МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Нураев Тимур Талгатович**

Класс: **8 класс**

Технический балл: **60**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6
Оценка	15	10	0	15	20	0

Черновик

$35;\ 79;\ 57.$

$c=a+2$
$d=b+2$
$e=a+4$

$\begin{cases} c \overset{11}{\equiv} a+2 \\ d \overset{11}{\equiv} 2+b \\ e \overset{11}{\equiv} c+2 \end{cases}$

$e=0;\ c=9 \cdot 21436$
$a=7.$ $(21+14)\ (14+43)(43+36)$
$35 \quad 57 \quad 79$

$\cancel{7b+b+9}$

$\overline{7b}+\overline{b9}=79+11b>79.$ – неуд.

35
$(2+23)(23+34)(34+45)$
$57 \quad 79$

$(10a+c+11b)$

$(11a+11b+2)(10b+d+11c)\ (10c+e+11d)$

$(11d+11c+2)\ (10a+2024+11d)$

$11d\cancel{+11c+2=11b+22}+11$

$(10a+c+11b)$
$(10b+d+11c)$
$(10c+e+11d)$

$\cancel{(11a+11b+2)\ (11d}\ \cancel{(11d+11c+2)}(11a+11d+24)$
$(11a+11b+2) \quad (\quad)\ (11a+11b+46)$
$(11b+2+11a+22)=(11a+11b+24)$

$a=1;\ b=2 \quad b=2\cdot 3 \quad 1;6;2;3$

$\cancel{11a+22+a+4}$

$4=2^2 \quad (12+23)(23+34)(34+45)$
$18=2\cdot 3^2\cdot\cancel{3}$ $\cancel{21+1}$ $(21+14)(14+43)(43+36)$
$\cancel{1;18;2;9;3;6}$ $21436.$

$\cancel{\frac{1}{2021}=\frac{1}{2021\cdot 2022}}$

$\begin{cases} A+Б=220 \\ A+B=240 \\ Б+B=250 \end{cases}$
$2A+2Б+2B=710$
$A+Б+B=355$
$-\ A+Б=220$
$B=135 \quad A=105.$

$A+Б$
$22+24=46$
$46+25=71$

$\frac{xy}{2022}=x+y$

$xy=2022x+2022y$

$y(x-2022)=2022x$

$Б=\cancel{115}\ 115$

$y=\frac{2022x}{x-2022}$

$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 337}=\frac{x+y}{xy}$

$xy=2\cdot 3\cdot 337(x+y)$

кол-во x: $\frac{2022x}{x-2022}\in Z$

$\cancel{\frac{\left(\frac{2022x^2}{x-2022}\right)}{2022}-\frac{x^2-2022x+2022}{x-2022}}$

$\left(\frac{2022x}{x-2022}\right)$

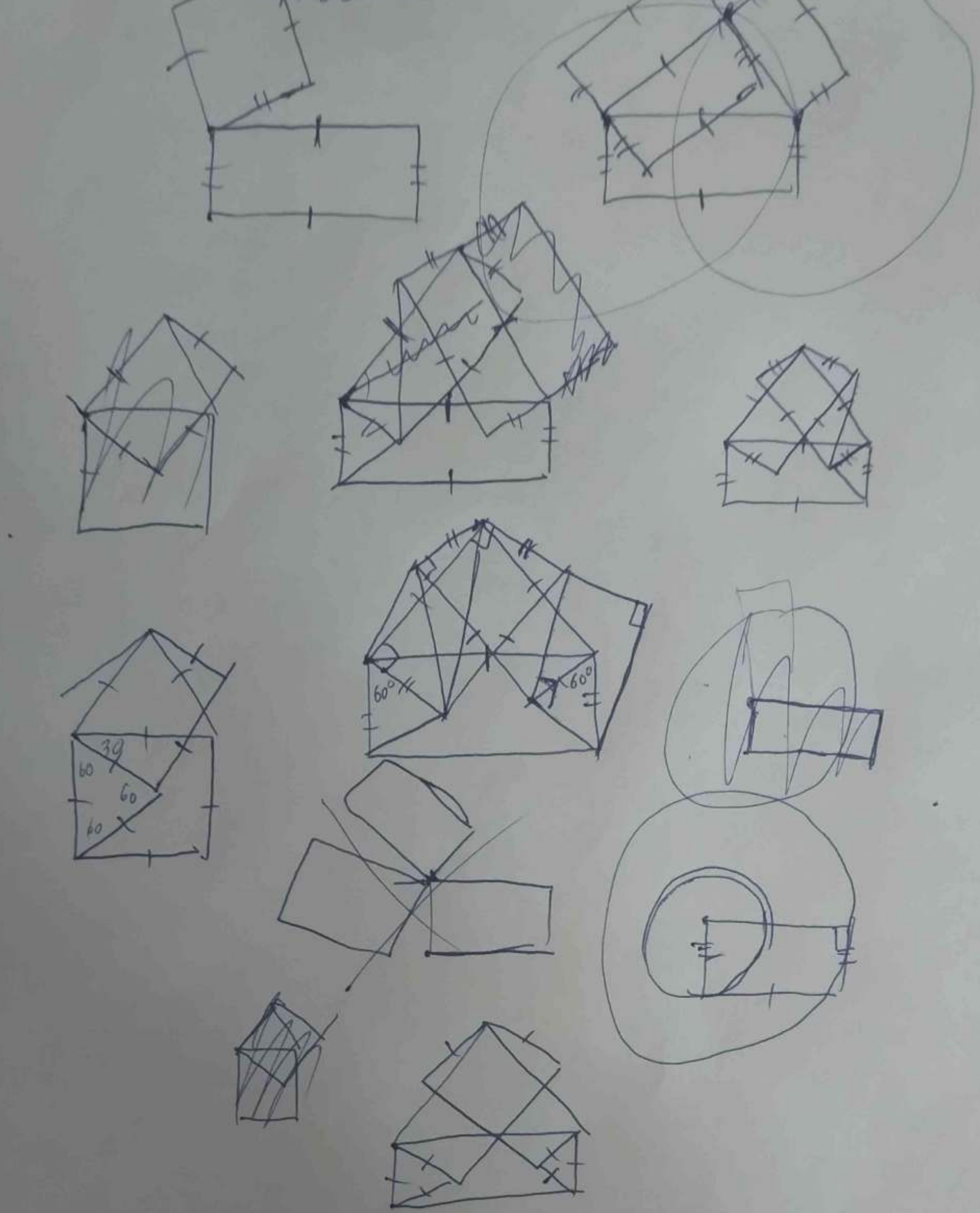
$2022x \vdots (x-2022)$

$2021x+2022 \vdots x-2022$

$2022\cdot 2022 \vdots x-2022$

$2^2\cdot 3^2\cancel{4\cdot 9}\cdot 337^2 \vdots x-2022.$

Черновик



$(11+10)(10+\cancel{85})$

Черновик

$21 \cdot 95 \cdot 79$

1

$2022 = 2 \cdot 1011$, $1011 : 3 = 337$

$2 \cdot 3 \cdot 337 = 2022$

$21 \cdot 79 \cdot 95$

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 337} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 337} = \frac{x+y}{xy}$$

$\cancel{(10+10)(10+69)(69+}$

$xy = 2 \cdot 3 \cdot 337(x+y)$

$1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1$

$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6$

$x_7 = x_6 \cdot x_4 = -1$

$x_4 = x_3 \cdot x_1 = -1, \ x_5 = x_4 \cdot x_2 = -1 \cdot 1 = -1$

$2020 : 7$, 28

$1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1$

$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13$

$a+c \underset{11}{\equiv} b+d \underset{11}{\equiv}$

$\cancel{a+b \equiv b+c \equiv}$

$1 \ 1 \ 1 \ 1$

$105 \cdot 19 = 1995$, $1995 \cdot 79 = 157605$

$1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1$

$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9$

a, b, c, d, e

$(\overline{ab} + \overline{bc})(\overline{bc} + \overline{cd})(\overline{cd} + \overline{de}) = 157605$

$157605 : 5 = 31521$, $31521 : 3 = 10507$, $10507 : 7 = 1501$

$\boxed{5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 79}$

$\cancel{1501 : 11}$, $1501 : 19 = 79$

$e = 0; \ c = 9$

$a = 7$

$2a + \overline{x_1 x_2} + \overline{x_3 x_4} \le 198$

$c = 1; \ d = 1; \ e = 0$

$10a + c \underset{11}{\equiv} 2$

$10b + d \underset{11}{\equiv} 2$

$10c + e \underset{11}{\equiv} 2$

$\overline{ab} + \overline{bc} = 79$

$\overline{bc} + \overline{cd} = 79$

$\overline{cd} + \overline{de} = 79$

$\boxed{79 \cdot 57 \cdot 35}$

$(\overline{ab} + \overline{bc})(\overline{bc} + \overline{cd}) \cdot 21 =$

$\cancel{68} \ 68 \ 11$

$\cancel{10a+2b}$

$\cancel{10a+}$

$c \underset{11}{\equiv} a+2$

$d \underset{11}{\equiv} b+2$

$e \underset{11}{\equiv} c+2 \underset{11}{\equiv} a+4$

$c = a+2$

$d = b+2$

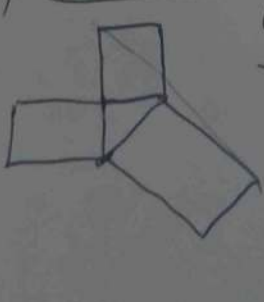
$11+10$

$(b1+11)(11+10)$

$79; 95$

$c \underset{11}{\equiv} a+2$

$(\overline{7b} + \overline{b9})(\overline{b9} + \overline{9d})(\overline{d9}$



стр. 1 №4 Чистовик

$x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1;\ x_4 = -1\cdot 1 = -1;\ x_5 = -1\cdot 1 = -1;\ x_6 = -1\cdot(-1)$

$x_6 = 1;\ x_7 = 1\cdot(-1) = -1;\ x_8 = (-1)\cdot(-1) = 1;\ X_9 = 1\cdot 1 = 1$

$1, 1, \underbrace{-1, -1, -1, 1, -1, 1, 1}, \underbrace{-1, -1, -1 \ldots}$

$x_{10} = 1\cdot(-1) = -1;\ x_{11} = -1\cdot 1 = -1;\ X_{12} = -1\cdot 1 = -1$

Появился цикл из 7 чисел: $-1, -1, -1, 1, -1, 1, 1$, дальше повторяются числа $-1, -1, -1$ и, очевидно, повторяется цикл, т.к. следующее число не зависит от тех, что были более чем на 3 шага (позиции) от него. Тогда

$2022 - 2 = 2020$; $2020 : 7 = 288$ (ост. 4) ; $2020 \equiv_7 4$; X_{2022} – это четвёртое число в цикле; $\underline{X_{2022} = 1}$

Ответ: 1

№5

$157605 = 5\cdot 3\cdot 7\cdot 19\cdot 79$, при этом сумма двух двузнач. чисел ≥ 20, но $\leq 198 \Rightarrow$ т.к 79 при умножении на любой другой простой множитель > 198, то 79 будет отдельно.

Теперь: 3 с 5 быть не может (т.к $3\cdot 5 = 15 < 20$), если 3 с 7, то $3\cdot 7 = 21 \Rightarrow$ сумма 2 двузнач чисел $= 21 \Rightarrow$ одно число – 11, другое – 10, ~~не ноль может~~ нулём может быть только e, тогда $\overline{cd} + \overline{de} = 11 + 10$; $c = 1$; $\overline{bc} = \overline{b1}$. Остаются множители 79 и $5\cdot 19 = 95$; но $\overline{bc} + 11$ оканчивается на 2 – неуд. Значит 3 будет с $19 \Rightarrow 5$ будет с 7; тогд $(\overline{ab} + \overline{bc})(\overline{bc} + \overline{cd})(\overline{cd} + \overline{de}) =$
$= 35\cdot 57\cdot 79$ (в каком-то порядке каждый из множ. слева равен одному тому, что справа)

Чистовик

стр. 2.

Заметим, что $35 \underset{11}{\equiv} 79 \underset{11}{\equiv} 57 \underset{11}{\equiv} 2 \Leftrightarrow \overline{ab}+\overline{bc} \underset{11}{\equiv} 2 \underset{11}{\equiv} 10a+c+11b \underset{11}{\equiv}$

$\underset{11}{\equiv} 10a+c \underset{11}{\equiv} c-a$; $c-a \underset{11}{\equiv} 2$; $c \underset{11}{\equiv} 2+a$, аналогично

$d \underset{11}{\equiv} b+2$; $e \underset{11}{\equiv} c+2$, т.к. $0 \leq a,b,c,d,e \leq 9$, то

либо $e=c+2$, либо $e=0, c=9$, тогда $a=7$, но

тогда первый множитель – это $(\overline{7b}+\overline{b9}) > 79$ – неуд.

Тогда т.к. первым может быть лишь e, то

$$\begin{cases} c=a+2 \\ e=c+2=a+4 \\ d=b+2 \end{cases}$$

$\overline{ab}+\overline{bc} = 10a+11b+c = 11a+11b+2$

$\overline{bc}+\overline{cd} = 10b+d+11c = 11b+11c+2 = 11b+11a+24$

$\overline{cd}+\overline{de} = 10c+e+11d = 10a+20+a+4+11b+22 =$

$= 11a+11b+46$.

Теперь ясно, что $11a+11b+2$ – меньшее, то есть оно равно 35.

$11b+11a+24$ – среднее; $11b+11a+24=57$ и

$11a+11b+46=79$; $11a+11b=33$; $a+b=3$, т.к $a;b\neq 0$, то

$a=1; b=2$ или $a=2; b=1$; если $a=2, b=1$, то

$\overline{ab}+\overline{bc} = (21+\overline{1c}) = 35$; $c=4$;

$(14+\overline{4d}) = 57$; $d=3$

$(43+\overline{3e}) = 79$; $e=6$

$\overline{abcde} = 21436$

если $a=1; b=2$; то $12+\overline{2c}=35$; $c=3$

$23+\overline{3d}=57$; $d=4$; $34+\overline{4e}=79$; $e=5$

$\overline{abcde}=12345$ Ответ: 12345; 21436.

№1

А; Б; В – веса, поднятые штангистами с соответственными

$$\begin{cases} А+Б=220 \\ А+В=240 \\ Б+В=230 \end{cases}$$

$2А+2Б+2В=710$

$А+Б+В=355$.

$А+В+Б=355$

$-\ А+Б=220$

$В=135$

$135>115>105$

$А+135=240$

$А=105$.

$105+Б=220$

$Б=115$

Ответ: 135 кг – В.

стр. 3 №2 Чистовик

$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{2022} = \frac{x+y}{xy} \Leftrightarrow xy = 2022x + 2022y$ если $x=2022$, то $\frac{1}{y}=0$ - неуд.

$\Leftrightarrow y(x-2022) = 2022x \Leftrightarrow y = \frac{2022x}{x-2022}$ ✓, соответств., если

$\frac{2022x}{x-2022} \in Z$, ~~то уравнение~~ и $x \in Z$, то уравнение решено

$\frac{2022x}{x-2022} \in Z \Rightarrow 2022x \vdots x-2022;\ x \in Z$

$2022x \vdots x-2022 \Leftrightarrow 2022x - x + 2022 \vdots x-2022$

$2021x + 2022 \vdots x-2022 \Leftrightarrow 2021x + 2022 - x + 2022 \vdots x-2022 \ldots$

$\Leftrightarrow 2022^2 \vdots x-2022;\ 2022 = 3 \cdot 2 \cdot 337;\ 2022^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$

простые

Кол-во положительных делителей числа $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n}$, где $p_1, p_2, p_3 \ldots$ простые - считается по формуле $n = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_n+1)$

Тогда кол-во делителей $2022^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, но т.к. они бывают < 0, то всего делителей $54 \Leftrightarrow 54$ решения

Ответ: 54

№3

можно: