МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Осипова Анастасия Александровна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	10	15	0	15

Задача 1 чистовик

Заметим, что каждое слагаемое, из которых состоит A имеет вид:

$$\frac{2k+1}{(k\cdot(k+1))^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2} = \boxed{1 - \frac{1}{45^2}}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$$\Rightarrow A = 1 - \frac{1}{45^2} < 1 = B$$

Ответ: B больше A.

ЧИСТОВИК

задача 2

рассмотрим все двухзначные числа

⋮23 и ⋮19

23	19
46	38
69	57
92	76
	95

число начин. с 4, из всех чисел только

46 ⋮ 23 или ⋮ 19 => дальше 6

число сейчас - 46... далее на 6 есть только

69 => число 469... далее два вар.-та:

I 4692 II 4695

далее оба однозн. восст.:

46923 46957

и далее:

$\boxed{469238}$ 469576

не может быть, так как ни одно из чисел не нач. на 8 => второй вариант ②

здесь цикл 6957 будет повторятся => можем восстановить посл. цифру

$2022 - 1 = 2021$ ← т.к. вне цикла 1 цифра листовик

целых циклов поместиться ≈ 505 ц

1 цифра из нового цикла, т.е. 6

будет последней

$\boxed{\text{ответ: } 6}$

Чистовик

задача 3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{\frac{-x^5}{1-x^5}}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1-x^5}{-x^5}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5-1+x^5}{-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$\Rightarrow$ $f(f(f(x))) = x$

$\Rightarrow$ применение этой функции 1303 раза имеет такой же рез-тат, что и применение этой ф-ции один раз ($1303 \equiv 1 \pmod 3$)

$$f(2022) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

Задача 4 чистовик

~~№4~~ центры всех шаров лежат в 1 пл-ти

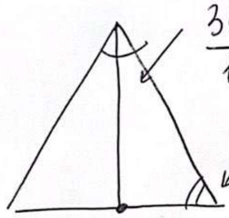
~~расст. между любы~~

рассмотрим эту пл-ть

между центрами соседних шаров расст. ~~3~~-6

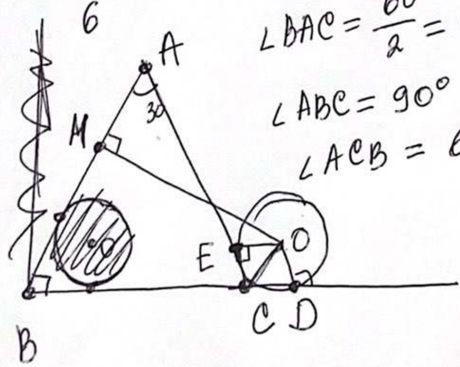
(т.к. они касаются 2R)

все центры лежат на 1 расст. от ~~цен~~ оси конуса (из симметрии)



радиус опис. окр.

$$r = \frac{3}{\sin(\frac{180}{11})}$$



$$\angle BAC = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

$$\angle ABC = 90^\circ$$

$$\angle ACB = 60^\circ$$

$$\angle ACD = 120^\circ$$

$$\angle EOD = 360^\circ - 120 - 90 - 90 = 60^\circ$$

$\angle OEC = \angle ODC = 90^\circ$ (т.к. кас.)

$$OM = r = \frac{3}{\sin(\frac{180}{11})}$$

OMBD - ~~четыр~~. прямоуг. =>

$$\Rightarrow BD = \frac{3}{\sin(\frac{180}{11})} = BC + CD$$

$OD = 3$ задача 4 чистовик

$\angle COD = 30^\circ \Rightarrow CD = 3 \cdot tg 30$

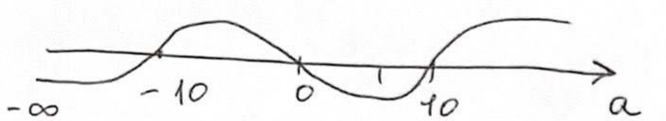
$$BC = BD - CD = \frac{3}{\sin\left(\frac{180}{11}\right)} - 3 \cdot tg\, 30$$

Ответ: $\frac{3}{\sin\left(\frac{180}{11}\right)} - 3\, tg(30)$

Задача 5 Чистовик

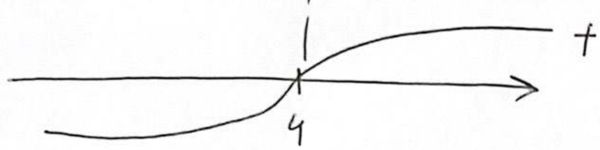
хотя бы два числа положительны

$a = t^3 - 100t = t(t-10)(t+10)$



> если хотя бы два числа полож., то ~~средн~~ среднее полож. (иначе оно меньше двух чисел) и наоборот, если только 1 больше 0, то оно максимальное $\Rightarrow$
> $\Rightarrow$ среднее < 0 – ю (если нет ~~отриц~~ полож., то и среднее положительное)

$b = 2^t - 16 > 0$, если $t > 4$



от $-\infty$ до -10 оба $< 0 \Rightarrow$ этот отр. непод.

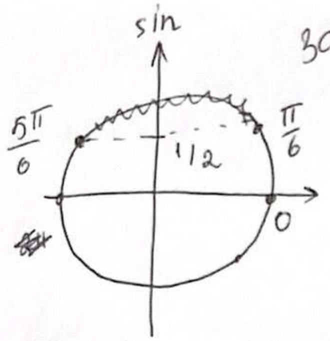
от 0 до 4 тоже.

$t \in (10; +\infty)$ оба больше 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $t \in (10; +\infty)$ ~~оба~~ среднее больше 0

$(-10; 0)$ и $(4; 10)$ – одно полож., др. – отр

$\Rightarrow c > 0$



задача 5 чистовик

$\sin t - \frac{1}{2} > 0$ при

углы от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5\pi}{6}$,

найдем эти t на

отрезках: $\begin{cases} \sin t > \frac{1}{2} \\ t \in (-10; 10) \end{cases}$

~~вычтем из $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$ 2π =>~~

$\begin{cases} t \in \left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right), k \in \mathbb{Z} \\ t \in (-10; 10) \end{cases}$

~~=> t от $-\frac{11\pi}{6}$ до~~

~~еще раз.~~

~~t от~~

~~$\left(-10; \frac{19\pi}{6}\right)$~~

~~$k = 1$~~

~~$k = 2$~~

~~$t \in ($~~

$k = -1 \Rightarrow t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)$ — все подх.

$k = -2 \Rightarrow t \in \left(-\frac{23\pi}{6}; -\frac{19\pi}{6}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow t \in \left(-10; -\frac{19\pi}{6}\right)$

теперь на отрезке $(4; 10)$

$k = 1 \Rightarrow t \in \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$ — полностью подх.

$k = 2 \Rightarrow t \notin (4; 10)$

8

итого задача 5 чистовик

$t \in \left(-10; -\frac{19\pi}{6}\right) \cup \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup$

$\cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (10; +\infty)$

Ответ

задача 6

интервал:

$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{\exists\ tg x = t}$ $(t \in -\infty; +\infty)$

~~a tg~~ $at^3 + (2-a-a^2)\cancel{tg}\, t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a = 0$

подставим:

~~при~~ $t = 1$ ~~в~~ ~~вырах.~~

$a + (2-a-a^2) + a^2 - 2a - 2 + 2a = 0$

$\Rightarrow (t-1)$ можно выделить.

~~$t^2(at+2$~~

$at^3 - at^2 + (2-a^2)t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a = 0$

$at^3 - at^2 + (2-a^2)t^2 - (2-a^2)t - 2at + 2a = 0$

$at^2(t-1) + (2-a^2)t(t-1) - 2a(t-1) = 0$

$(t-1)(at^2 + (2-a^2)t - 2a) = 0$

$D = \cancel{2+a^2}\ (2-a^2)^2 + 4 \cdot 2a \cdot a =$

$= (2-a^2)^2 + 8a^2 = 4 + a^4 - 4a^2 + 8a^2 =$

$= 4 + a^4 + 4a^2 = (2+a^2)^2$

9

~~Задача 6~~ ~~чист~~

Задача 6 черновик

$$t_{1,2} = \frac{a^2-2 \pm (2+a^2)}{2a}$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{a^2-2+2+a^2}{2a} = a \\ t = \dfrac{a^2-2-2-a^2}{2a} = -\dfrac{2}{a} \end{array}\right.$$

расстояние:

~~(t-1)t~~ $r = \left|a - \left(-\frac{2}{a}\right)\right| = \left|a + \frac{2}{a}\right|$

$\exists b = \frac{a}{\sqrt{2}}$

~~минимал~~

$$r = \left|\sqrt{2}b + \sqrt{2}\cdot\frac{1}{b}\right| = \sqrt{2}\left|b + \frac{1}{b}\right| \geq 2\sqrt{2}$$

(т.к. $b + \frac{1}{b} \geq 2$, $b + \frac{1}{b} = 2$ при

$\Rightarrow$ наим. расст. $2\sqrt{2}$, $b = 1 \Rightarrow a = \sqrt{2}$)

~~пример~~: при $a = \sqrt{2}$

~~расстояние~~:

по н-ву о средних: $b + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{b}} = 2$, равенство ~~только~~ достигается только при $b = \frac{1}{b} \Rightarrow b = 1$

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \sqrt{2} \\ t = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \end{array}\right.$$

мы ищем мин. расст. в уравнении с tg, заметим, что есть и полож. и отриц корни

$\Rightarrow$ минимизируем расст. между t

(т.к. расст. — сумма двух ~~пол~~ аркт.)

задача 6 шестовик

$r = \left|a + \frac{2}{a}\right| \geqslant 2\sqrt{2}$ (см. стр. 10), $a = \sqrt{2}$

корни: $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$, расстояния:

$$\left.\begin{matrix} 1+\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-(-\sqrt{2}) \end{matrix}\right\} \to \text{макс.} - 2\sqrt{2},$$

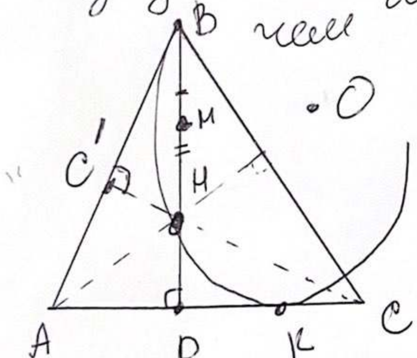
а в уравн. аркт.:

$r = 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2})$

Ответ: при $a = \sqrt{2}$,

$r = 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2})$

задача 7



чем меньше радиус $\leftarrow r$ окружности BHK, тем больше угол BKH, $\Rightarrow$ минимизируем радиус $\Rightarrow$ окр. BKM ~~BKH окр.~~ касается AC

$\Rightarrow$ ~~$B, BH = 2h$~~

центр окр. max. на сер. перп к BH, ~~BH~~ // сер. пер. // AC

пусть $BD = h$,

~~радиус~~ ~~радиус~~ $r = BD + \frac{CH}{2}$

Дано: H-ортоцентр

$AD = 2$, $DC = 3$

$DK - ?$

окр-ть кас. AC $\Rightarrow$ раст. между сер пер к BM и AC,

M-сер. BM

MD – радиус ~~$MD = MD + \frac{1}{2}BM =$~~

~~$MD = h - 2h$~~

$MD = MH + HD = \frac{BD - HD}{2} + HD = \frac{BD + HD}{2} =$

~~$= \frac{h + 2h}{2}$~~

задача 7 чистовик

$\triangle OBM$: OB, OM – радиусы

~~$OM = \frac{h-2h}{2}$~~ $\cancel{\Rightarrow OM = \sqrt{\left(\frac{h+2h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h-2h}{2}\right)^2} =}$ ~~по th. Пифагора~~

~~OM – сер. перп. $\Rightarrow$~~

$\cancel{\Rightarrow OM = \sqrt{\left(\frac{h+\frac{6}{h}}{2}\right)^2 - \left(\frac{h-\frac{6}{h}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{22}}$

$\cancel{OM = DK = \frac{1}{2}h\cdot\sqrt{22}}$

$\triangle CMD \sim \triangle BDA \Rightarrow \frac{MD}{3} = \frac{2}{h} \Rightarrow MD = \frac{6}{h}$

$$MD = \frac{BD+MD}{2} = \frac{h+\frac{6}{h}}{2}$$

$$BM = \frac{BD-MD}{2} = \frac{h-\frac{6}{h}}{2}$$

$\boxed{OM = DK}$

$$OM = \sqrt{MD^2 + BM^2} = \sqrt{\left(\frac{h+\frac{6}{h}}{2}\right)^2 - \left(\frac{h-\frac{6}{h}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(h+\frac{6}{h}\right)^2 - \left(h-\frac{6}{h}\right)^2} \cancel{= \frac{1}{2}\sqrt{\left(h+\frac{6}{h}+h-\frac{6}{h}\right)} x}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(h+\frac{6}{h}+h-\frac{6}{h}\right)\left(h+\frac{6}{h}-h+\frac{6}{h}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cancel{h}\cdot\frac{12}{\cancel{h}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6} = DK$$

$(\sqrt{6} < 3 \Rightarrow OK)$

Ответ: $\sqrt{6}$

12

Черновик

N1   N 2

$$\begin{array}{r} 69 \\ +23 \\ \hline 92 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19 \\ \times 5 \\ \hline 95 \end{array}$$

2022

AZ

19 / 23

23	19
46	~~38~~
69	57
92	76
	95

~~238~~

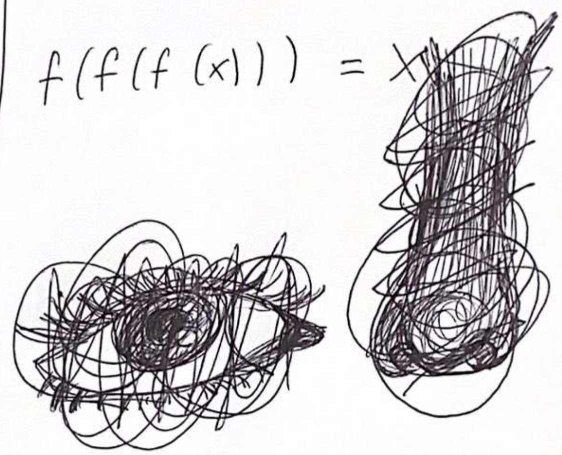
469 57695769

9238☒

$$\begin{array}{r|l} 2020 & 4 \\ \cline{2-2} -20 & 505 \\ \hline 20 & \\ -20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

N3   1303 ⇒ 1

$f(f(f(x))) = x$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{\frac{-x^5}{1-x^5}}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1-x^5}{-x^5}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5-1+x^5}{-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

черновик

$$№1 \quad \frac{2K+1}{(K\cdot(K+1))^2} = \frac{1}{K^2} - \frac{1}{(K+1)^2}$$

$$A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \dots - \frac{1}{45^2} = 1 - \frac{1}{45^2}$$

$$Б \quad \sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$t' = 2t^2 - 100 = 0$$

1 $\quad t^2 = 50 \quad t'' = 4t$

$min \Rightarrow 5\sqrt{2}$

$a = t^3 - 100t \quad t = \pm\sqrt{50}$

$b = 2^t - 16 \quad t = \pm 5\sqrt{2}$

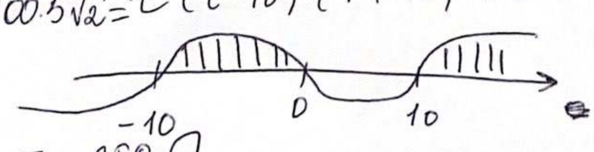
$c = \sin t - \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} t \in (-10;0) \cup (10;+\infty) \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t^3 - 100t > 2^t - 16 \\ t^3 - 100t < \sin t - \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} t^3 - 100t < 2^t - 16 \\ t^3 - 100t > \sin t - \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

если a - ср. $\quad t^3 - 100t > 0$

$\max(\sin t - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \quad t(t^2 - 100) > 0$

$\min(t^3 - 100t) = (5\sqrt{2})^3 - 100\cdot 5\sqrt{2} = t(t-10)(t+10) > 0$



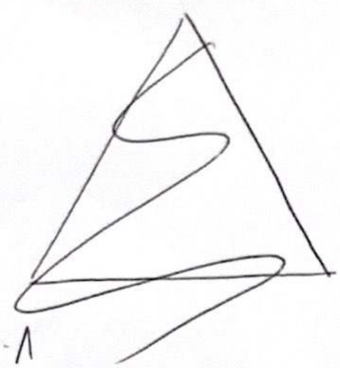
$= 125\cdot 2\cdot\sqrt{2} - 500\sqrt{2} = -250\sqrt{2}$

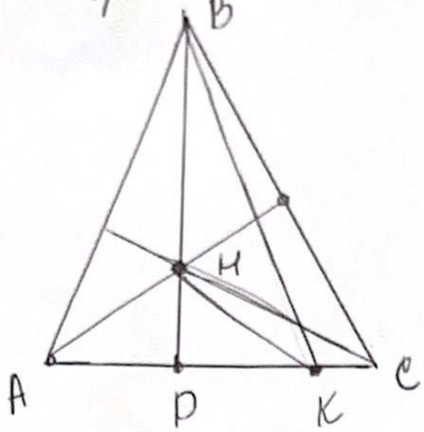
2 должно быть > 0

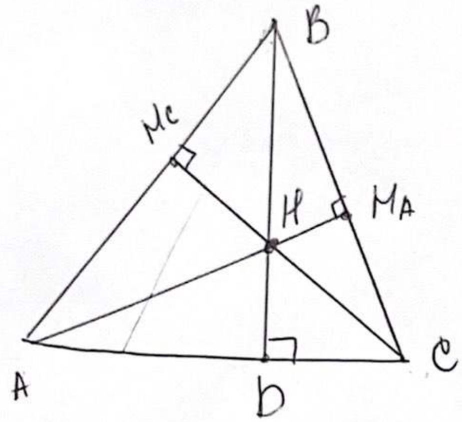
2

черновик

N 7





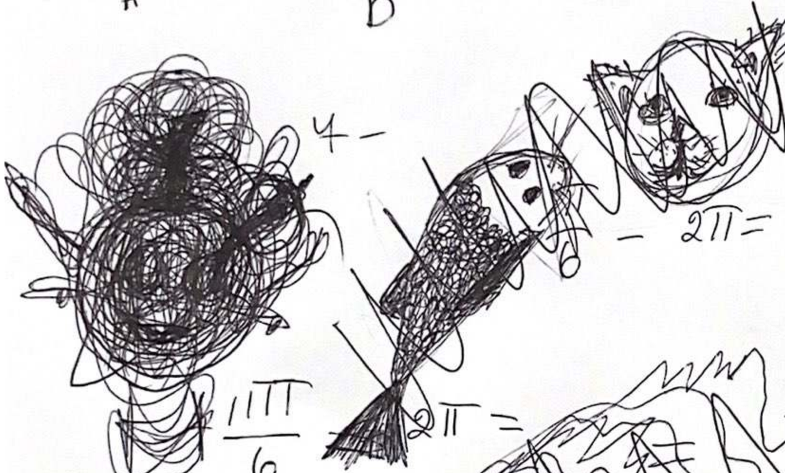


DK - ?

AD = 2

DC = 3

$\angle BKH \to max$



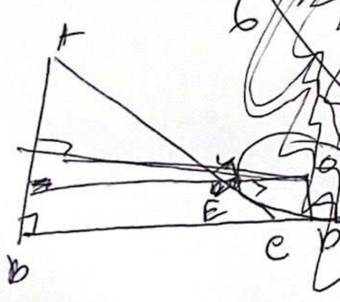
4 -

$-2\pi = \frac{\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} =$

$\frac{11\pi}{6} - 2\pi =$

$-\frac{11\pi}{6}$ $\sqrt{6}$ V 3

$= -\frac{23\pi}{6}$



$\frac{5\pi}{6} - 2\pi =$

$\frac{5\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} =$

$= -\frac{7}{6}\pi$

3

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников „Ломоносов"
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А. Садовничему от ученицы 11-го М класса ГБПОУ „Лицея Воробьевы горы" по адресу: г. Москва ул. Донская 37
Анастасии Александровны Осиповой

апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (80) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что мои единственные расхождения в решениях в задаче 2, где половина решения верна, не разобран лишь один случай (точнее он есть, но принят мной за неверный), и в задаче 4, в которой рисунок не соответствует моему решению (AB - это ось конуса, а не вторая его образующая, я случайно перепутала), а остальные задачи решены верно (решения совпадают с теми, что в ответах)

27 марта 2022 г.

Осип