МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Пашенцев Павел Владимирович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	10	15	15	15	0

№1 ЧИСТОВИК

Упростим выражение B:

$$\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt3}\,\sqrt[3]{\sqrt3+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(4-2\sqrt3)(\sqrt3+1)^2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(4-2\sqrt3)(3+2\sqrt3+1)}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(4-2\sqrt3)(4+2\sqrt3)}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[6]{(\cancel{16-12})}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{16-12}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=1$$

Рассмотрим выражение A:

$$A=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\ldots+\frac{87}{(43\cdot44)^2}+\frac{89}{(44\cdot45)^2}=\sum_{n=1}^{44}\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$$

Заметим, что сумма выражения A будет равна $\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$

Докажем это с помощью метода математической индукции.

Пусть $n=2$: $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}=\frac{8}{9}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$

$n=3$: $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}=\frac{15}{16}=\frac{(3+1)^2-1}{(3+1)^2}$

Предположим, что это выполнено и для $n=k$:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2k+1}{(k(k+1))^2}=\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}$$

Докажем, что это выполнено и для $n=k+1$:

$$\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}+\frac{2(k+1)+1}{((k+1)(k+2))^2}=\frac{k^2+2k+1-\cancel{1}}{(k+1)^2}+\frac{2k+2+1}{(k+1)^2(k+2)^2}=\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}+\frac{2k+3}{((k+1)(k+2))^2}=$$

$$=\frac{(k+2)^2(k^2+2k)+2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}=\frac{k^4+2k^3+8k^2+4k^2+8k+2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}=$$

$$=\frac{k^4+6k^3+12k^2+10k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}=\frac{\cancel{(k+1)}(k^3+5k^2+7k+3)}{\cancel{(k+1)^2}(k+2)^2}=\frac{k^2(k+1)+4k(k+1)+3(k+1)}{(k+1)(k+2)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{(k+1)}(k^2+4k+3)}{\cancel{(k+1)}(k+2)^2}=\frac{k^2+4k+3}{(k+2)^2}=\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2}=\frac{((k+1)+1)^2-1}{((k+1)+1)^2}$$

Таким образом, $A=\frac{2024}{2025}<1=B$

$B>A$

Ответ: B больше A

№2 ЧИСТОВИК (2)

1). Число начинается с цифры 1. $\underline{1}\ \underline{a_2}\ \underline{a_3}.\underline{a_4} \dots \underline{a_{2021}}$

2). Очевидно, двузначное $1a_1$ не может делиться на 23. Значит $a_1 = 9$

$\Rightarrow 19a_2$

3). $9a_3 \vdots 19$ или 23

19	23
38	46
57	69
76	$\boxed{92}$
95	

$\boxed{23}$

$192a_4$

$\Rightarrow a_4 = 3$

4). $\underline{1923}\ a_5 \Rightarrow a_5 = 6$

5). $\underline{8}\ \underline{a}$ нельзя не делится на 23, ни на 19 $\Rightarrow$ ТУПИК

$\Rightarrow a_3 = 5$ (к п.3)

4). $195a_4 \Rightarrow a_4 = 7$

5). $7a_5 \Rightarrow a_5 = 6$

6) $6a_6 \Rightarrow a_6 = 9$

7). $9a_7 \Rightarrow a_7 = 5$

8). Таким образом (определив, что после 9 нельзя ставить 2, это ведет в тупик), мы заполняем единственным возможным путем (других вариантов нет, так как мы ставили единственно возможные цифры, удовлетворяющие условию)

$\underbrace{1\,9576|9576|9576\ \dots\dots}_{2020}\ a_{2021}$

a_{2021} стоит на 2020 месте

$2020 \vdots 4 \Rightarrow a_{2021} = 6$

Ответ: 6

№3 чистовик ③

1). $f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} = (1-x^7)^{-\frac{1}{7}}$

2). $f(f(x)) = \left(1-\left[(1-x^7)^{-\frac{1}{7}}\right]^7\right)^{-\frac{1}{7}} = \left(1-\frac{1}{1-x^7}\right)^{-\frac{1}{7}} = \left(-\frac{x^7}{1-x^7}\right)^{-\frac{1}{7}}$

3). $f(f(f(x))) = \left(1-\left[\left(-\frac{x^7}{1-x^7}\right)^{-\frac{1}{7}}\right]^7\right)^{-\frac{1}{7}} = \left(1-\left(-\frac{x^7}{1-x^7}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{7}} = \left(1+\frac{1-x^7}{x^7}\right)^{-\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{x^7}\right)^{-\frac{1}{7}} = x$

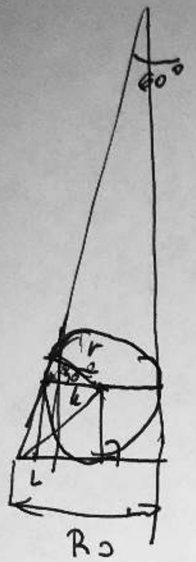
$\Rightarrow$ цикл с периодом 3 $\quad f(\underbrace{f(f(f(x)))}_{x}) = f(x)$

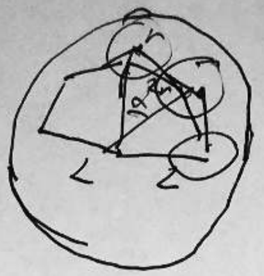
$1304 \equiv 1 \pmod 3$

$\Rightarrow f(f \ldots f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-2022^7}}$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[7]{1-2022^7}}$

№4





$\alpha = \frac{360}{13}$

Радиус основания конуса

$R_0 = L + k + 2$

L - радиус описанной окружности 13-угольника

$K = \frac{r}{\cos 30^\circ}$

$L = \frac{r}{tg 30^\circ}$

$L = \frac{2r}{2\sin\frac{180}{13}} = \frac{r}{\sin\frac{180^\circ}{13}}$

$R_0 = \frac{r}{\sin\frac{180^\circ}{13}} + \frac{r}{\cos 30^\circ} + \frac{r}{tg 30^\circ} = r\left(\frac{1}{\sin\frac{180^\circ}{13}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$

$= r\left(\frac{1}{\sin\frac{180^\circ}{13}} + \sqrt{3}\right) = 2\left(\frac{1}{\sin\frac{180^\circ}{13}} + \sqrt{3}\right)$

Ответ: $2\left(\frac{1}{\sin\frac{180^\circ}{13}} + \sqrt{3}\right)$

№5 чистовик (5)

$x_1 \le x_2 \le x_3$

Найти $t: x_2 > 0$

Решим задачу графически

Найдем основные точки:

$\sin t - 0{,}5 = 0$

$\sin t = 0{,}5$

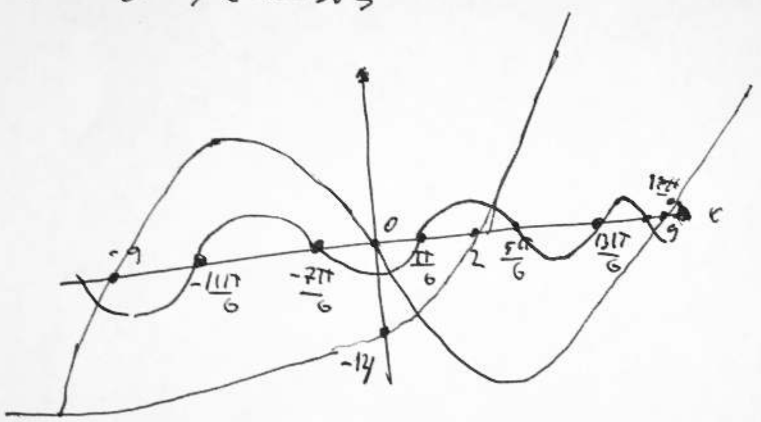
$\left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$

$11^t - 121 = 0$

$t = 2$

$t = 0 \cdot 11^0 - 121 - 121 = r$

$t^3 - 81t = 0$, $t = \pm 3\sqrt{3}$



Найдем на графике области, в которых одна из функций заключена между другими. Кроме того, учтем факт, что степенная ф-ция растет быстрее кубической ф-ции.

Таким образом, $t \in (-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}) \cup (2; \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}) \cup (9; +\infty)$

Ответ: $(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}) \cup (2; \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}) \cup (9; +\infty)$

№6 $t = \operatorname{tg} x$ чистовик ⑥

$at^3 + (1+a-2a^2)t^2 + (2a^2-2a-1)t + 2a \;\big|\; t-1$

$at^3 - at^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad at^2 + (1-2a^2)t - 2a$

$(1-2a^2)t^2 + (2a^2-2a-1)t$

$(1-2a^2)t^2 - 1(1-2a^2)t$

$-2at + 2a$

$-2at + 2a$

0

$(t-1)(at^2 + (1-2a^2)t - 2a) = 0$

$a \neq 0 \quad D = (1-2a^2)^2 + 4a^2 = (1+2a^2)^2$

$t_1 = 2a$

$t_2 = -\frac{1}{a}$

Итого при $a \neq 0$ корни $1, 2a, -\frac{1}{a}$, а при $a=0$ 0 и 1

1). $a=0$ $\quad 0 \quad 1$ $\quad$ расстояние $\underset{\text{длина } t}{1} \Rightarrow \frac{\pi}{4}$

2) $1 < a < 0$

$2a \quad 1 \quad -\frac{1}{a}$ $\qquad \min(1-2a, -\frac{1}{a}-1)$

3). $a < -1$

$-2a-2 \quad 0 \quad 1$

4). $0 < a < \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{a} \quad 1$

5). $\frac{1}{2} \leq a$

$-\frac{1}{a} \quad 0 \quad 1 \quad 2a$

во всех случаях в t расстояние > чем расстояние между 0 и 1 => в случае $a=0$

Ответ: $a=0$

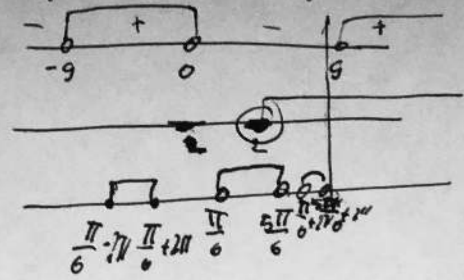
ЧЕРНОВИК

№5 Рассмотрим знаки каждого числа в зависимости от t (7)

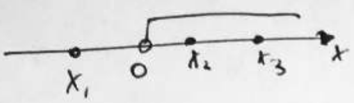
$a = t^3 - 81t$

$b = 11^t - 121$

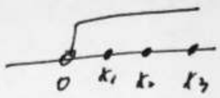
$c = \sin t - \frac{1}{2}$



Все расположения трех x_1, x_2, x_3, которые удовлетворяют условию



или



$$\begin{cases} x_1 \le 0 \\ x_2 > 0 \\ x_3 \geq x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 \geq x_1 \\ x_3 \geq x_2 \end{cases}$$

Получаем, что условию удовлетворяют такие t, которые имеют два и три пересечения с другими числами =>

=> Подходят промежутки $(\frac{\pi}{6}-2\pi; \frac{5\pi}{6}-2\pi) \cup (2; \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{6}+2\pi; \frac{5\pi}{6}+2\pi)$, где 2 "пересечения" и промежутки $(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k)$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $k \geq 2$, где 3 "пересечения", а также на $[9; +\infty)$, исключая промежутки, где 3 "пересечения"; получаем 2 "пересечения".

~~Ответ~~: На промежутках всегда можно найти такую пару, удовлетворяющая условию.

Ответ: $(\frac{\pi}{6}-2\pi; \frac{5\pi}{6}-2\pi) \cup (2; \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{6}+2\pi; \frac{5\pi}{6}+2\pi) \cup [9; +\infty)$

ЧЕРНОВИК

(8)

№1. $A=\sum A$ - числитель - арифметическая прогрессия

$A=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{\dots}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{36}+\frac{3(3)^2}{(1-2)^2(3^2)}$

$B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(1-\sqrt{3})^2}\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$ $(\sqrt{3}-1)$

$=\sqrt[3]{\frac{a-1}{2}}=1$

№2 Т.к. первая цифра - "1" и пара должна быть кратной 19 или 23 =>

19-начало

19 - 5 - 7 - 6 - 9 - продолжается; 2 - 3 - 8 всё

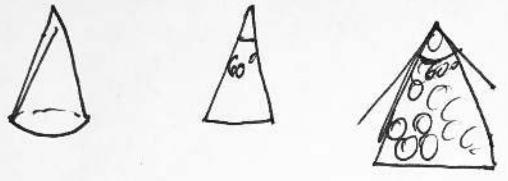
кратные 19: 19, 38, 57, 76, 95

кратные 23: 23, 46, 69, 92

$1\underbrace{95769}_{5\text{ цифр}}\ 95769\ \dots\ 95769$

$\frac{2021-1}{2020}$ (известно) $\vdots 5$ => последняя цифра - "9"

№4



№3 $f(2022)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^7}}$

$f(f(f(f(2)))) = f(f(f(\frac{1}{\sqrt{1-128}}))) = f(f(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{127}}}))$

$1+\frac{1}{127}=\frac{127+1}{127}=\frac{128}{127}$

$=f(\dots\frac{128}{127})\ f(\frac{1}{1-\frac{128}{127}})=f(\sqrt{\frac{127}{128}}\dots)$ $\frac{1-128}{127}$

$f(\sqrt{128})=\frac{1}{\sqrt{1-128}}$ - уже было

$\frac{128-127}{126}=\frac{1}{126}$ период 4

2022 кратное 4 разным

№5 $x_1\le x_2\le x_3$ => x_2 - среднее

найти все t, при которых среднее из a, b, c положительно

$a=t^3-81t$; $b=11^t-121$; $c=\sin t-\frac{1}{2}$

$a=t(t^2-81)$ ~~при~~ положительно

$b=11^t-121$, ~~при~~ положительно

$c=\sin t-\frac{1}{2}$, при $\frac{\pi}{6}+2\pi n<t<\frac{5\pi}{6}+2\pi n$

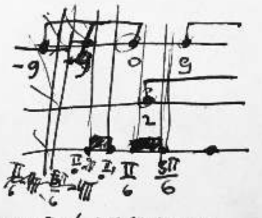
$\begin{cases}x_1\le 0\\ x_2>0\\ x_3>x_2\end{cases}$

или

$\begin{cases}x_1>0\\ x_2>x_1\\ x_3>x_2\end{cases}$

$a=x_1$ $b=x_2$ $c=x_3$

$\begin{cases}t(t^2-81)<0\\ 11^t-121>0\\ \sin t-\frac{1}{2}>\end{cases}$



$\frac{\pi}{6}\approx\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\frac{5\pi}{6}\approx\frac{5\cdot 3}{6}=2{,}5$

$(-\infty;-9)$ нет положительных

$(-9;\frac{\pi}{6}-2\pi)$ - одно положительное => не подходит

$(\frac{\pi}{6}-2\pi;\frac{5\pi}{6}-2\pi)$ - два положительных

$(\frac{5\pi}{6}-2\pi;\frac{\pi}{6})$ - нет положительных

$(\frac{\pi}{6};2)$ Среди двух положительных всегда можно найти подобрать пару, удовлетворяющую.

подходят промежутки, где 2 положительных

$(\frac{\pi}{6}-2\pi;\frac{5\pi}{6}-2\pi)$; $(2;\frac{5\pi}{6})$; $(\frac{5\pi}{6}-2\pi;\frac{5\pi}{6}+2\pi)$

3 положительных $(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k)$, $k\in\mathbb{N}$

$\frac{\pi}{6}-2\pi=\frac{1}{2}-6$; $\frac{5\pi}{6}-2\pi=2{,}5-6$; $\frac{\pi}{6}-4\pi=0{,}5-12$; $\frac{5\pi}{6}-4\pi=2{,}5-12$; $\frac{\pi}{6}+2\pi=0{,}5+6$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi=2{,}5+6$

№6 $a\,tg^3x+(1-a-2a^2)tg^2x+(2a^2-2a-1)tgx+2a=0$, $tg^3x=t$, $\rho(x_1;x_2)\to\min$

$at^3+(1-a-2a^2)t^2+(2a^2-2a-1)t+2a=0$

$t^2(at+1-a-2a^2)$

$t^2(at^2+2a^2-2a-1)+((1-a-2a^2)t^2+2a)=0$

$t(at^2+2a^2-2a-1)+(1-a\dots$

$t^2(at+1-a-2a^2)+(2a^2-2a-1)t+2a$

ЧЕРНОВИК

$a\,tg^3 x + (1-a-2a^2)\,tg^2 x + (2a^2-2a-1)\,tg x + 2a = 0 \qquad t = tg x$

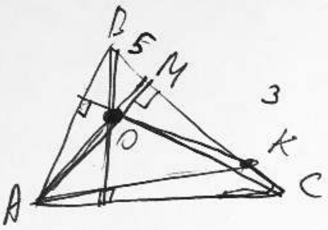
$at^3 + (1-a-2a^2)t^2 + (2a^2-2a-1)t + 2a = 0$

~~$a(t^3+2) + t((1-a-2a^2)t + (2a^2-2a-1)) = 0$~~

$t^2(at + 1 - a - 2a^2) + (2a^2-2a-1)t + 2a = 0$

$t(t(at+1-a-2a^2) + (2a^2-2a-1)) + 2a = 0$

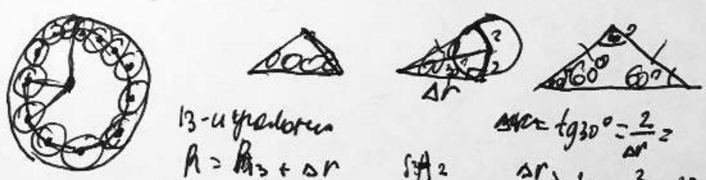
$=$



ny $\triangle AMC$ $\Rightarrow \uparrow \angle AKM = 90 - \angle MAK \downarrow$

~~Т. к. шары касаются нижней~~

Т.к. шары касаются плоскости основания



13-и угольник

$R = R_{13} + \Delta r$

$tg 30° = \frac{2}{\Delta r}$

$\Delta r = \frac{2}{tg 30°} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}$