МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Новиков Клим Андреевич**

Класс: **10 класс**

Технический балл: **50**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	5	5	15	0	5	15	5

Черновик

№1.

$$\begin{cases} x = 22l + 2 \\ x = 21m + z \\ x = 20n + y \\ z = y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21m + z = 20n + y \\ z = y + 1 \end{cases} \Rightarrow 21m + y + 1 = 20n + y$$

$21m + 1 = 20n \Rightarrow m = 19$ - есть решение

$400 = 20n \Rightarrow n = 20$

$$\begin{cases} x = 400 + y \\ x = 22l + 2 \end{cases} \Rightarrow 400 + y = 22l + 2$$

$l = 1 \ldots 21$

$y = 1 \ldots 20$

$z = 1 \ldots 19$.

$l = 18$ - неподходит

$l = 17$: $400 + y = 418 + 2$

$y = 20 \Rightarrow x = 20 \cdot 20 + 20 = 420$

Ответ: 420

Черновик

№1

$x = 22l + z$

$x = 21m + z$

$x = 20n + y$

$z = y + 1$

$21m + z = 20n + y$

$21m + \cancel{y} + 1 = 20n + \cancel{y}$

$21m + 1 = 20n \Rightarrow m = 19$ - есть решение

$400 = 20n \Rightarrow n = 20.$

$\begin{cases} x = 400 + y \\ x = 22l + z \end{cases} \Rightarrow 400 + y = 22l + z$

$l = 1 \ldots 21$

$y = 1 \ldots 20$

$z = 1 \ldots 19.$

$l = 18$ - неподх

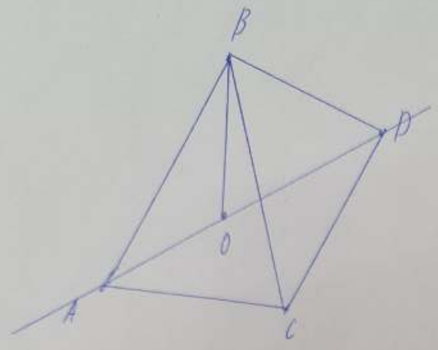
$l = 17$: $400 + y = 418 + z$

$y = 20 \Rightarrow x = 20 \cdot 20 + 20 = 420$

Отв: 420

Чистовик

№2



А - неподвижна

Вращения могут быть вокруг: AB; AC; AD.

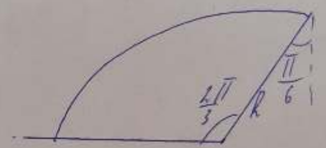
Т.к. подряд нельзя пройти одно ребро, поэтому пирамида вращается в одном направлении.

При вращении вокруг AC вершина D пройдёт расстояние

$l_1 = R \cdot \frac{2\pi}{3}$

$OD = R = \sqrt{36-9} = 5$

$l_1 = \frac{10\pi}{3}$



При следующем повороте она не переместится

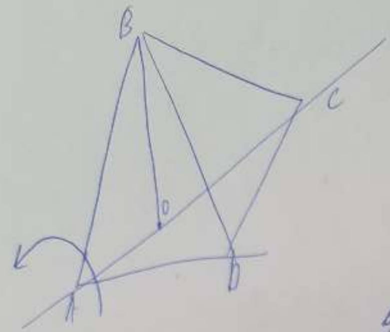
При третьем повороте вершина D пройдёт тоже расстояние l_1.

За три вращения $l = \frac{20\pi}{3}$

За шесть вращений $L = \frac{40\pi}{3}$

Ответ: $L = \frac{40\pi}{3}$.

Черновик



A - неподвижна

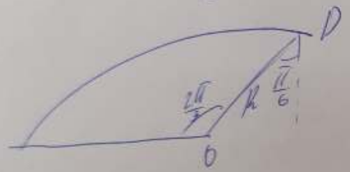
Вращения могут быть вокр:

AB; AC; AD.

Т.к подряд нельзя пройти одно ребро, поэтому пирамида враш. в одн. направл.

При вращ. вокруг AC вершина D пройдёт расст.

$l_1 = R\frac{2\pi}{3}$



$OD = R = \sqrt{36-9} = 5.$

$l_1 = \frac{10\pi}{3}$

При следующем повороте она не перемест.

При 3-ем пов. верш D пройдёт тоже расст l_1.

За три вращ $l = \frac{20\pi}{3}$

За шесть вращ. $l = \frac{40\pi}{3}$

От: $L = \frac{40\pi}{3}.$

Чистовик

№3

$10^{2022} - 9^{2022}$

Три последние цифры числа 10^{2022}: 000

9^{2022}:

Теорема Эйлера

$9^{\varphi(1000)} \equiv 1 \pmod{1000}$

$\varphi(1000) = \varphi(2^3 \cdot 5^3) = 2^2 5^2 (2-1)(5-1) = 400 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9^{2022} = (9^{400})^5 \cdot 9^{22} \equiv 9^{22} \pmod{1000}$

~~$1000 = 9 \cdot 111 + 1$~~

~~Последние три цифры 111.~~

~~$000 - 111 = 889$~~

~~Ответ: последние три цифры 889~~ –

$1000 = 9 \cdot 111 + 1$.

9^{22} три последние цифры 881.

$000 - 881 = 119$.

Ответ: 119.

Чистовик

№5.

$t^3+4t^2+4t+a=0$

$A=x^3-4y^2-4z^2-4y+32-4z$ (*)

$(t-x)(t-y)(t-z)=0$; x, y, z – корни.

$t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)+xyz=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=-4 \\ xy+yz+zx=4 \\ xyz=a \end{cases} \quad (1)* \quad y+z=-4-x$$

$$x^2+y^2+z^2+2\underbrace{(xy+yz+zx)}_{4.}=16$$

$$x^2+y^2+z^2=8 \quad \Rightarrow y^2+z^2=8-x^2$$

$$(*) \quad A=x^3-4(8-x^2)-4(-4-x)+32=x^3-32+4x^2+16+4x+32=$$

$$=\underbrace{x^3+4x^2+4x+16+a}_{=0}-a=16-a.$$

Ответ: $A=16-a$, где $a=xyz$.

Черновик.

$t^3+4t^2+4t+a=0$

$A=x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32$ (*)

$(t-x)(t-y)(t-z)=0$; x, y, z - корни.

$t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t+xyz=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=-4 \\ xy+yz+zx=4 \\ xyz=a \end{cases}$ (1) $y+z=-4-x$.

$x^2+y^2+z^2+2\underbrace{(xy+yz+zx)}_{4.}=16$

$x^2+y^2+z^2=8$ $\quad y^2+z^2=8-x^2$

(*) $A=x^3-4(8-x^2)-4(-4-x)+32=x^3-32+4x^2+16+4x+32=$

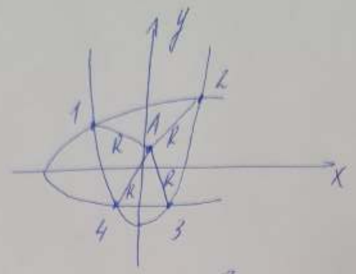
$=\underbrace{x^3+4x^2+4x+16+a}_{=0}-a=16-a.$

Отв.: $A=16-a$, где $a=xyz$.

Чистовик

№6.

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ x = 4y^2 - 2 \end{cases}$$



Параболы пересекаются в точках 1, 2, 3, 4.

Точка A равноудалена от точек пересечения параболы: $A(x_0; y_0)$, является центром окружности.

$2y + x = 4x^2 + 4y^2 - 4 \Rightarrow 4x^2 - x + 4y^2 - 2y - 4 = 0$ (1)

1) $x = x' + a$

$4x^2 - x = 4(x'+a)^2 - (x'+a) = 4x'^2 + 8x'a + 4a^2 - x' - a = 4x'^2 + (4a^2 - a)$

$8x'a - x' = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{8} \Rightarrow 4x'^2 + 4a^2 - a = 4x'^2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = 4x'^2 - \frac{1}{16}$

2) $y = y' + b$

$4(y'+b)^2 - 2(y'-b) = 4y'^2 + 8y'b + b^2 - 2y' - 2b$

$8y'b - 2y' = 0$

$b = \frac{1}{4} \Rightarrow 4y'^2 + b^2 - 2b = 4y'^2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{2} = 4y'^2 - \frac{7}{16}$

$(x - \frac{1}{8})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = R^2$

$x_0 = \frac{1}{8}$; $y_0 = \frac{1}{4}$

Ответ: $A(\frac{1}{8}; \frac{1}{4})$

Черновик

9
81
729
561
049
441
969

$561 \times 9 = 5049$

$49 \times 9 = 441$

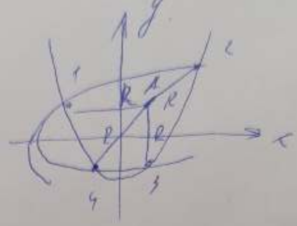
$36 + 8 = 44$

$441 \times 9 = 3969$

$969 \times 4 = 3876$

$y = 2x^2 - 1$

$x = 4y^2 - 2$



Параболы пересек. в точках: 1, 2, 3, 4

Точка A равноудаленна от точек пересеч. парабол:

$A(x_0; y_0)$, является центром окружности.

$$2y + x = 4x^2 + 4y^2 - 4 \Rightarrow 4x^2 - x + 4y^2 - 2y - 4 = 0 \quad (1)$$

1) $x = x' + a$.

$$4x^2 - x = 4(x'+a)^2 - (x'+a) = 4x'^2 + 8x'a + 4a^2 - x' - a = 4x'^2 + (4a^2 - a)$$

$$8x'a - x' = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{8} \Rightarrow 4x'^2 + 4a^2 - a = 4x'^2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = 4x'^2 - \frac{1}{16}.$$

2) $y = y' + b$

$$4(y'+b)^2 - 2(y'-b) = 4y'^2 + 8y'b + b^2 - 2y' - 2b$$

$$8y'b - 2y' = 0$$

$$b = \frac{1}{4} \Rightarrow 4y'^2 + b^2 - 2b = 4y'^2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{2} = 4y'^2 - \frac{7}{16}$$

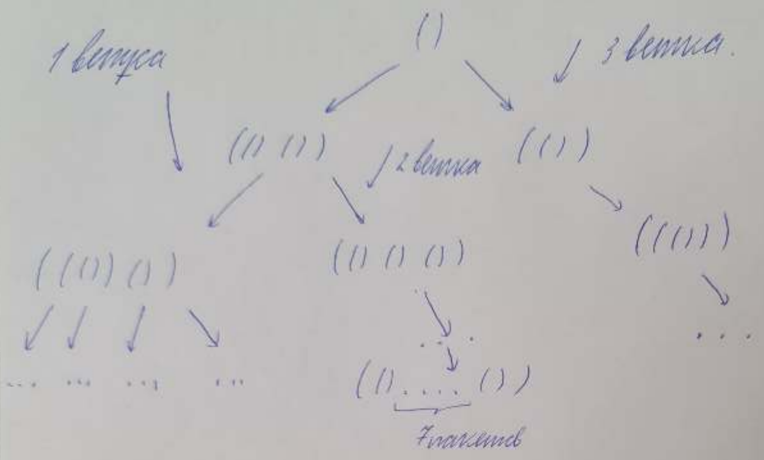
$$(x - \frac{1}{8})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = R^2$$

$x_0 = \frac{1}{8} \quad y_0 = \frac{1}{4}$

Отв: $A(\frac{1}{8}; \frac{1}{4})$

Чистовик

№ 7



3 ветка:

Это вариант, когда мы помещаем каждый новый пакет в предыдущий. $K_3 = 1$ вариант

2 ветка:

Это вариант, когда мы каждый новый пакет помещаем в первый и не помещаем в любой другой

$K_2 = 1$ вариант

1 ветка:

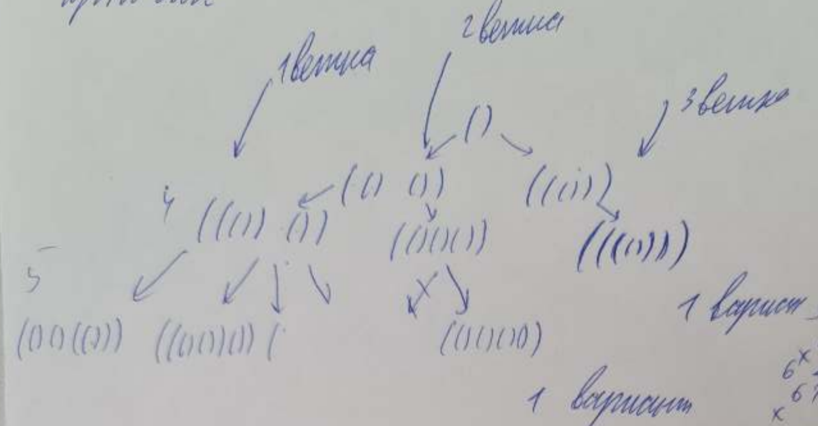
Можно заметить, что каждый n-ый пакет создаёт n мест для n+1 пакета, значит:

$K_1 = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 604800$ вариантов

$K = K_1 + K_2 + K_3 = 604802$ варианта

Ответ: $K = 604802$ варианта.

Черновик



$120 \times 7 = 840$

$840 \times 8 = 6720$

$6720 \times 9 = 60480$

$\underbrace{4\cdot5}_{20}\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$ — 120 — 840 — 6720 — 60480 — 604800 вариантов

1 ветка

каждый новый пакет (i) будет создавать i вариантов, куда можно положить i+1 пакет,

поэтому $n_1 = 4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 = 604800$

2 ветка: 1 вариант

3 ветка: 1 вариант.