



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Павлов Евгений Андреевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	15	0	10

Чистовик Лист №1 Страница 1

$$\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{\frac{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}{4}} = \sqrt[6]{\frac{16-12}{4}} = 1 = B$$

$$A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \frac{67}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{89}{44^2 \cdot 45^2} \quad (\equiv)$$

* n член такой суммы можно представить так:

$$\frac{2\alpha-1}{(\alpha-1)^2 \cdot \alpha^2} \quad \text{Представим его в виде суммы}$$

$$\frac{t}{(\alpha-1)^2} + \frac{p}{\alpha^2} = \frac{t\alpha^2 + p(\alpha-1)^2}{\alpha^2(\alpha-1)^2}$$

$$t\alpha^2 + p\alpha^2 - 2\alpha p + p = 2\alpha - 1$$

$$(t=1 \quad p=-1)$$

$$\begin{aligned} (\equiv) \quad & \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{43^2} - \frac{1}{44^2} + \frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2} = \\ & = 1 - \frac{1}{45^2} < 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

\Rightarrow Число $A <$ числа B

$$\boxed{\text{Ответ: } B > A}$$

Рассмотрим все двузначные числа

19	23
38	23
57	46
76	69
95	92

число начинается с 1. составим цепочку из чисел : или на 19, или на 23

19 5769 5769 5769 ...

Какая число разуклилось

$$2021 - 2 = 2019$$

$$\begin{array}{r} 2019 \overline{) 4} \\ \underline{20} 504 \\ 19 \\ \underline{16} \\ 3 \end{array}$$

остаток 3 \Rightarrow последний ^{цифрой} ~~числом~~ будет 6

Ответ: 6

Чистовик Лист №2 Страница 1

N3

$$f(2022) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-2022^9}}$$

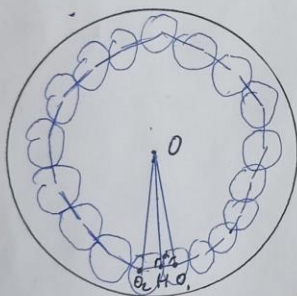
$$f(f(2022)) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1-2022^9}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{-2022^9}{1-2022^9}}}$$

$$f(f(f(2022))) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{1-2022^9}{2022^9}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{1}{2022^9}}} = 2022$$

\Rightarrow Каждое 3-е применение f приводит к 2022

\Rightarrow т.к. $1305 : 3 \Rightarrow$ Ответ: 2022

N4



Рассмотрим проекцию на основание конуса.

Соединим центры сфер. \Rightarrow

\Rightarrow Получим правильный 19-ти угольник со стороной ϕ .

Найдём радиусы окружности около него.

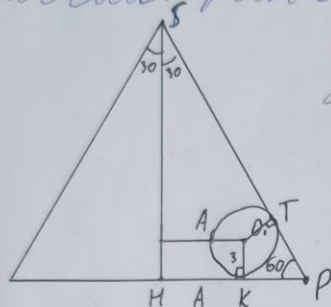
Найдём угол α этого многоугольника $\frac{180 \cdot (19-2)}{19} = \frac{180 \cdot 17}{19}$

$$OO_1 H = r = \frac{1}{2} \cdot \frac{180 \cdot 17}{19} = \frac{90 \cdot 17}{19}$$

$$\cos \alpha = \frac{HO_1}{OO_1} \Rightarrow OO_1 = \frac{HO_1}{\cos \alpha} = \frac{3}{\cos\left(\frac{1530}{19}\right)} = A$$

Чистовик Лист № 2 СТРАНИЦА 2
ИЧ (продолжение)

Рассмотрим осевое сечение,



$$O_1T = O_1K = r = 3$$

$\angle HSP$ по условию равен $30^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle TPK = 60^\circ \Rightarrow \angle O_1PK = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_1P = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KP = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R \text{ основания конуса} = AK + 3\sqrt{3} =$$

$$= \frac{3}{\cos\left(\frac{1530}{19}\right)} + 3\sqrt{3}$$

Конус заданный т.к. ~~из~~ угол в осевом сечении = $\varphi = \text{const}$ и в основании окружность.

$$\text{Ответ: } \frac{3}{\cos\left(\frac{1530}{19}\right)} + 3\sqrt{3}$$

Чистовик лист №3 страница 1

N5

Получим примерный вид графиков
функций $F(t) = t^3 - 12t$

$$g(t) = 2^t - 32$$

$$h(t) = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F(t) = 0 \quad t^3 - 12t = 0$$

$$t = 0 \quad t^2 - 12 = 0$$

$$t = \pm 11$$

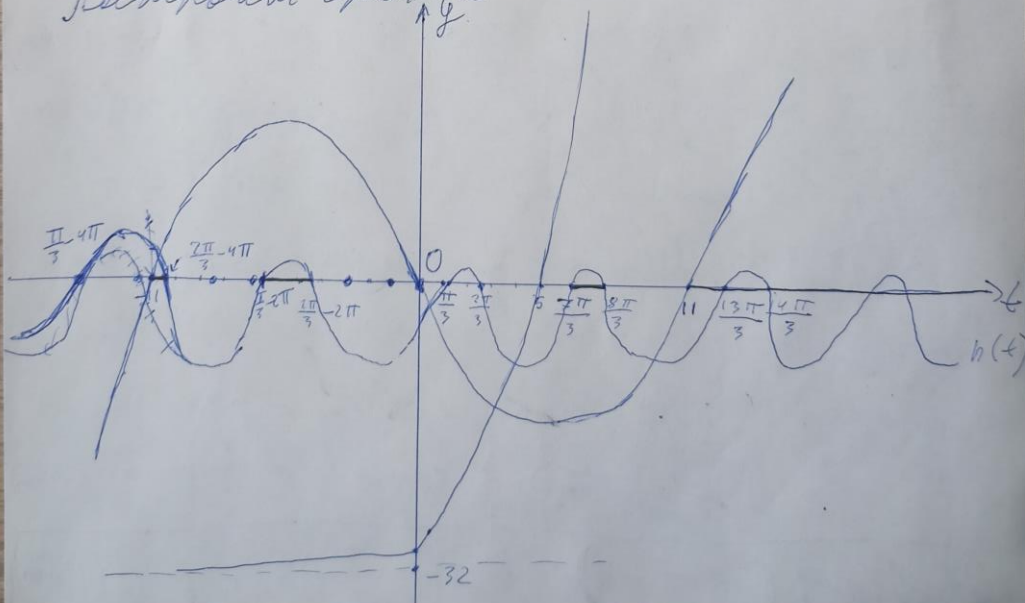
$$g(t) = 0 \quad 2^t - 32 = 0$$

$$t = 5$$

$$h(t) = 0 \quad \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

Получим график



Задача 1. Проверить, Чистовик лист 3 стр 2

1) $(-\infty; -11]$ $F(x)$ - средняя, ≥ 0

2) $[\frac{\pi}{3} - 2\pi; -11]$ все функции ≤ 0

3)

Задача 2. Проверить, Чистовик лист 3 стр 2

$(-\infty; -11]$ $F(x)$ - средняя, ≤ 0 (невозможно)

$[-11; \frac{2\pi}{3} - 2\pi]$ $F(x), h(x) \geq 0, g(x) \leq 0 \Rightarrow$

\Rightarrow средняя ≥ 0 (возможно)

$[\frac{2\pi}{3} - 4\pi; \frac{\pi}{3} - 2\pi]$ $h(x)$ - средняя, ≤ 0 (невозможно)

$[\frac{\pi}{3} - 2\pi; \frac{2\pi}{3} - 2\pi]$ $h(x)$ - средняя, ≥ 0 (возможно)

$[\frac{2\pi}{3} - 2\pi; 0]$ $h(x)$ - средняя, ≤ 0 (невозможно)

$[0; \frac{\pi}{3}]$ все функции ≤ 0 (невозможно)

$[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$ $F(x), g(x) \leq 0 \Rightarrow$ средняя ≤ 0 (невозможно)

$[\frac{2\pi}{3}; 5]$ все функции ≤ 0 (невозможно)

$[5; \frac{7\pi}{3}]$ $F(x), h(x) \leq 0 \Rightarrow$ средняя ≤ 0 (невозможно)

$[\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}]$ $h(x)$ - средняя $\geq 0 \Rightarrow$ (возможно)

$[\frac{8\pi}{3}; 11]$ $F(x), h(x) \leq 0 \Rightarrow$ средняя ≤ 0 (невозможно)

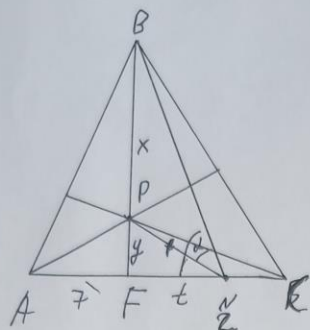
$[11; +\infty]$ $F(x), g(x) \geq 0 \Rightarrow$ средняя ≥ 0 (возможно)

Ответ: $(-\infty; -11]; (\frac{\pi}{3} - 2\pi; \frac{2\pi}{3} - 2\pi); (\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}); [11; +\infty)$

$$\angle BAP = \angle BCP = \gamma + \beta - 90$$

Услови к

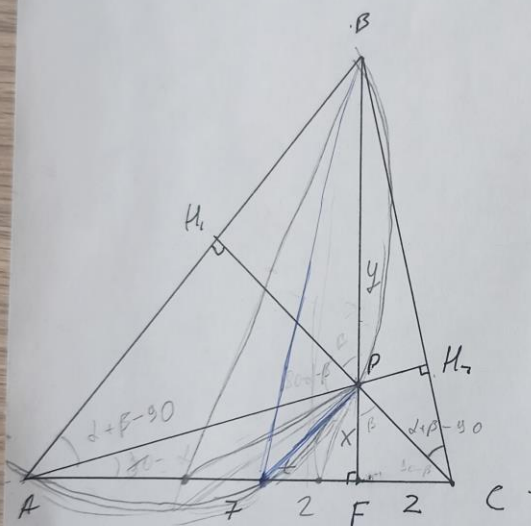
$$\text{Значит } FN = 2, FN = 7$$



Черновик.

$$\cos d = \frac{BN^2 + NP^2 - x^2}{2BN \cdot NP}$$

$$\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{t}\right) - \alpha \operatorname{tg}\left(\frac{y}{t}\right)$$



$$\ominus \frac{y}{t^2 + y} +$$

$$+ \frac{x}{t^2 + x} = 0$$

$$x > y$$

$$90 - \alpha < 90 - \beta$$

$$90 - 180 + \alpha + \beta =$$

$$f(t) = \alpha \operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{t}\right) - \alpha \operatorname{tg}\left(\frac{y}{t}\right)$$

$$f'(t) =$$

$$\alpha \operatorname{tg}' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{x}' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{t}\right)^2} \cdot \frac{y}{t^2} +$$

$$+ \frac{1}{1+\left(\frac{x}{t}\right)^2} \cdot \frac{x}{t^2} \ominus$$

Черновик

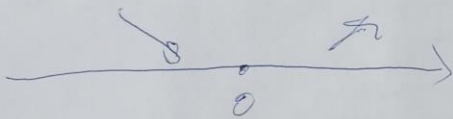
$$= 0$$

$$\frac{x}{t^2+x} - \frac{y}{t^2+y} = 0$$

$$x t^2 + \cancel{xy} - y t^2 - \cancel{xy} = 0$$

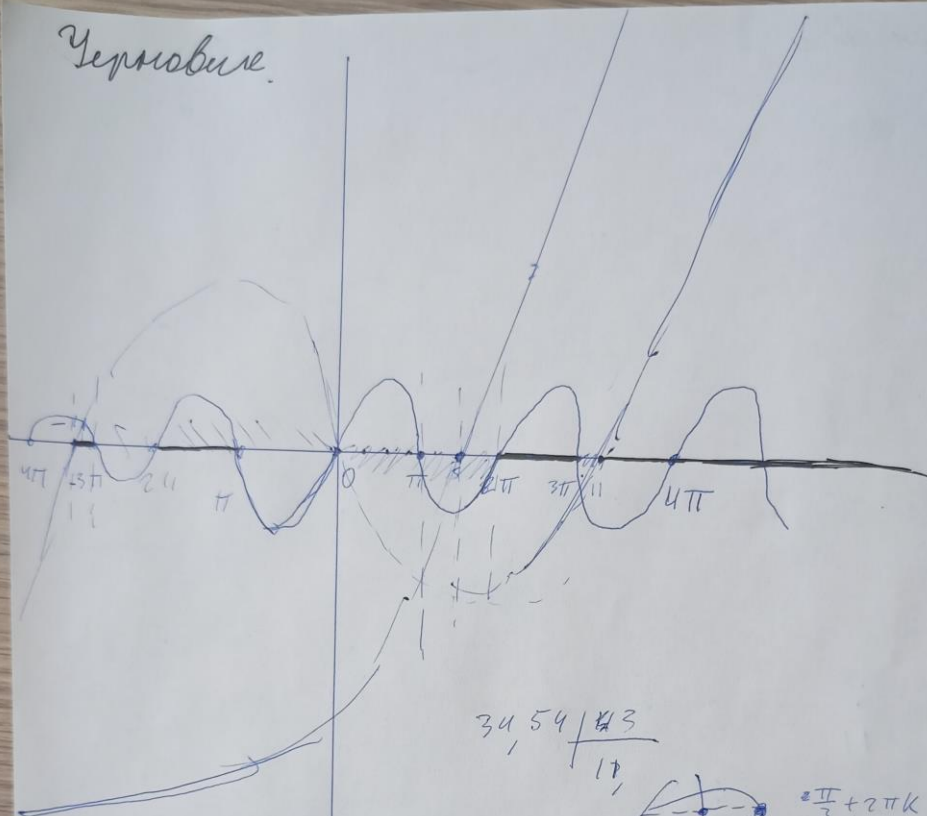
$$(x-y) t^2 = 0$$

$$t=0$$



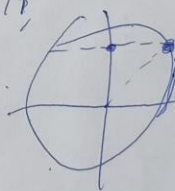
$$\cancel{\frac{xy}{t^2+x}} \quad \frac{(x-y)t^2}{(t^2+x)(t^2+y)}$$

Черновик.



$$\begin{array}{r} 3454 \overline{) 113} \\ 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,14 \\ \times 11 \\ \hline 3,14 \\ 3,14 \\ \hline 3454 \end{array}$$



$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

$$2\pi = \frac{3,14 \times 2}{6,28}$$

$$\frac{\pi}{3} - 4\pi = \frac{13\pi}{3}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 3,14 \\ \hline 12,56 \end{array}$$

$$\frac{10\pi}{3} \quad \frac{3,14}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi + 6\pi}{2} = \frac{7\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi + 6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

reproducible.

$$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2^t - 32$$

$$\begin{array}{r} 2^2 = 4 \\ 3^2 = 9 \\ 4^2 = 16 \\ 5^2 = 25 \end{array}$$

$$F(t) = t^3 - 121t = 2^t - 32$$

t = 8

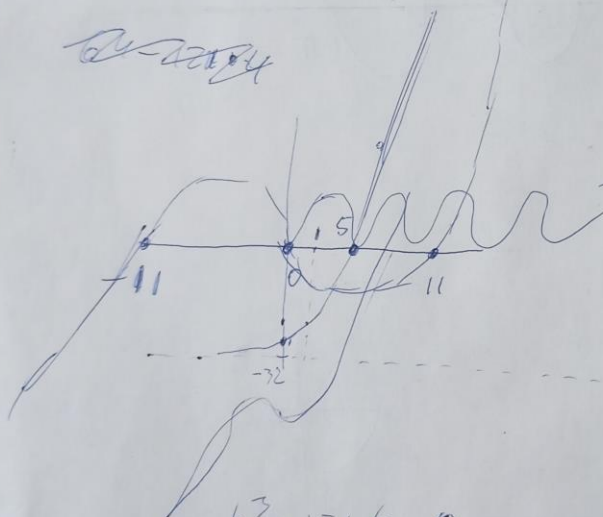
8/4

8
3
4

$$279 - 121 \cdot 3 = 279 - 363 = -84$$

$$60 - 221 \cdot 4 = 60 - 884 = -824$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 4 \times 16 \\ \hline 64 \end{array}$$



$$F'(t) = 3t^2 - 121 = 0$$

$$t^2 = \frac{121}{3}$$

$$t = \pm \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$t^3 - 121t = 0$$

$$t = 0$$

$$t^2 - 121 = 0$$

$$t = \pm 11$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-2022^9}} \quad \text{черновик}$$

$$F(F(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1-2022^9}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1-2022^9+1}{1-2022^9}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{-2022^9}{1-2022^9}}}$$

$$F(F(F(2022))) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{1-2022^9}{2022^9}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2022^9 + 1 - 2022^9}{2022^9}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2022^9}}} = \frac{1}{\frac{1}{2022}} = 2022 = x$$

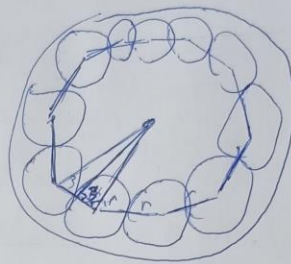
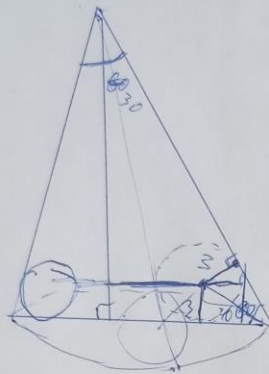
$$F(F(F(2022))) = 2022$$

$$f(f(f(f(f(f(x)))))) = f(f(f(x))) = x$$

$$1305 : 3 = 2022$$

Черновик

№ 4



Правильный
#13-ти угольник
со стороной 6

4



$$(n-2) \cdot 180 =$$

$$= \frac{17 \cdot 180}{19 \cdot 2} = 2 \quad \frac{17 \cdot 90}{19} = \frac{17 \cdot 90}{19}$$

$$\cos \alpha =$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 17 \\ \times 90 \\ \hline 1530 \end{array}$$

Черновик

2021 - планов

$$19 \cdot 1 = 190$$

$$\cdot 2 = 38$$

$$\cdot 3 = 57$$

$$\cdot 4 = 76$$

$$\cdot 5 = 95$$

$$23 \cdot 1 = (23) \cdot 1$$

$$\cdot 2 = 46$$

$$\cdot 3 = 69$$

$$\cdot 4 = 92 \cdot x$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 19 \\ \times 3 \\ \hline 57 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 19 \\ \times 4 \\ \hline 76 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 19 \\ \times 5 \\ \hline 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 23 \\ \times 4 \\ \hline 92 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 23 \\ \times 5 \\ \hline 115 \end{array}$$

19238

19576957695769

$$\begin{array}{r} 2021 - 2 = 2019 \mid 4 \\ \underline{20} \\ 19 \mid 504 \\ \underline{16} \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 504 \\ \times 4 \\ \hline 2016 \end{array}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^9}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-2022^9}}}}}$$

$$\frac{1-\frac{1}{1-2022^9}-1}{1-2022^9} = \frac{1-\frac{1}{1-2022^9}}{2022^9}$$

$$1 - \frac{2022^9}{1-2022^9} = \frac{1-2022^9-2022^9}{1-}$$

Черновик

$$\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(4-2\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{16-12}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{\frac{4}{4}} = 1$$

$$\frac{3}{1 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} +$$

$$\frac{A}{1} + \frac{B}{2^2} = \frac{2A+B}{1 \cdot 2^2}$$

$$4A+B=3$$

$$\frac{2a-1}{(a-1)^2 a^2} =$$

$$\frac{2}{a(a-1)^2} - \frac{1}{a^2(a-1)^2} +$$

$$+ \frac{2}{(a+1)a^2} - \frac{1}{(a+1)^2(a-1)^2}$$

$$\frac{1}{(a-1)^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} - A=1 \quad B=-1$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(4)^2} - \frac{1}{45^2}$$

$$\frac{A}{(a-1)^2} + \frac{B}{a^2} = \frac{Aa^2+B(a-1)^2}{(a-1)^2 a^2}$$

$$Aa^2+B(a-1)^2=2a-1$$

$$A = \frac{2}{a} \quad B = -\frac{1}{(a-1)^2}$$

$$Aa^2 + Ba^2 - 2Ba + B = 2a-1$$

$$(A+B)a^2 - 2Ba + B = 2a-1$$