OAM = tg30° = \frac{OM}{AM} = \sqrt{3} \Rightarrow \overset{r}{AM} = \sqrt{3}\,OM = 3\sqrt{3}$

2) теперь посмотрим на плоскость проходящую через центры шаров:



— все центры равноудалены от центра осн-я конуса

— при этом отрезки $O_iO_{i+1} = 3+3 = 6$



— тогда фигура из центров — правильный 19-ти угольник

— найдем OO_i:

$r' = OO_1 = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}}$

2й лист

1. Посмотрим на:

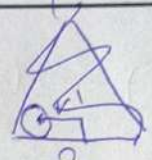
ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ (ПРОФИЛЬ: МАТЕМАТИКА)

13 марта 2021 г.

Шифр ____________________
Заполняется представителем жюри

ВКЛАДЫШ

3) ну а тогда R искомый



$$R = r + r' = 3\sqrt{3} + \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}}$$

Ответ: $R = 3\sqrt{3} + \dfrac{3}{\sin\frac{\pi}{19}}$

5. Заметим, что условие пол-ности „среднего" равносильно тому, что хотя бы 2 числа > 0: проверка

$x_1 \le x_2 \le x_3 \Rightarrow 0 < x_2 \le x_3$ ⊕, $x_2 > 0$

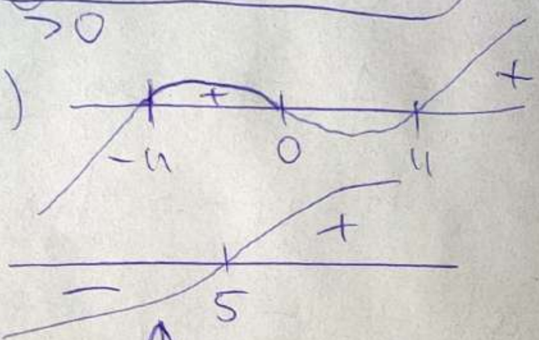
$0 < a \le b \Rightarrow c$ – либо непол., потому $c \le a \le b$ ⊕, $a > 0$

– либо пол., но тогда и „средний" тоже пол.

– найдем для каждого из a, b, c, где они > 0

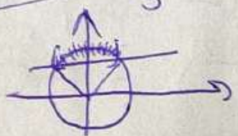
• $a = t^3 - 121t = t(t^2 - 121) = (t+11)t(t-11)$

• $b = 2^t - 32$ $b \uparrow\uparrow$ $t = 5 \Rightarrow b = 0$

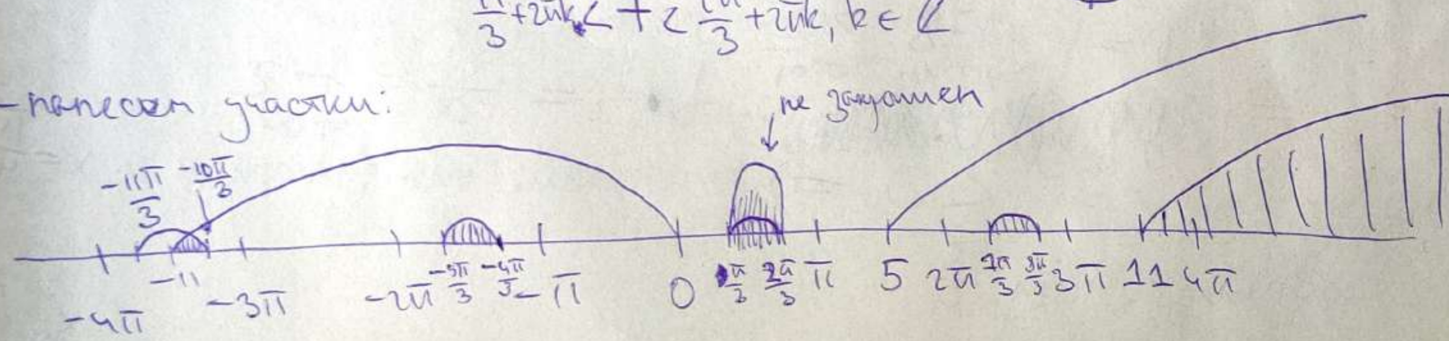


• $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $c > 0 \Leftrightarrow \sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



– нанесем участки:



$-\frac{11\pi}{3} < -11$ $\frac{\pi}{3} > 1$ $\pi > 3$ ⊕

$-11 < -\frac{10\pi}{3}$ $11 > \frac{10\pi}{3}$ $3{,}3 > \pi$ ⊕

Ответ: $\left(-11, -\frac{10\pi}{3}\right), \left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right), \left(\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right), (11, +\infty)$

3й лист

6. $a\,tg^3x+(1-a-2a^2)tg^2x+(2a^2-2a-1)tgx+2a=0$

$a^2(2tgx-2tg^2x)+a(tg^3x-tg^2x-2tgx+2)+tg^2x-tgx=0$

$2a^2tgx(1-tgx)+a(tg^2x(tgx-1)-(tg-1)2)+tgx(tgx-1)=0$

$(tgx-1)(a(tg^2x-2)-2a^2tgx+tgx)=0$

1. $tgx=1$ — корень $\underline{x=\frac{\pi}{4}}$

2. $a(tg^2-2)-2a^2tgx+tgx=0$ $\quad t=tgx$

$at^2+(1-2a^2)t-2a=0$

1) $a=0 \Rightarrow t=0$ $\quad \underline{x=0}$ — расстояние $\frac{\pi}{4}$

2) $a\neq 0 \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ и $D=(1-2a^2)^2+8a^2>0$ — корни есть, то $t_1\cdot t_2=\frac{-2a}{a}=-2$

$\Rightarrow$ один из корней $<0 \Rightarrow$ расстояние между этим корнем и $x=\frac{\pi}{4}$ будет больше, чем $\frac{\pi}{4}$

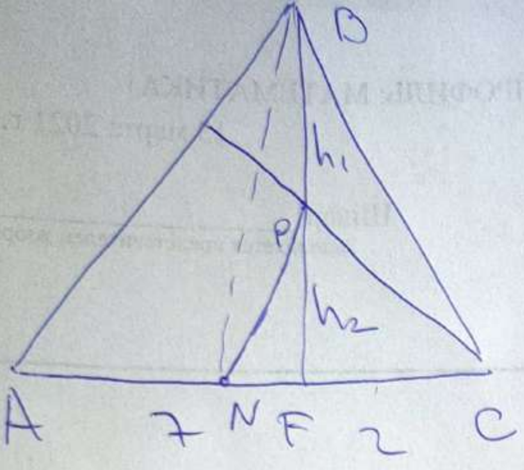
$\Rightarrow$ при $a=0$ достигается минимум

— при других a минимума $=\frac{\pi}{4}$ не будет

Ответ: $a=0$

4й лист

7. 5ый лист

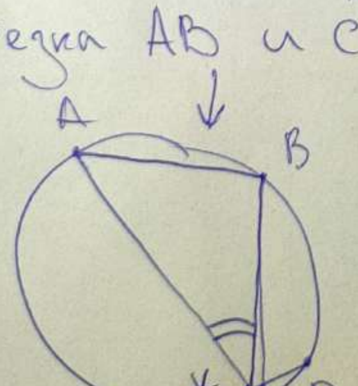


— ~~Шапка~~ не умаляя общности будем считать, что N находится на AF (т.к. в таком случае у N больше возможностей для расположения)

— заметим следующее: если провести описанную окружность для $\triangle BPN$ и пересечь её с AF, то получим вторую точку M.
~~[illegible]~~
Если $M \neq N$, то $\angle BMP = \underbrace{\angle BNP}_{=\alpha}$ — и тогда для отрезка $NF = x$ есть два значения ($NF = x$ и $MF = x$)

~~С другой стороны $\cos\alpha = \frac{BN^2+NP^2-BP^2}{2BN\cdot NP} = \frac{2h_1h_2+h_2^2+x^2}{2\sqrt{((h_1+h_2)^2+x^2)(h_2^2+x^2)}}$~~

Но заметим, что если есть окружность и два отрезка AB и CD на этой окружности (мы смотрим из точек C и D на AB),



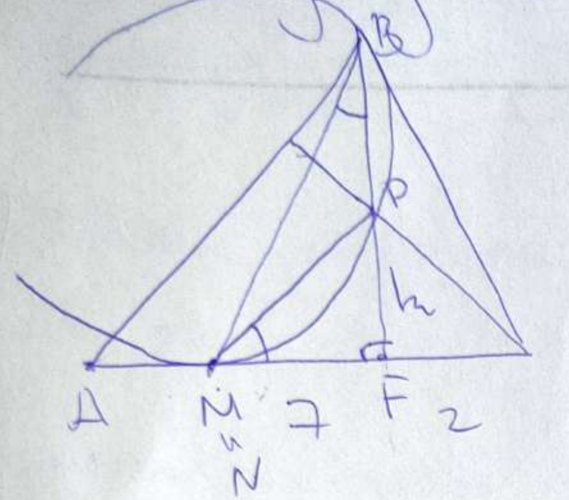
то для каждого значения угла $\angle AMB = \angle ACB$, $M \in \overset{\frown}{CD}$ дуга есть точка $K = AM \cap CD$, что $\angle AKB \geq \angle AMB = \angle ACB$

— другими словами на (CD) есть K, что $\angle AKB > \angle AMB$

• ~~Во~~ тогда на нашем отрезке $MN \subseteq AF$ будет существовать точка K из MN, что $\angle BKP > \angle BNP$

— а тогда, если $M \neq N \Rightarrow$ точка N — не точка максимума!!

$\Rightarrow$ Максимум достигается, когда $M = N$:



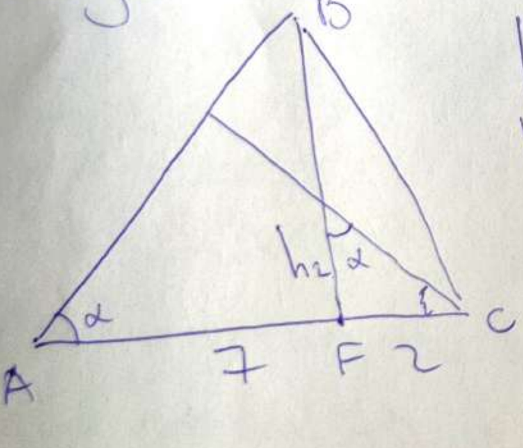
$\Rightarrow MF$ — кас. к окр. для $\triangle MBP$

$\Rightarrow \angle PMF = \angle MBF$

$\Rightarrow \triangle MPF \sim \triangle BMF \Rightarrow \dfrac{MF}{PF} = \dfrac{BF}{MF} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = MF^2 = PF \cdot BF = h_2 \cdot h \Rightarrow x = \sqrt{h h_2}$

• найдем $h h_2$:



$h = AF \operatorname{tg} \alpha$

$h_2 = FC \operatorname{ctg} \alpha$

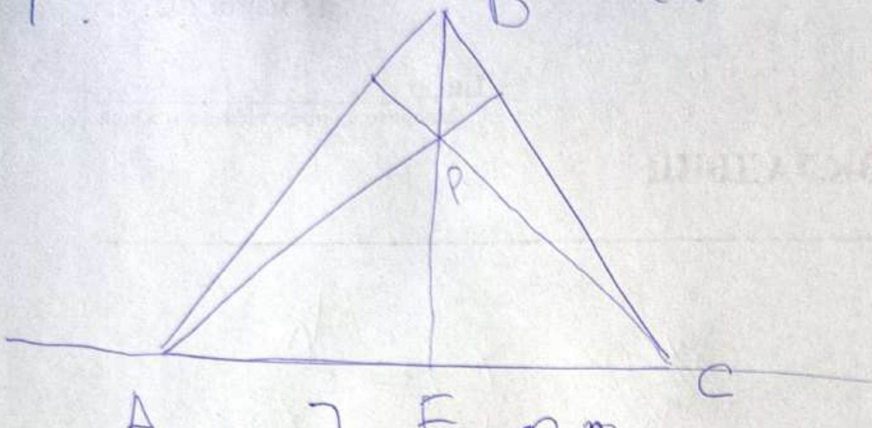
$\Rightarrow h h_2 = AF \cdot FC = 14$

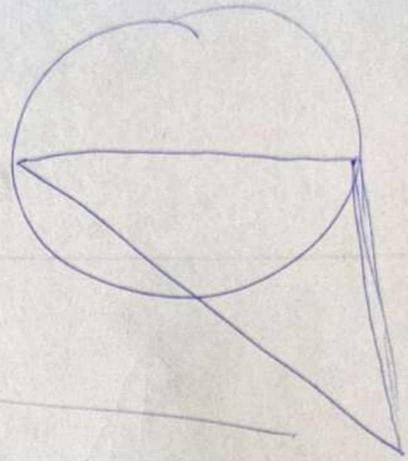
$\Rightarrow X = \sqrt{14}$

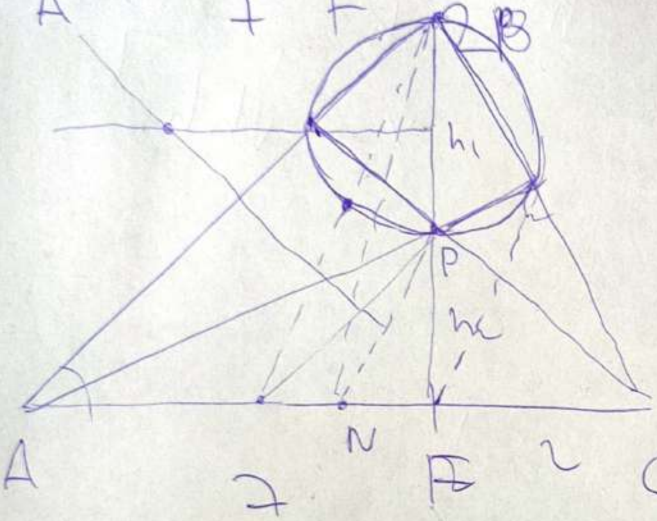
Ответ: $FN = \sqrt{14}$

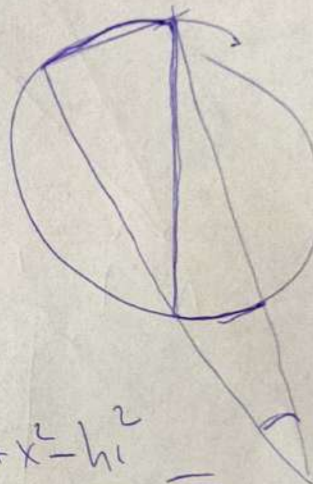
6й лист

7. ЧЕРНОВИК



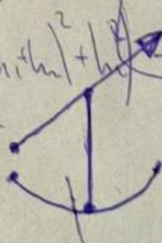






$$\cos N = \frac{BN^2+NP^2-BP^2}{2BN\cdot NP} = \frac{(h_1+h_2)^2+x^2+h_2^2+x^2-h_1^2}{\sqrt{((h_1+h_2)^2+x^2)(h_2^2+x^2)}} =$$

$$= \frac{2h_1h_2+2h_2^2+x^2}{2\sqrt{((h_1+h_2)^2+x^2)(h_2^2+x^2)}} = \frac{2h_1h_2+2h_2^2+t}{\sqrt{(h_1+h_2)^2h_2^2+t((h_1+h_2)^2+h_2^2)+t^2}}$$



$$f(t) = \frac{2h_2(h_1+h_2)+t}{2\sqrt{((h_1+h_2)^2+t)(h_2^2+t)}}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2}\,\frac{1\cdot\sqrt{((h_1+h_2)^2+t)(h_2^2+t)} - (2t+((h_1+h_2)^2+h_2^2))/2\sqrt{\ \ }}{((h_1+h_2)^2+t)(h_2^2+t)} = 0$$

$$2((h_1+h_2)^2+t)(h_2^2+t) = 2t+(h_1+h_2)^2+h_2^2$$

$\frac{1}{2}$

$$2t^2+2t((h_1+h_2)^2+h_2^2-1)$$

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ (ПРОФИЛЬ: МАТЕМАТИКА)

13 марта 2021 г.

Шифр Черновик

Заполняется представителем жюри

ВКЛАДЫШ

2021-е

$19\cancel{7}5$

$19 \times \cancel{6}7$, 1

$19 \times 5 = 95$ 1,95

$2.\ 23 \times 4 = 92$

$9\ 2\ 5$

$15 \to 7 \to$

$19 \times 3 = 57$

$\times 19$

$23 \times 3 = 69$

$19 \times 4 = 76$

$2.\ 2 \to 3 \to 8 \to x$

$\to 6 \to 9$

$2021 \equiv_4 1$

a_{4n} $0 \to 7$, $1 \to 6$, $2 \to 9$, $3 \to 5$

6

1 9 5 7 6 9 5 7 6 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 2 3 0 1 2 3 0 1 2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}} \qquad \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{\sqrt[9]{1-x^9}-1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{(1-x)(1+x+x^2\ldots+x^8)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[81]{1-x^9}}{\sqrt[9]{\sqrt[9]{1-x^9}-1}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\ldots x^9}}$$

Лист №

1. $A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$ | $\boxed{\text{Черновик}}$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$4-2\sqrt{3} = 3-2\sqrt{3}+1 = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = 1 \qquad \boxed{B=1}$$

$$A = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \dots$$

$$9-4=5 \qquad 16-9=7$$

$$A = 1 - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \cancel{\frac{1}{44^2}} - \frac{1}{45^2} =$$

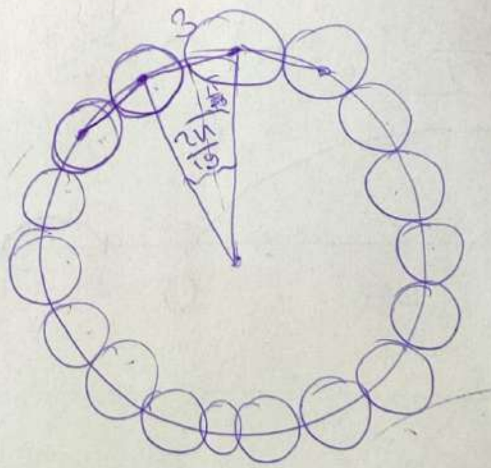
$$= 1 - \frac{1}{45^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}} \to \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{-x^9}{1-x^9}}} = \frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{-x} = \sqrt[9]{\frac{1}{x^9}-1} \to$$

ЧЕРНОВИК

$$\to \frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1}{x^9}-1}} = x$$

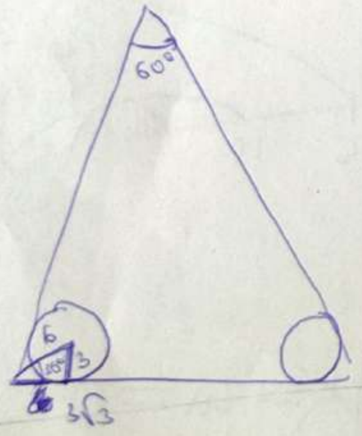
3



19 угольник с ребром = 3

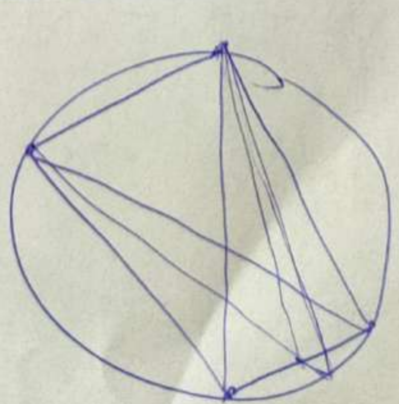
$$R\sin\frac{\pi}{19} = \frac{3}{2} \qquad R = \frac{3}{2\sin\frac{\pi}{19}}$$

4



$$R = 3\sqrt{3} + \frac{3}{2\sin\frac{\pi}{19}}$$

$$(1-2a)^2 + 4a^2$$



ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ (ПРОФИЛЬ: МАТЕМАТИКА)

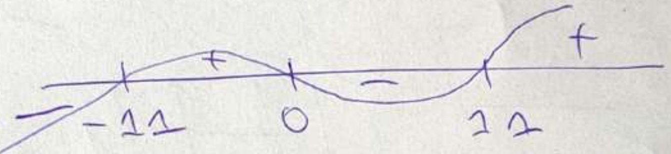
13 марта 2021 г.

Шифр ____________

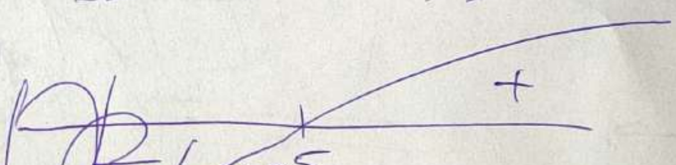
Заполняется представителем жюри

ВКЛАДЫШ

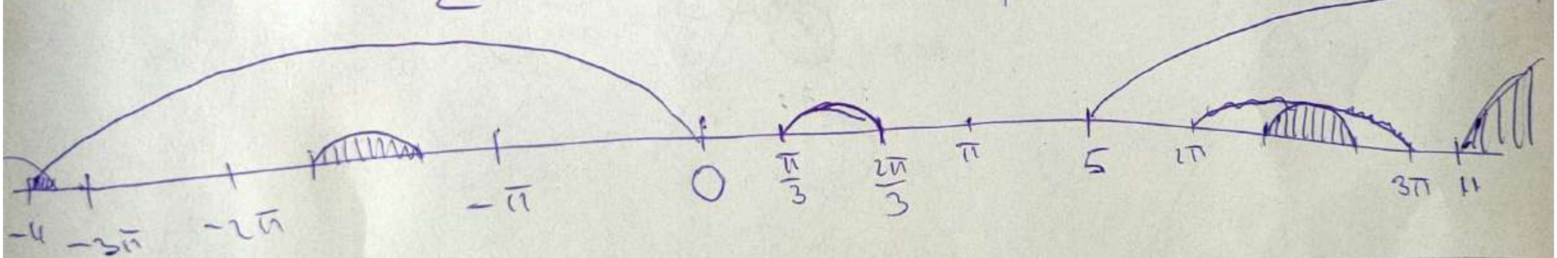
$a = t^3 - 121t = t(t^2 - 121) = t(t-11)(t+11)$



$b = 2^t - 32$



$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq t \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$



6. $a\,tg^3 x + (1 - a - 2a^2)\,tg^2 x + (2a^2 - 2a - 1)\,tg\,x + 2a = 0$

$a^2(2tg\,x - 2tg^2 x) + a(tg^3 x - tg^2 x - 2tg\,x + 2) + tg^2 x - tg\,x = 0$

$2a^2 tg\,x(1 - tg\,x) + a(tg^2 x(tg\,x - 1) - 2(tg\,x - 1)) + tg\,x(tg\,x - 1) = 0$

$2a^2 tg\,x(1 - tg\,x) + a(tg^2 x - 2)(tg\,x - 1) + tg\,x(tg\,x - 1) = 0$

$(tg\,x - 1)(a(tg^2 x - 2) - 2a^2 tg\,x + tg\,x) = 0$

$a\,tg^2 x + (1 - 2a^2)\,tg\,x - 2a = 0$