МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Панов Андрей Вячеславович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

**Результаты проверки:**

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 0 |

* Чистовик 1

№1

$$B = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[2]{4-2\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3}+1)}{2}} \quad ; \quad 2 = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) \; ;$$

$$\Leftrightarrow \quad B = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[2]{4-2\sqrt{3}}}{(\sqrt{3}-1)}} \quad ; \quad \sqrt[2]{4-2\sqrt{3}} \vee \sqrt{3}-1 \; ! \quad 4-2\sqrt{3}>0$$

$16>12$

$\sqrt{3}>1$

$4-2\sqrt{3} \vee 3-2\sqrt{3}+1$

Значит $B = \sqrt[3]{1}$

~~Заметим~~ Пусть $A$ это $a_2 + \ldots + a_{50}$ где

$$a_i = \frac{2i-1}{(i(i-1))^2}$$

Докажем что ~~д~~сумма $a_2 + \ldots + a_i = 1 - \frac{1}{i^2}$ по индукции

База: $a_2 = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$

Предположение: верно для $i=k$

Переход: $k \to k+1$

Сумма $a_2 + \ldots + a_k = 1 - \frac{1}{k^2}$

Сумма $a_2 + \ldots + a_{k+1} = 1 - \frac{1}{k^2} + \frac{2(k+1)-1}{k^2 \cdot (k+1)^2} = 1 - \frac{(k+1)^2 - 2k - 1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(k+1)^2}$

ч.т.д.

Значит $A = 1 - \frac{1}{50^2}$ тогда $A < 1$, $B = 1 \Rightarrow A < B$

Ответ: $\underline{A < B}$

Чистовик 2

№2. Все двухзначные делящиеся на 19 : 19, 38, 57, 76, 95

Все двухзначные делящиеся на 23: 23, 46, 69, 92

Если число начинается с 9, то вторая цифра 5 или 2.

~~1) Втора~~ т.к первая со второй образуют двухзнач $\vdots 19$ или $\vdots 23$

1) если начало $\overline{95}$, то после 5 идёт 7 (только одно двухзнач $\vdots 19$ или $\vdots 23$ начинается на 5)

$\overline{957}$ далее 6, снова только 76 $\vdots 19$ или $\vdots 23$ из [70; 79]

$\overline{9576}$ далее 9 получился цикл, только 69 $\vdots 23$ или $\vdots 19$ из [60; 69]

2) если начало $\overline{92}$, то далее 3, потом 8 (аналогично п.1) среди чисел [80; 89] нет такого что оно делится на 19 или 23

3) Число не может начинаться на $\overline{9238}$ потому что в нём будет 4 знака, значит оно начинается на $\overline{9576}$ т.к после 6 снова идёт 9 (п.1) а длина суффикса 2018 > 4, то далее снова не идёт $\overline{9238}$... т.к ~~2022 $\vdots$ 4~~ $= 2022 \equiv_4 2$ то первые 2020 позиций могут быть разделены только на равные блоки 9576, 9576, 9576... (2020 $\vdots$ 4) иначе число закончится на блоке $\overline{9238}$ (после 8 ничего не написать). На 2021 и 2022 позиции может стоять 92 или 95 т.к ничего после дописывать не нужно (на 2021 всегда 9 т.к после 6 только 9)

Ответ: 2 или 5

№5 Чистовик 3

Если среди $a, b, c$ есть хотя бы два положительных, то среднее будет положительно

Если среди $a, b, c$ есть не более одного положительного, то среднее — неотрицательное.

1) $t^3 - 100t > 0$

$t(t-10)(t+10) > 0$

− + − +

−10 0 10 $t$

2) $2^t - 16 > 0$

$t > 4$

− +

4 $t$

3) $\sin t - \frac{1}{2} > 0$

$\cancel{t \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) + 2}$

$t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

4) а) Если $t > 10$ то $a > 0$ и $b > 0$ значит среднее $> 0$

б) Если $0 \le t \le 4$ то $a \le 0$ и $b \le 0$ значит среднее $\le 0$

в) Если $t \le -10$ то $a \le 0$ и $b < 0$ значит среднее $\le 0$

г) На $t \in (4; 10]$ найдём случай $c > 0$ тогда $b > 0$ и $c > 0$

$\cancel{\frac{\pi}{6} + 2\pi}$ $\frac{5\pi}{6} < 4$, | $\frac{\pi}{6} + 2\pi > 4$, | $\frac{5\pi}{6} + 2\pi \overset{<}{\vee} 10$

$5\pi < 24$ | т.к $\pi > 3$ | $5\pi + 12\pi \overset{<}{\vee} 60$

т.к $\pi < 4$ | | $\pi \overset{<}{\vee} \frac{60}{17}$

$\pi < 3,5$

60 | 17
51 | 3,5
90
85
5...

| $\frac{\pi}{6} + 4\pi > 0$, т.к $4\pi > 12$ |

Значит на $t \in (4; 10]$ нам подходит только $t \in \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$

д) На $t \in (-10; 0)$ $\frac{\pi}{6} - 2\pi > -10$ | $\frac{5\pi}{6} - 2\pi < 0$

т.к $\pi < 4$ | $\pi > 0$

$\frac{5\pi}{6} - 4\pi \vee -10$ | $\cdot(-6)$

$19\pi \vee 60$

$\pi \vee \frac{60}{19}$

$\pi < 3,15$

тогда $\frac{5\pi}{6} - 4\pi > -10$

$\cancel{\frac{60}{19} = 3}$

60 | 19
57 | 3,15..
30
19
110
95
15

(продолжение на другом листе)

Чистовик 4

№5 Значит на $t \in (-10; 0)$ нам подходят только

$t \in (-10; -\frac{19}{6}\pi) \cup (-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6})$

В ответе объединим промежутки где среди a,b,c хотя бы 2 >0

Ответ: $(-10; -\frac{19}{6}\pi) \cup (-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}) \cup (\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}) \cup (10; +\infty)$

№3 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}} = (1-x^9)^{-\frac{1}{9}}$

$f(f(x)) = \left(1 - \left((1-x^9)^{-\frac{1}{9}}\right)^9\right)^{-\frac{1}{9}} = \left(1-(1-x^9)^{-1}\right)^{-\frac{1}{9}} = \left(\frac{1-x^9-1}{1-x^9}\right)^{-\frac{1}{9}} = \left(\frac{x^9}{x^9-1}\right)^{-\frac{1}{9}}$

$f(f(f(x))) = \left(1 - \left(\left(\frac{x^9}{x^9-1}\right)^{-\frac{1}{9}}\right)^9\right)^{-\frac{1}{9}} = \left(1 - \frac{x^9-1}{x^9}\right)^{-\frac{1}{9}} = \left(\frac{x^9-x^9+1}{x^9}\right)^{-\frac{1}{9}} = (x^9)^{\frac{1}{9}} = x$

Значит три раза применив ф-ю мы получим x;

$f(f(f(f(x)))) = f(x)$

1305 ⋮ 3 = 435 значит мы сделаем количество преобразований

кратное трём и по доказанному выше

каждое третье значение будет x,

$f(f \ldots f(x) \ldots) = x$ 2022, $x = 2022$

где f 1305 раз

Ответ: 2022.

Чистовик 5

№4. ~~1~~ Рассмотрим осевое сечение конуса

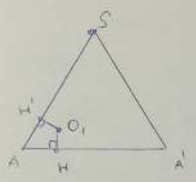


рис 1

~~Δ~~ $AS = A'S$, $\angle ASA' = 60^\circ$, значит $\triangle ASA'$ - правильный

$\angle SAA' = 60^\circ$

Рассмотрим такое осевое сечение, чтобы в нём лежал центр одного из шаров $(O_1)$:

1) т.к такой шар касается основания и боковой поверхности, то $O_1H = O_1H' = R$ где $O_1H \perp AA'$ и $O_1H' \perp SA$

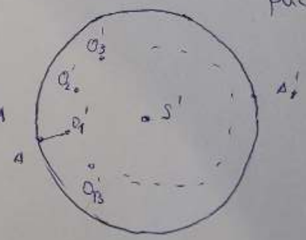
2) Четырёхугольник $AH'O_1H$ такой что $\angle SAA' = 60^\circ$, $\angle AH'O_1 = \angle AHO_1 = 90^\circ$, тогда $\angle H'O_1H = 120^\circ$

3) По т. косинусов в $\triangle O_1H'H$ $H_1H = \sqrt{R^2 + R^2 - R \cdot R \cdot 2\cos 120^\circ}$, $R = 2$, поэтому $H_1H = \sqrt{4 + 4 - 2 \cdot 2 (-\frac{1}{2}) \cdot 2} = 2\sqrt{3}$

4) $AH' = AH$ как отрезки касательных, проведённые из одной точки поэтому, т.к $\angle SAA' = 60^\circ$, то $\triangle H'AH$ - правильный значит $AH = HH' = 2\sqrt{3}$

Рассмотрим вид сверху:

рис 2




1) Радиус основания $S'A = SO_1' + O_1'A$ (A и A' точки из первого рисунка, $O_1'$ - проекция центра рассматриваемого шара на основание; $O_2', \dots O_{13}'$ - центры остальных 12-ти шаров.

2) $O_1'A = HA$ т.к H (рис 1) проекция $O_1$ на $AA'$.

3) ~~...~~ 13 шаров попарно касаясь образуют выпуклую фигуру, каждая сторона которой $2+2=4$

продолжение на след листе.

Чистовик: 6

н4 Значит $O_1' \dots O_{13}'$ - правильный 13-ти угольник

4) $S'$ - центр ~~вписанной~~ описанной окружности т.к удалён от всех вершин на $R_{осн} - 2\sqrt{3}$

5) ~~$SO$~~ $\angle O_1'SO_2' = \frac{360^\circ}{13} = \alpha$ т.к это величина дуги $\smile O_1'O_2'$

6) Пусть $S'O_1' = x$, тогда по теореме косинусов для $\triangle O_1'SO_2'$

$$O_1'O_2'^2 = S'O_1'^2 + S'O_2'^2 - 2S'O_1' \cdot S'O_2' \cdot \cos\alpha$$

$$4^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \cos\frac{360^\circ}{13};$$

$$8 = x^2\left(1 - \cos\frac{360^\circ}{13}\right); \quad 0^\circ < \frac{360^\circ}{13} < 30^\circ \Rightarrow \text{x определён.}$$

$$x = \sqrt[2]{\frac{8}{1 - \cos\left(\frac{360^\circ}{13}\right)}};$$

Таким образом $R_{осн} = S'O_1' + O_1'A = \sqrt[2]{\frac{8}{1-\cos\left(\frac{360^\circ}{13}\right)}} + 2\sqrt{3}$

Ответ: $R_{осн} = \sqrt[2]{\frac{8}{1 - \cos\left(\frac{360^\circ}{13}\right)}} + 2\sqrt{3}$

Чистовик 7

№6.

1) При $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ $tg\,x$ принимает все значения $\in (-\infty; +\infty)$

2) $x = \frac{\pi}{4}$, $tg\,x = 1$ – всегда корень

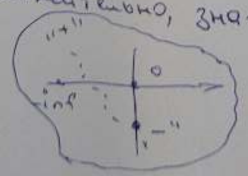
$$\underline{a+1} + \underline{\underline{1}} - \underline{a} - \underset{\sim}{2a^2} + \underset{\sim}{2a^2} - \underline{2a} - \underline{\underline{1}} + \underline{2a} = 0$$

$$0 = 0$$

3) При всех $a > 0$ в точке $x = 0$ уравнение положительно ($2a > 0$) а при значении $tg\,x \to -\infty$ из графика „куба" со старшим к-том больше $0$


значение уравнения будет отрицательно, значит будет корень на отрезке $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ из соображений монотонности.

4) При всех $a < 0$ в точке $x = 0$ уравнение отрицательно $2a < 0$, а при $tg\,x \to -\infty$ из графика куб. функции значение уравнения положительно, значит из соображений монотонности




у уравнения есть корень при $tg\,x \in (-\infty; 0)$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$,

5) Из п3 и п4 следует, что при $a \neq 0$ ~~есть~~ ~~всегда~~ есть корень на $(-\frac{\pi}{2}; 0)$, меньший нуля, и т.к $tg\,x = 1$ всегда корень, то расстояние между корнями больше чем $\frac{\pi}{4} - („-")$ $\frac{\pi}{4}$. Продолжение на другом листе

Чистовик. 8

б) При $a=0$

Уравнение имеет вид

$tg^2x - tg x = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg x = 1 \\ tg x = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \\ x = 0 \end{array}\right.$ два корня на нужном ~~отр~~ промежутке.

~~$\frac{\pi}{4}$ ...всё~~

2) Таким образом наименьшее расстояние между корнями хотя бы $\frac{\pi}{4}$ и достигается только при $a=0$.

Ответ: $a=0$, min значение $\frac{\pi}{4}$

Черновик 1

$2k^3+k^2-($ $\quad 1-\frac{1}{k^2}$ $\quad \frac{2(k+1)-1}{((k+1)k)^2}$

$\frac{2k+1}{(k+1)^2\cdot k^2} - \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{(k+1)^2}$

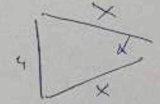
$2k^3+k^2-$ $\quad \frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2} = 2k+1)^2$

$\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$ $\quad (1-x^9)^{-\frac{1}{9}}$ $\quad \left(1-(1-x^9)^{-\frac{1}{9}\cdot 9}\right)^{-\frac{1}{9}}$

$\sqrt{4+4+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}$ $\quad \left(1-(1-x^9)^{-1}\right)^{-\frac{1}{9}} = \left(1-\frac{1}{1-x^9}\right)^{-\frac{1}{9}} = \left(\frac{1-x^9-1}{1-x^9}\right)^{-\frac{1}{9}}$

$\left(1-\left(\frac{x^9}{x^9-1}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{9}} = \left(1-\frac{x^9-1}{x^9}\right)^{-\frac{1}{9}} = \left(\frac{x^9-x^9+1}{x^9}\right)^{-\frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{x^9}\right)^{-\frac{1}{9}} = x$ $\quad \left(\frac{x^9}{x^9-1}\right)^{-\frac{1}{9}}$

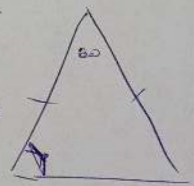
$1=4$

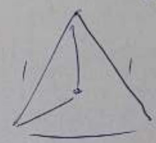


$16 = 2x^2 - 2x^2\cos\alpha$

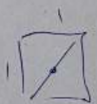
$8 = x^2(1-\cos\alpha)$

$x = \sqrt{\frac{8}{1-\cos\alpha}}$

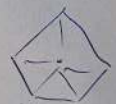




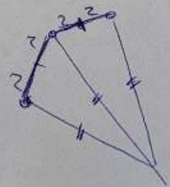
$R = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



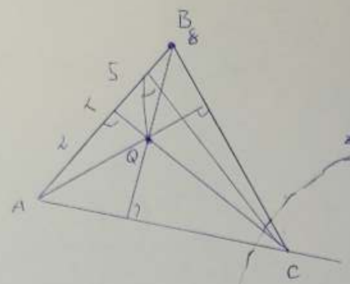
$R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

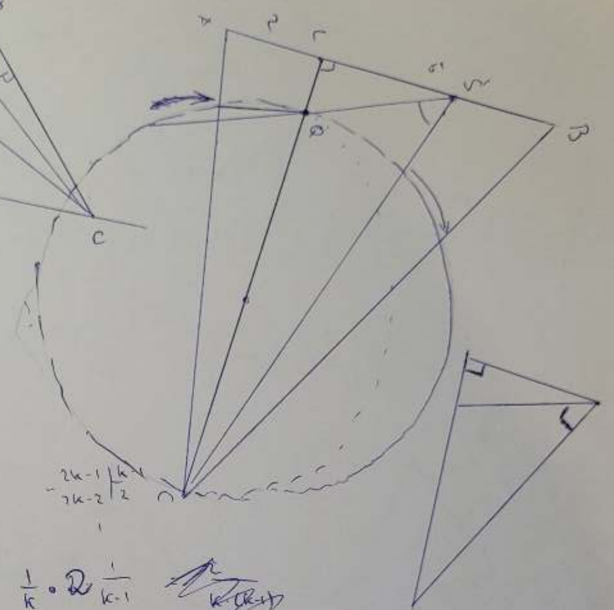


$R=1$



# Черновик 2





$$\sum_{k=2}^{k=50} \frac{2k-1}{(k\cdot(k-1))^2}$$

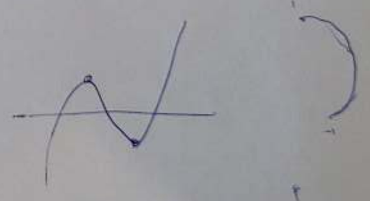
$\frac{1}{k}$ $\frac{1}{k-1}$

$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$a\,tg^3 x + (1-a-2a^2)\,tg^2 x + (2a^2-2a-1)\,tg\,x + 2a = 0$

$at^3 + (1-a-2a^2)t^2 + (2a^2-2a-1)t + 2a = 0$

$3at^2 - 2(1-a-2a^2)t + 2a^2 - 2a - 1 = 0$



$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400}$

$\frac{3}{2\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3} + \frac{7}{3\cdot 3\cdot 4\cdot 4}$

$\frac{3\cdot 36 + 5\cdot 4 + 7}{144} = \frac{108+20+7}{144} = \frac{135}{144}$

$\frac{27+5}{} \quad \frac{32}{36}$

$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{16}$

$1 - \frac{1}{k^2}$

$\frac{2k-1}{k(k+1)^2}$

$1 - \frac{1}{k^2} + \frac{2k+1}{((k+1)(k+2))^2}$

(!) $\frac{2k+1}{(k+1)^2\cdot(k+2)^2} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(k+1)^2}$

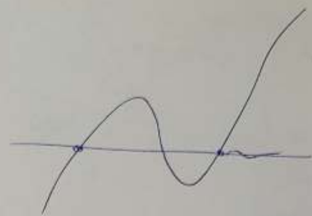
Черновик 3

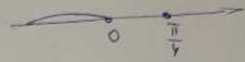
$a\,tg^3x + (1-a-2a^2)\,tg^2x + (2a^2-2a-1)\,tg\,x + 2a = 0$

$a=0 \quad tg^2x - tg\,x = 0$

$tg\,x = 0 \quad 0$

$tg\,x = 1 \quad \frac{\pi}{4}$





$t \in (-\infty; +\infty)$

$3at^2 + 2(\underbrace{1-a-2a^2}_{2(a+1)(\frac{1}{2}-a)})t + (2a^2-2a-1) = 0$

$3a + 2 - 2a - 4a^2 + 2a^2 - 2a - 1$

$-2a^2 - a + 1$

$(2-2a-4a^2)^2 - 12a(2a^2-2a-1)$

$16a^4 + 4a^2 + 4 + 16a^3 - 8a - 16a^2 - 24a^3 + 24a^2 + 12a$

$16a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 4a + 4 \geq 0$

$4a^4 \cancel{-2a^3} + 6a + 2$

$\dfrac{(4a^2+2a-2)^2 \pm \sqrt{16a^4-8a^3+12a^2+4a+4}}{6a}$

$D = 4a^4 - 2a^3 + 3a^2 + a + 1 = 0$

$(\cancel{t=0})$

$tg\,x = 1$ – корень

$a + 1 - a - 2a^2 + 2a^2 - 2a - 1 + 2a =$

$tg\,x = 1$ – самый

$4+8$

$\frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

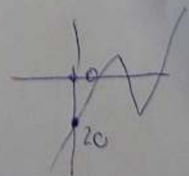
$-a + 1 - a - 2a^2 - 2a^2 + 2a + 1 + 2a$

$-4a^2 + 2a + 2$

$16a^4 + 16a^3 - 16a^2 + 4a^2 - 8a + 4$

(!) есть корень на $[-\infty; 0]$

$2a \quad a < 0$



Черновик 5

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$$

$$\frac{\sqrt[6]{4-\sqrt{12}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{a+b}{(ab)^2} \qquad \frac{2k+1}{2k(2k-1)} \qquad \frac{2k+1}{(k\cdot(k+1))^2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}+1)^2\sqrt{4-\sqrt{12}}}{2}}$$

$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$

19 38 57 76 95

23 46 65 92

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{4-\sqrt{12}}}{\sqrt{3}-1}}$$

$$\frac{\sqrt{4-\sqrt{12}}}{\sqrt{3}-1} \vee 1$$

2022

9238 :?

~~557~~ 95769

$x$

или 2 или 5

$\sqrt{4-\sqrt{12}} \vee \sqrt{3}-1$

$4-\sqrt{12} \vee 3+1-2\sqrt{3}$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} \quad 144 = 12\cdot 12,\ 36 = 4$$

$$k \quad \frac{2k}{\cancel{(k^2+1)}} = \frac{2k}{k^4 - \frac{k^2}{2} + \frac{1}{16}}$$

$(k^2 - \frac{1}{4})^2$

$$\frac{27+5}{36} = \frac{32}{36}$$

$$\frac{32\cdot 4+7}{144} = \frac{135}{144}$$

$$\frac{9}{400}$$

~~$9\cdot 144 + 135\cdot 400$~~

$$\frac{9\cdot 9 + 135\cdot 25}{3600}$$

$135 \cdot 25 = 675 + 270 = 3375$

$$\frac{2k}{(k^2-\frac{1}{4})^2} + \frac{2k+2}{}$$

$(k-\frac{1}{2})^2(k+\frac{1}{2})^2$

$$\frac{2k+1}{(k\cdot(k+1))^2} = \frac{2k+1}{(k^2+k)^2} = \frac{2k+1}{k^4+2k^3+k^2}$$

$k \in [1; 49]$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} +$$

$$\frac{a}{(bc)^2}$$

$$3\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2k}}{k^2-\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$$

$\frac{3}{12}$

$\frac{5}{12}$ $\frac{7}{36}$ $\frac{5}{36}$ $\frac{7}{144}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ ... $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{36}$

7.

# Черновик 4

$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

$\sqrt[5]{1 - \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}}$

$\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{\sqrt[5]{1-x^5}-1}{\sqrt[5]{1-x^5}}}}$

$\frac{\sqrt{1-x^5}}{\sqrt[5]{\sqrt[5]{1-x^5}-1}} = f(f)$

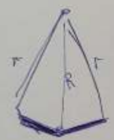
$1305 \,|\, 3$
$12 \quad 435$
$105$

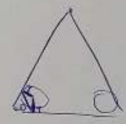
$f(f(f)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1 - \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{\sqrt[5]{\sqrt[5]{1-x^5}-1}}}}$

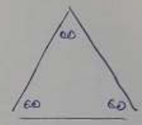
$\left(1-2020^5\right)^{-\frac{1}{5}}$

$\sqrt[5]{\frac{\sqrt[5]{\sqrt[5]{1-x^5}-1} - \sqrt[5]{1-x^5}}{\sqrt[5]{\sqrt[5]{1-x^5}-1}}}^{\,-1}$

$\frac{11 \cdot 180}{13}$ - один угол



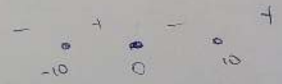





$\cos 120° = \frac{1}{2}$

$2\sqrt{4+4+2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4}$
$\shortparallel$
$2\sqrt{3}$

R - ? $\ 2\sqrt{3}$




$t^3 - 100t$

$2^t - 16$


$2^t - 16$

$\sin t - \frac{1}{2}$

$\sin t - \frac{1}{2}$

$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) + 2\pi k$


$\frac{\pi}{6} + 2\pi \vee 4$

$\frac{\pi}{6} + 4\pi$

$\frac{\pi}{6} - 2\pi$

$\frac{5\pi}{6} - 4\pi \vee 10$

$24\pi - 5 \vee 60$

$19\pi \vee 60$

$60 \,|\, 19$
$57 \quad 3,16$
$30$
$19$
$110$