МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Никитин Михаил Алексеевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	10	15	10

№1

$$B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[6]{\frac{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}{4}}=\sqrt[6]{\frac{4}{4}}=1$$

$A+\underbrace{\frac{45^2-89}{44^2\cdot 45^2}}_{\to 0}=1$ докажем это.

$$\frac{89}{44^2\cdot 45^2}+\cancel{\frac{45^2-89}{44^2}}\quad\frac{45^2-89}{44^2\cdot \underbrace{45^2}_{n^2}}=\frac{45^2}{44^2\cdot 45^2}=\frac{1}{44^2}\ ;\ \frac{1}{44^2}+\frac{87}{43^2\cdot 44^2}=\frac{1}{43^2}\Bigg)\Rightarrow$$

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow$ по такому-же принципу уйдут все слагаемые и останется

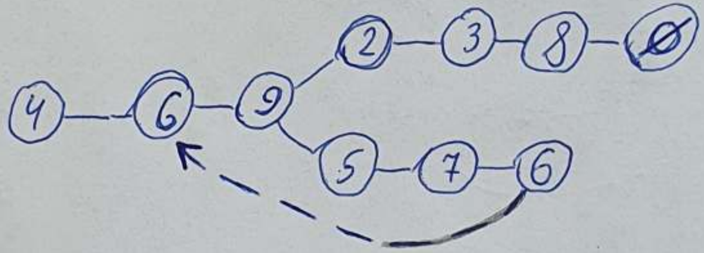
$\frac{1}{1}=1\Rightarrow A<1=B$

Ответ: $A<B$

№2

Числа от 10 до 100

$\vdots 19$	$\vdots 23$
19	23
38	46
57	69
76	92
95	



Единственное двузначное число: 19 или 23 и начинающееся с 4 - это 46 $\Rightarrow$ 2 цифра нашего числа - 6; в седьмом десятке опять-же есть только одно число: 19 или 23 - это 69 $\Rightarrow$ 3 цифра числа - 9; Из двузначных чисел начинающихся на 9 есть два: 19 или 23 - 95 и 92 соответственно. (проверим варианты.)

2) Если первая цифра 2 - вторая только 3, если первая 3 - вторая только 8, а на 8 не начинается ни одного 2х значного числа: 19 или 23

5) Если первая цифра, 5 - вторая только 7; если первая 7 - вторая только 6; Итак: мы попали в цикл. 6-9-5-7-6 (длина - 4)

$2022\underset{\bmod 4}{\equiv}2\Rightarrow$ последняя цифра = второй цифре = 6

Ответ: 6

№3

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{-\frac{x^5}{1-x^5}}}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{\cancel{x^5}+1-\cancel{x^5}}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = x$$

$x \neq 1$ т.к. $f(1)$ – неопр.
$x \neq 0$ т.к. $f(0) = 1$
) но при подстановке 2022: 0 и 1 там не будет.

$\nexists x: f(x) = 0.$

Итак: $f(f(f(x))) = x \; (x \notin \{0;1\}) \Rightarrow \underbrace{f(f(f(\ldots}_{1303}(2022)\ldots))) = f(2022)$

т.к. $1303 \underset{\text{mod}3}{\equiv} 1$

$$f(2022) = \sqrt[5]{\frac{1}{1-2022^5}}$$

Ответ: $\sqrt[5]{\frac{1}{1-2022^5}}$

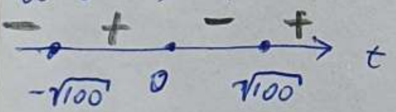
№5

Для того чтобы среднее из 3 чисел было >0: необходимо и достаточно, чтобы хотя-бы 2 числа были положительны.

$\Rightarrow$) Если хотя бы 2 числа положительны, то среднее не может быть ≤ 0 т.к. тогда оно меньше этих 2-х – тогда оно не среднее.

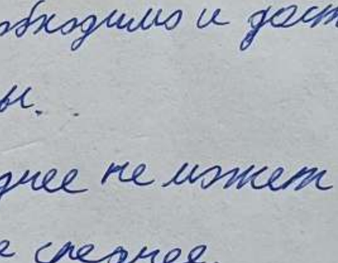
$\Leftarrow$) Если среднее число положительно, то большее тоже положительно т.к. $>$ него $\Rightarrow$ хотя-бы 2 числа >0. Ч.Т.Д.

$a>0 \Leftrightarrow t(t^2-100)>0 \Leftrightarrow t \in (-\sqrt{100};0) \cup (\sqrt{100};+\infty)$



$b>0 \Leftrightarrow 2^t > 16 \Leftrightarrow t \in (4;+\infty)$ (в силу строгого ↑ 2^x на $\mathbb{R}$)

$c>0 \Leftrightarrow \sin t > \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right); k \in \mathbb{Z}$

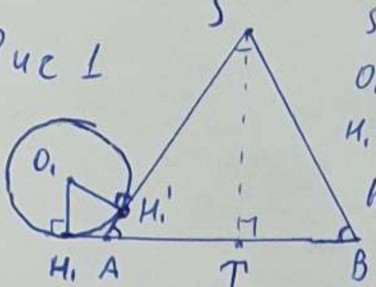


Ответ: $\left((-10;0) \cap \left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)\right) \cup \left((4;10] \cap \left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)\right) \cup$
$\cup (10;+\infty)$

№4

Рассмотрим сечение, содержащее осевое сечение конуса и центр одного шара.

Рис 1



S - вершина конуса (SAB - правильный △)

O_1 - центр сферы

H_1 - основание высоты из O_1 на AB => на плоск. осн конуса

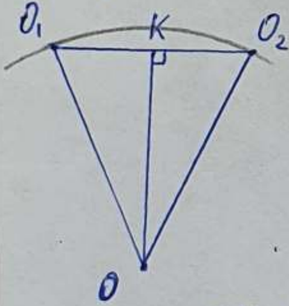
H_1' - основание высоты из O_1 на поверхность конуса

$$\begin{cases} H_1A = H_1'A \text{ как отрезки касательных} \\ \angle O_1H_1'A = \angle O_1H_1A = 90^\circ \\ O_1H_1 = O_1H_1' = 3 \end{cases} \Rightarrow \triangle O_1H_1A = \triangle O_1H_1'A \Rightarrow \angle O_1AH_1 =$$

$$= \angle O_1AH_1' = \cancel{H_1A}\ \frac{\angle H_1AH_1'}{2} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow H_1A = \frac{O_1H_1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Очевидно, что все сферы касаются в одной плоскости: плоскости содержащей центры всех сфер (плоскость удалённая от плоскости основания конуса на 3). Причём отрезки, соединяющие центры соседних сфер образуют ~~н~~ правильный 11-угольник.

Рассмотрим описанную окружность этого ~~треуг~~ 11-угольника (обозначим её центр за O, а вершины 11-угольника за $O_1, \dots, O_{11}$)



$\angle O_1OO_2 = \frac{2\pi}{11}$

$OK \perp O_1O_2$

$\triangle OO_1K = \triangle OO_2K \Rightarrow \angle O_1OK = \angle O_2OK = \frac{\pi}{11} \Rightarrow O_1O_2 = 2 \cdot OO_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{11}\right)$

$OO_1 = r$

$2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{11}\right) = 6 \Rightarrow r = \frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}$

Заметим, что центр окружности основания конуса тоже равноудалён от центров всех 11 сфер => проекция описанной окружности на плоскость основания и сама окр. основания - концентрические.

∃ T - проекция O на плоскость основание

Тогда TA - искомая длина $= TH_1 - H_1A$ (Рис 1) $= \frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} - \sqrt{3}$

Ответ: $\frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} - \sqrt{3}$

№6

$\exists\, tg(x) = t$

$at^3+(2-a-a^2)t^2+(a^2-2a-2)t+2a=f(t)$

$f(1)=\cancel{a}+\cancel{2}-\cancel{a}-\cancel{a^2}+\cancel{a^2}-\cancel{2a}-\cancel{2}+\cancel{2a}\equiv 0$

$f(a)=\cancel{a^4}+2a^2-a^3-\cancel{a^4}+a^3-2a^2-\cancel{2a}+\cancel{2a}\equiv 0$

$\forall a\in\mathbb{R}: \begin{cases} f(1)=0 \\ f(a)=0. \end{cases}$

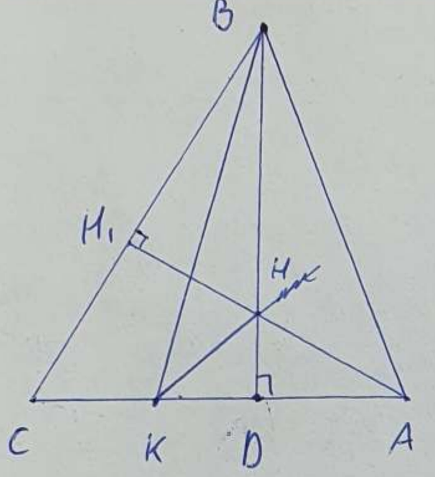
$\exists\, a<0)$ Тогда $x=arctg(a)$ - корень $\Rightarrow$ наибольшее расстояние между корнями ур-я хотя-бы $arctg(1)-arctg(a)>\frac{\pi}{4}$

$\exists\, a>0)$ Тогда $f(0)=2a>0$, но тогда есть корни <0 т.к. в случае $a>0$: $f(t)$ - многочлен третей степени с положительным старшим коэффициентом $\Rightarrow \lim\limits_{t\to-\infty}(f(t))=-\infty$, а т.к. $f(0)>0$: есть отрицательный корень ($\exists\, t_1$) тогда наибольшее расстояние между корнями исходного уравнения хотя-бы ~~ар~~ $arctg(1)-arctg(t_1)>\frac{\pi}{4}$

$\exists\, a=0)$ Тогда $f(t)=2t^2-2t=2t(t-1)\Rightarrow$ исходное ур-е имеет вид $2tg(x)(tg(x)-1)$: имеет 2 корня на $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$: $\begin{cases} tg(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \\ tg(x)=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

Расстояние между ними равно $\frac{\pi}{4}\Rightarrow$ это общий минимум.

Ответ: $a\in\{0\}$; $p=\frac{\pi}{4}$



№7

Н.У.О. $\exists\, K \in CD$ (если K расположить на AD, то поставив {·} K_1 симметрично {·} K относительно {·} D мы получим угол $\angle BK_1H = \angle BKH$).

~~Выразим угол BKH~~ ч.

~~DH =~~ $\triangle CBD \sim \triangle CAH_1 \sim \triangle HAD$

$\Rightarrow$

$DH = 2 \cdot \frac{3}{h}$ (где $h = BD$).

$DH = \frac{6}{h}$

$\angle BKH = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{6}{hx}\right)$ (где $x = KD$)

Ответ: $x = \sqrt{6}$

[ЧИСТОВИК]

$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$ $\frac{7}{(3\cdot 4)^2}$

$\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{\frac{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}{4}} = 1$

45

$\frac{9}{(4\cdot 5)^2} = \frac{9}{400} =$

$\frac{n}{\left(\frac{(n-1)}{2}\cdot\frac{(n+1)}{2}\right)^2} = \frac{16n}{(n^2-1)^2}$

$\frac{9}{144} = \frac{1}{16} = \frac{25}{400}$

$\frac{1}{2^2} + \frac{3}{1^2\cdot 2^2} =$

$\frac{3}{4};\ \frac{5}{36};\ \frac{7}{144}$

$\frac{3}{4};\ \frac{5}{9};\ \frac{7}{16};\ \frac{9}{25}.$

$\frac{3}{4}(1+2^2$

$\frac{16k}{(k^2-1)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}\left(1+\frac{45^2-89}{89}\right) = \frac{45^2}{89}\cdot\frac{89}{44^2\cdot 45^2} = \frac{1}{44^2}$

$+\frac{4}{36}$ $\frac{9}{36} = \frac{5}{36}\left(1+\frac{9-5}{5}\right) =$ $\frac{89}{44^2\cdot 45^2}\left(1+\frac{45^2-89}{89}\right) = \frac{45^2}{44^2\cdot 45^2} = \frac{1}{44^2}$

$\frac{87}{43^2\cdot 44^2} + \frac{1}{44^2} = \frac{87}{43^2\cdot 44^2} + \frac{43^2}{43^2\cdot 44^2} = \frac{43^2+2\cdot 43+1}{43^2\cdot 44} = \frac{44^2}{}$

$23\cdot 4 = 92$

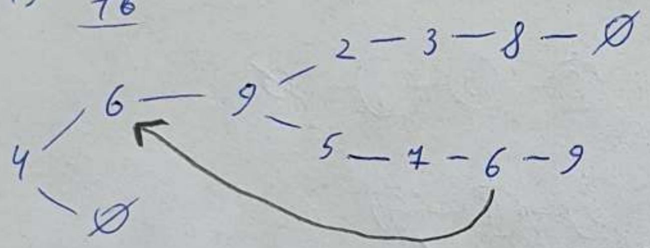
~~49~~ 46

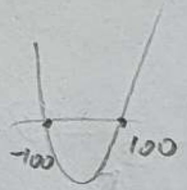
$\frac{45^2-89}{}$ ~~92~~

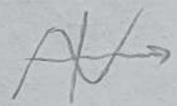
$19\cdot 5 = 95$

$19\cdot 4 =$

19	23
19	24
38	46
57	69
76	92
95	







$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}} = \left(\frac{1}{1-x^5}\right)\ (1-x^5)^{-\frac{1}{5}}$

$f(f(x)) = \left(1-\frac{1}{1-x^5}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1-x^5-1}{1-x^5}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{-x^5}{1-x^5}\right)^{-\frac{1}{5}} =$

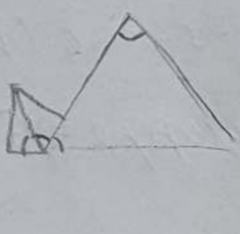
$f(f(f(x))) = \left(1+\frac{1-x^5}{x^5}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{x^5+1-x^5}{x^5}\right) = \left(\frac{1}{x^5}\right)^{-\frac{1}{5}} = x.$

$\frac{1}{1-x^5}$ $t^3-100t>0 \Leftrightarrow t(t^2-100)>0$ $t\in(-\sqrt{100};0)\cup(\sqrt{100};+\infty)$

$t\in(4;+\infty)$

$\sin t - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \sin(t) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow t\in$

$t\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$



ЧЕРНОВИК

[ЧЕРНОВИК]

$at^3 + (2 - a - a^2)t^2 + (a^2 - 2a - 2)t + 2a = 0$

$2t^2 - 2t = 0$

$\cancel{a} + \cancel{2} - \cancel{a} - \cancel{a^2} + \cancel{a^2} - \cancel{2a} - \cancel{2} + \cancel{2a}$

$4 + 2a - 2a^2$

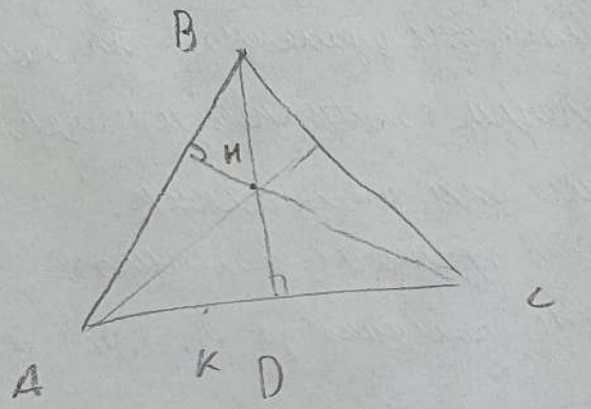
$-\underline{\underline{a}} + 2 - \underline{\underline{a}} - \underline{a^2} - \underline{a^2} + \underline{\underline{2a}} + 2 + \underline{\underline{2a}} = 0$

$2a^2 - 2a - 4 = 0 \iff a^2 - a - 2 = 0$

$-\underline{\underline{8a}} + 8 - \underline{\underline{4a}} - \underline{4a^2} - \underline{2a^2} + \underline{\underline{4a}} + 4 + \underline{\underline{2a}} = 0$

$6a^2 + 6a - 12$

$\cancel{a^4} + \cancel{2a^2} - \cancel{a^3} - \cancel{a^4} + \cancel{a^3} - 2a^2 - 2a + 2a = 0$



ЧЕРНОВИК