МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Огородников Егор Сергеевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	10	15	0	15	15	15

Чистовик | лист 4 №6

$a\,ctg^3 x + (2a^2 - a - 2)\,ctg^2 x + (2 - 4a - 2a^2)\,ctg\,x + 4a = 0$ $(0;\pi)$

$ctg\,x = 1$ – корень => можно вынести $(ctg\,x - 1)$

$(ctg\,x - 1)(a\,ctg^2 x + (2a^2 - 2)\,ctg\,x - 4a) = 0$

$(ctg\,x - 1)(a\,ctg\,x - 2)(ctg\,x + 2a) = 0$ <= $ctg\,x = -2a$ – корень, значит можно вынести $(ctg\,x + 2a)$

1) Если $a = 0$, то корни это $arcctg\,1 = \frac{\pi}{2}$ и $arcctg(0) = \frac{\pi}{2}$ (на $(0;\pi)$). Разница $\frac{\pi}{4}$

2.1) Если $a > 0$, то 3 корня: $arcctg(-2a)$, $\frac{\pi}{4}$, $arcctg\left(\frac{2}{a}\right)$

$-2a < 0$

$arcctg(-2a) \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ => расстояние до $\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4}$ =>

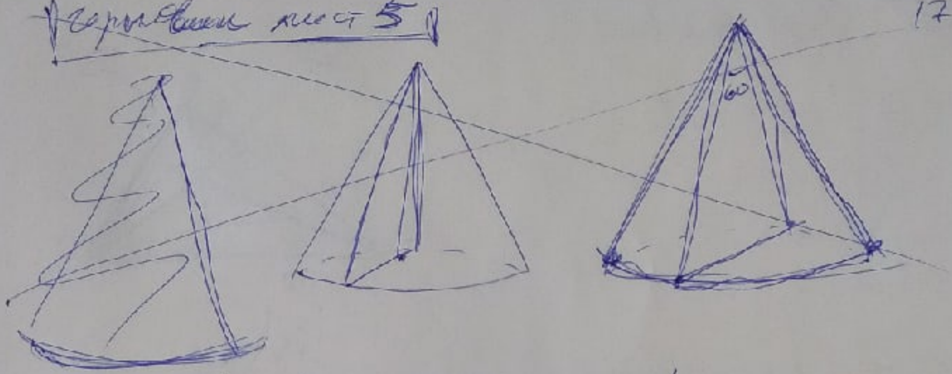
=> max расстояние между корнями тоже $> \frac{\pi}{4}$.

3) $a < 0$ => $arcctg\left(\frac{2}{a}\right) \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ => расстояние до $\frac{\pi}{4}$ больше $\frac{\pi}{4}$ => max расстояние $> \frac{\pi}{4}$

=> $a = 0$ даёт минимальное рас-е

Ответ: $a = 0$, $\frac{\pi}{4}$ = расст.

Черновик лист 5 — 17 $r=2$



№6 $ctg=1$ ctg $a\cdot ctg^2+(2a^2-2)ctg\,x-2a$

$D=(2a^2-2)+4\cdot4\cdot a^2$

$a=0 \to \operatorname{arcctg} 1=\frac{\pi}{2}$ $\frac{2}{-2a}$ $-2a$

и

$\operatorname{arcctg}(0)=\frac{\pi}{2}$ $\Delta=\frac{\pi}{2}$

$a>0$ Значит, $\operatorname{arcctg}(-2a)$, $\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arcctg}(\frac{\pi}{2})$

$-2a<0$ $\operatorname{arcctg}(-2a)\in(\frac{\pi}{2};\pi) \Rightarrow \Delta\geq\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \Delta>\frac{\pi}{4}$

$a<0 \Rightarrow \operatorname{arcctg}(\frac{2}{a})\in(\frac{\pi}{2};\pi)$

$\Delta\geq\frac{\pi}{4} \Rightarrow$ Ответ при $a=0$.

Черновик/лист 1

№1

$t^3 - 121t \le 2^t - 32 \le \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$t(t^2-121) \ge 2^t - 32 \le \sin t - \sin 60°$

Любое из чисел ≥ 0

$\Rightarrow$ 2 числа > 0

$a \geq 0 \iff t(t-11)(t+11)$

$b = 2^t - 32 \ge 0 \iff t \in (5; +\infty)$

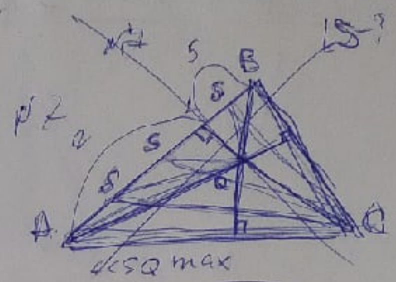
$c \iff t \in (\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n)$

$a \ge 0$ — -11 — 0 — 11

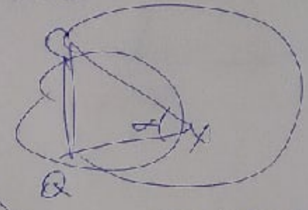
$b \ge 0$ — -11 — 0 — 11

$c > 0$ — сразу нечесто

№2

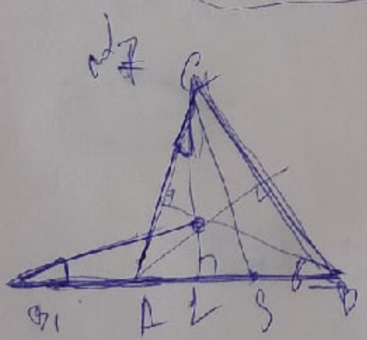


$\angle SQ$ max



$LQ \cdot LC = LS^2$

№7



$\angle QB'L = \angle QBL = \angle ACL$

$LQ \cdot LC = LA \cdot LB' = LA \cdot LB = 2 \cdot 5 = 10$

$LQ \cdot LC = LS^2$

$\Rightarrow LS = \sqrt{10}$

N1 $\sum_{i=1}^{99} \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} = \sum_{i=1}^{35} \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{100^2} \Rightarrow A > B$

N3 сразу в-место

N2 :19 (19, 38, 57, 76, 95)

:23 (23, 46, 69, 92)

I-4 $\Rightarrow$ II 6 $\Rightarrow$ III 9 $\Rightarrow$ 2n5

Если 2 → 3 → 8 → X

Если 5 → 7 → 6 → цикл

465576... 9576

2020

6

~~черновик~~ (Чистовик / лист 2)

(N1) Число $A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$ ~~целое~~

Число $B = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \ldots + \frac{77}{(38\cdot39)^2} + \frac{79}{(39\cdot40)^2}$

$$\sum_{i=1}^{39} \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} = \sum_{i=1}^{39} \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{40^2} \Rightarrow A > B$$

$\boxed{\text{Ответ: } A > B}$

(N3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$ $\quad f(x)^9 = \frac{1}{1-x^9}$

$f(x)^9 - 1 = \frac{-1}{x^9-1} - 1$ Обозначим $a_0 = x^9 - 1$ и $a_n =$

$= \underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n}{}^9 - 1$. Тогда из того, что $f(x)^9 - 1 =$

$= \frac{-1}{x^9-1} - 1$ получаемся, что $a_{n+1} = \frac{-1}{a_n} - 1$ $\forall n = 0, 1, \ldots$.

Тогда $a_{n+2} = \frac{-1}{-\frac{1}{a_n} - 1} - 1 = \frac{a_n}{1+a_n} - 1 = \frac{-1}{a_n+1}$

$a_{n+3} = -\frac{1}{a_{n+2}} - 1 = a_n + 1 - 1 = a_n$, значит $a_{n+3} = a_n$, $n = 0, 1, \ldots$.

Т.к $1305 ⋮ 3$ $(1+3+5 ⋮ 3)$, то $a_{1305} = a_{1302} = \ldots = a_3 = a_0$,

Тогда необходимо найти $\sqrt[9]{a_{1305}+1} = b_1$ в точке 2022,

это будет равно $\sqrt[9]{a_0+1} = \sqrt[9]{x^9-1+1} = x$ в точке 2022,

т.е это будет равно 2022.

$\boxed{\text{Ответ: } 2022}$

(N2) $⋮ 19$ двузначные: 19, 38, 57, 76, 95

$⋮ 23$ двузначные: 23, 46, 69, 92

Первая цифра 4 => вторая только 6 => третья 9

Потом 2 или 5.

1) Если 2, то потом 3 и потом 8, дальше не продолжить

2) Если 5, то потом 7, потом 6, потом 9 => повторяется далее.

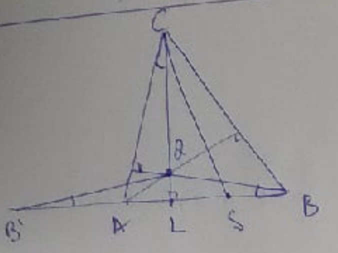
Итого: $46\underbrace{9576\ldots9576}_{2020}$ Если после последней 9ки будет 2, то до конца число не продолжается.

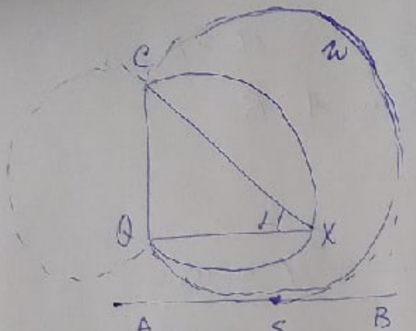
$\boxed{\text{Ответ: } 6}$

Часовых / лист 3

№7

$AL = 2$
$BL = 5$





Заметим, что мн-во точек X таких, что $\angle CXQ = \alpha$ ~~[illegible]~~, это две дуги окружности w. Угол CSQ максимален, когда эта окружность касается AB в S.

Таким образом $LQ \cdot LC = LS^2$.

Изобразим т. B симметрично относительно L ($BL = LB'$) и получим B'. Выходит, что $\angle QB'L = \angle QBL = \angle ACL$, потому что Q-ортоцентр.

Отсюда можно заключить, что B'AQC-впис.

Тогда $LQ \cdot LC = LA \cdot LB' = LA \cdot LB = 2 \cdot 5 = 10$, при том, что $LQ \cdot LC = LS^2$. Значит $LS^2 = 10$ и $LS = \sqrt{10}$

$\boxed{\text{Ответ: } \sqrt{10}}$

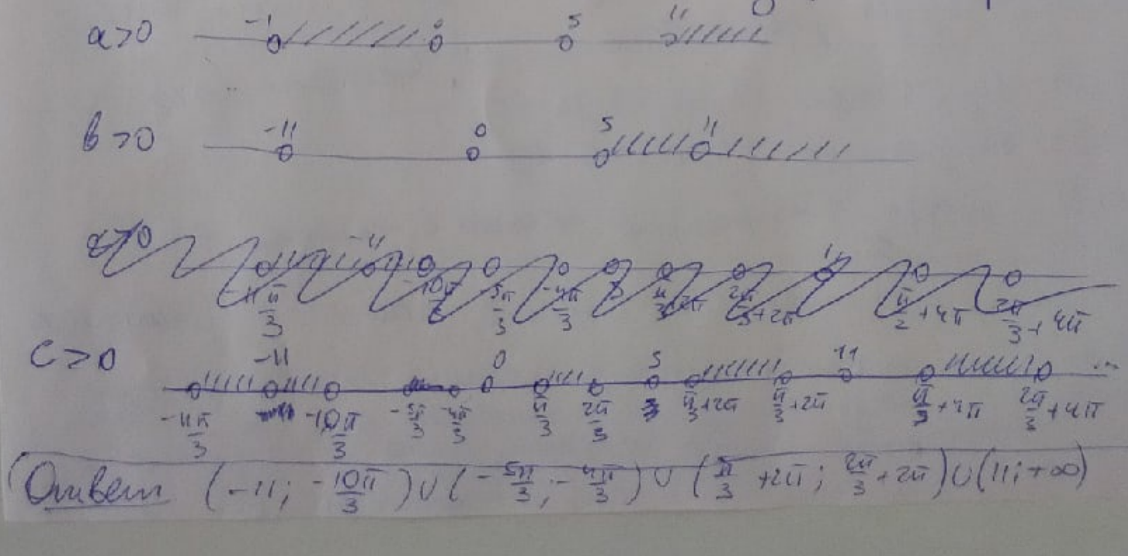
№5 Среднее из чисел $>0 \Leftrightarrow$ хотя бы 2 числа >0

$a = t^3 - 121t > 0 \Leftrightarrow t(t-11)(t+11) > 0 \Leftrightarrow t \in (-11; 0) \cup (11; +\infty)$

$b = 2^t - 32 > 0 \Leftrightarrow t \in (5; +\infty)$

$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Leftrightarrow t \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$

Все t лежат в пересечении ≥ 2 из трех интервалов:



Ответ $\left(-11; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi; \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) \cup (11; +\infty)$