МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Петров Александр Сергеевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	5	15	15	5

Черновик

$t(t^2-81)=t(t-9)(t+9)$ $\quad t\geq 9 \; +$

$-9<t<0 \; + \quad 1$

$11^t-121=11^2(11^{t-2}-1)$ при $t-2>0$ $+$ $t>2$ $+$.

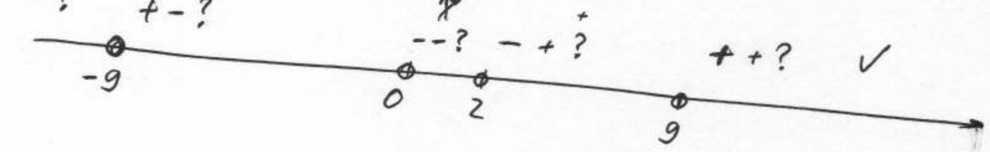
11^0 иначе $-$ $t\leq 2$ $-$ $\quad 2$

$\sin t-\frac{1}{2}=\sin t-\sin 30^\circ=2\sin\frac{t-30}{2}\cos\frac{t+30}{2}$

$\sin t\geq\frac{1}{2}\Rightarrow$ при $t\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$ $+$ $\quad 3$

иначе

$-$



$t>9$: $\cancel{t^3-81t}$

$11^t-121>11^2(11^2-1)>\sin t-\frac{1}{2}$

$\frac{4\pi+\pi}{6}=\frac{25\pi}{6}$

$\sin t-\frac{1}{2}<t^3-81t$

$9>\frac{5\pi}{6}+2\pi$

$9-\frac{25\pi}{6}$

$+\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$

$54>17\pi$ $\quad \frac{25\pi}{6}>12{,}5$ $\quad 1-a-2a^2 \quad 1;-\frac{1}{2}$

$(a+1)(2a-1)=2a^2+a-1$

$\frac{54}{17}>\pi$ $\quad (a+1)(1-2a)$

$12{,}5^3-81\cdot 12{,}5=12{,}5(3{,}5)(21{,}5)>\frac{1}{2}$

$54 \,|\, 17$; -51; 30; -17; 130; -119; 11; $3{,}17>\pi$

$t>9$ ✓

$0<t\leq 2$ $\quad$ --- $\quad$ --+

$2a^2-2a-1$

$-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{2\pm\sqrt{4+8}}{4}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{12}{16}}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ -++ $\quad$ +++

$a=0$

$tg^2x-tgx=0$

$tgx=0$

$tgx=1 \quad \frac{\pi}{4}$

$tg x=1$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi k\Rightarrow$

$tgx=y$ $\quad \Rightarrow \frac{\pi}{4}$ ✓

$ay^3+(a+1)(1-2a)y^2+(2a^2-2a-1)y+2a=0$ $\quad y=1$

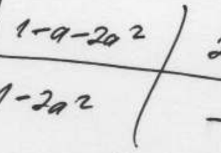
$\cancel{a}+\cancel{1}-\cancel{a}-\cancel{2a^2}+\cancel{2a^2}-\cancel{2a}-\cancel{1}+\cancel{2a}=0\Rightarrow y=1$ - корень $\quad y-1$

	a	$1-a-2a^2$	$2a^2-2a-1$	$2a$
1	a	$1-2a^2$	$-2a$	0

$y=1$

$tgx=2a$

$tgx=-\frac{1}{a}$



$a\neq 0$

$ay^2+(1-2a^2)y-2a=0$

$y_{1,2}=\frac{2a^2-1\pm\sqrt{(1-2a^2)^2+8a^2}}{2a}=$

$=\frac{2a^2-1}{2a}\pm\frac{\sqrt{(1+2a^2)^2}}{2a}=\frac{2a^2-1}{2a}\pm\frac{1+2a^2}{2a}=2a;-\frac{1}{a}$

черновик

$$\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)}\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt[3]{2}$$

$$4-2\sqrt{3}=1^2-2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{3}-1)^2 \qquad \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}=1$$

$$\frac{3}{4}<\frac{5}{36}<$$

$$\frac{-144}{\frac{9}{54}} \Big| \frac{9}{16}$$

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{2+\frac{1}{n}}{n(n+1)^2} \qquad n^4+2n^3+n^2 \quad 2n+1 \quad -\frac{1}{2}$$

	1	2	1	0	0
$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$n^4+2n^3+n^2=(n+\tfrac{1}{2})(n^3+\tfrac{3}{2}n^2+\tfrac{1}{4}n-\tfrac{1}{8})+\frac{1}{16}$$

$$\frac{a+b}{(ab)^2} \qquad \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \qquad \frac{3}{4} \qquad$$

неэкв.

$$\frac{1}{4}=\frac{9}{36} \quad \frac{5}{36}$$

неэкв.

$$\frac{1}{9}=\frac{16}{144} \quad \frac{7}{144}$$

неэкв.

$$\frac{9}{144}=\frac{1}{16}$$

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}=1-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}=\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$

$$\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{7\pi}{6} \qquad \frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11}{6}\pi$$

$$-\frac{7\pi}{6}-2\pi \quad -\frac{19\pi}{6} \quad -$$

$$1-\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2(k+1)+1}{((k+1)(k+2))^2}=1-\frac{1}{(k+2)^2}=\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$$

$$\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}+\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}=\frac{1}{(k+1)^2}\left(k(k+2)+\frac{2k+3}{(k+2)^2}\right)=\frac{1}{(k+1)^2}\left(\frac{k(k+2)^3+2k+3}{(k+2)^2}\right)=\frac{(k+1)^3(k+3)}{(k+1)^2(k+2)^2}=\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} \text{ ч.т.д.}$$

$$k^4+6k^3+12k^2+8k+2k+3=k^4+6k^3+12k^2+10k+3$$

$$\begin{array}{l|l} k^4+6k^3+12k^2+10k+3 & k^2+2k+1 \\ -\underline{k^4+2k^3+k^2} & k^2+4k+3 \\ \quad -4k^3+11k^2+10k & \\ \quad \underline{4k^3+8k^2+4k} & \\ \qquad -3k^2+6k+3 & \\ \qquad \underline{3k^2+6k+3} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$-1;-3$$

$$(k^2+2k+1)(k+1)(k+3)$$

$$-\frac{19\pi}{6}<-9 \qquad 19\pi>54 \qquad \pi>\frac{54}{19}$$

$$\begin{array}{r} 504 \\ \times\ 4 \\ \hline 2016 \end{array}$$

$$\frac{13\pi}{6}<9 \qquad \frac{17\pi}{6} \quad 9$$

$$13\pi<54 \qquad 17\pi \quad 54$$

$$\pi<\frac{54}{13}>4 \qquad \pi \quad \frac{54}{17}$$

$$1302=3\cdot434$$

$$1304=1302+2=3\cdot434+2$$

$$\underbrace{1957}_{4}\,6\,\underbrace{9576}_{4}\ldots 957695\,7\,6 \qquad 23(8)$$

2018

$$23;46;69;92$$

$$19;38;57;76;95$$

$$6;8$$

$$f(f(x))=\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$$

$$\begin{array}{r} 504 \\ \times\ 4 \\ \hline 2016 \end{array} \qquad 2017$$

$$f(f(f(\underbrace{f(f(f(x)))}_{=x})))=f(f(f(x)))=x$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7}{x^7-1}}}=$$

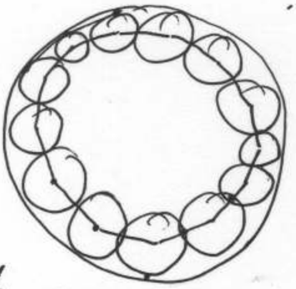
$$=\frac{1}{\frac{x}{\sqrt[7]{x^7-1}}}=\frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}=\sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}} \qquad \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$$

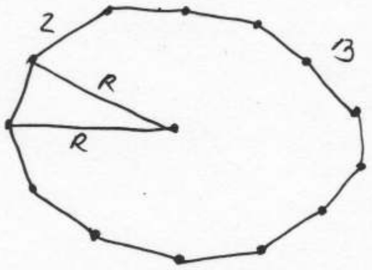
$$f(f(f(x)))=x$$

$$f(f(f(f(x))))=f(x) \qquad \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}\right)^7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1-(1-\frac{1}{x^7})}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

Черновик

~~прав. 13-угольник~~

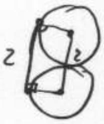




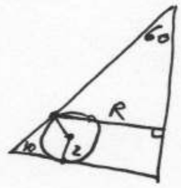
$$\frac{(n-2)\,180^\circ}{n} = \frac{11}{13}\cdot 180^\circ$$

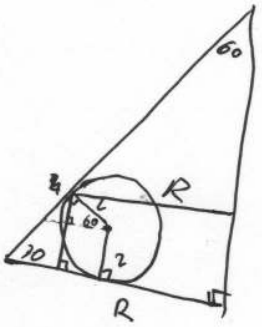
$$R^2+R^2-2R^2\cos\frac{11\cdot 360^\circ}{13} = 4$$

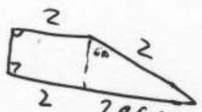
$$2R^2\left(1-\cos\frac{360^\circ}{13}\right)=4^2$$



$$R=\sqrt{\frac{2}{1-\cos\frac{360^\circ}{13}}}$$

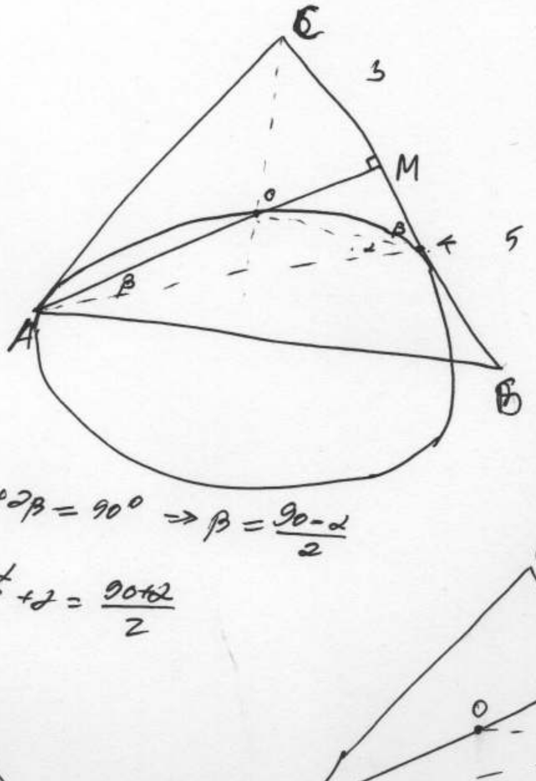






$$2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2+\sqrt{3}$$

$$(2+\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$



$$\frac{AO}{\sin\alpha}=\frac{AK}{\sin\angle AOK}$$

$$\sin\alpha=\frac{AO\cdot\sin\angle AOK}{AK}$$

$$\frac{\sin\angle AOK}{AK}\uparrow\uparrow$$

$$\downarrow\downarrow\ \frac{AK}{\sin\angle AOK}=2R\ \downarrow\downarrow$$

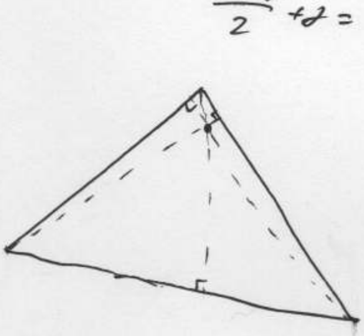
R - min

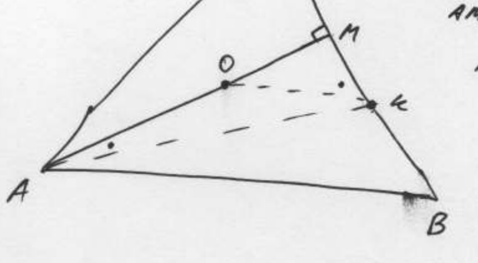
D - min

$$90+\frac{\alpha}{2}<90^\circ$$

$$\alpha+2\beta=90^\circ \Rightarrow \beta=\frac{90-\alpha}{2}$$

$$\frac{90-\alpha}{2}+\alpha=\frac{90+\alpha}{2}$$





$\Delta AMK \sim \Delta OMK$

$$\frac{MK}{AM}=\frac{OM}{MK}$$

$$MK^2=AM\cdot OM$$

$$b\cdot tg60^\circ = b\cdot\frac{\sin 60}{\cos 60}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2b=\sqrt{3}b$$

Чистовик

Задача 1) Заметим, что $\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \Rightarrow \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$= \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = 1 \Rightarrow B=1$

Докажем по индукции, что число A всегда меньше 1. (индукция по кол-ву элементов, т.к. в A каждый элемент имеет вид $\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$ и n меняется от 1 до 44 ⇒ если мы докажем, что для любого кол-ва элементов такого вида их сумма <1 ⇒ и для 44 элементов их сумма будет <1) где k-кол-во элементов и равно $1-\frac{1}{(k+1)^2}$

Б.И. $n=1$ $\frac{2\cdot1+1}{1^2\cdot2^2} = \frac{3}{4} = 1-\frac{1}{(1+1)^2} = 1-\frac{1}{4}$

П.И. $n=k$ $\sum_{n=1}^{k}\frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = 1-\frac{1}{(k+1)^2}$

Шаг индукции. Докажем, что $1-\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2(k+1)+1}{((k+1)(k+2))^2} = 1-\frac{1}{(k+2)^2} = \frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2} = \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$

$1-\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2} = \frac{1}{(k+1)^2}\cdot\left(\underbrace{(k+1)^2-1}_{k(k+2)}+\frac{2k+3}{(k+2)^2}\right) = \frac{1}{(k+1)^2}\cdot\left(\frac{k(k+2)^3+2k+3}{(k+2)^2}\right) = \frac{1}{(k+1)^2}\cdot\frac{k^4+6k^3+12k^2+8k+2k+3}{(k+2)^2} =$

$= \frac{1}{(k+1)^2}\cdot\frac{k^4+6k^3+12k^2+10k+3}{(k+2)^2}$; нетрудно заметить, что $k^4+6k^3+12k^2+10k+3 =$

$=(k^3+3k^2+3k+1)(k+3) = (k+1)^3(k+3) \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^2}\cdot\frac{k^4+6k^3+12k^2+10k+3}{(k+2)^2} = \frac{1}{(k+1)^2}\cdot\frac{(k+1)^3(k+3)}{(k+2)^2} =$

$= \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} = 1-\frac{1}{(k+2)^2}$ ⇒ шаг индукции доказан ⇒ мы доказали, что

$\sum_{n=1}^{k}\frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = 1-\frac{1}{(k+1)^2} < 1$ для $\forall\, k\in\mathbb{N}$ ⇒ и для $k=44$ это выражение выполняется

Но при этом $\sum_{n=1}^{44}\frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = A \Rightarrow A<1=B \Rightarrow A<B$, Ответ: число B больше.

Задача 2) Давайте выпишем все двузначные числа, ⋮19 или ⋮23.

Для 19: 19, 38, 57, 76, 95; для 23: 23, 46, 69, 92 ⇒ мы можем заметить, что если в числе где-то находится цифра от 1 до 7, то мы однозначно можем определить цифру после неё. Т.к. число начинается с 1, а после 9 есть 2 варианта выбора цифры, то первые 5 цифр числа могли выглядеть 2 способами: 19238 или 19576. Но заметим, что нет двузначных чисел, начинающихся на 8 и ⋮19 или ⋮23 ⇒ цифра 8 может быть только последней цифрой числа, либо её нет в числе вообще. Если цифра 8 есть в числе, то оно могло быть таким: $\underset{1\text{ цифра}}{1}\underbrace{\underbrace{9576}_{4}\underbrace{9576}_{4}\underbrace{9576}_{4}\ldots9576}_{504\text{ раза по }4}\overset{2018\text{ цифра}}{9}238 \leftarrow 2021$ цифра. Нетрудно проверить, что данное число удовлетворяет условию ⇒ число могло заканчиваться на 8.

Если цифры 8 нет в числе, то тогда у нас число будет иметь вид:

$1\underbrace{\underbrace{9576}_{4}\underbrace{9576}_{4}\ldots\underbrace{9576}_{4}\underbrace{9576}_{4}}_{505\text{ раз}}$. Это число также очевидно удовлетворяет условию

⇒ число могло заканчиваться на 6. Других вариантов быть не может, т.к. как я описал выше наличие цифры однозначно определяет следующую цифру, кроме случая с 9, который определяется тем, есть в числе цифра 8 или нет. ⇒ Ответ: 8 или 6

Чистовик

Задача 3 Заметим, что $f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-f(x)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} =$

$= \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7}{x^7-1}}} = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}} \Big\} = \sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-1+\frac{1}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}} = x \Rightarrow f(f(f(x)))=x \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{f(f(f(\ldots f(x))\ldots)}_{1304\text{ раз}} = f(f(x))$, т.к. $1304 = 3\cdot 434+2 \Rightarrow$ из 1304 функций 1302 разбиваются на тройки, каждая из которых не меняет значение результата,

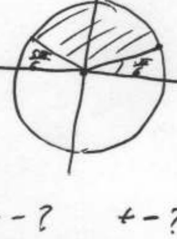
т.к. $f(f(f(x)))=x \Rightarrow \underbrace{f(f(f(\ldots f(2022))\ldots)}_{1304\text{ р}} = f(f(2022)) = \sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}} = \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$ - ответ

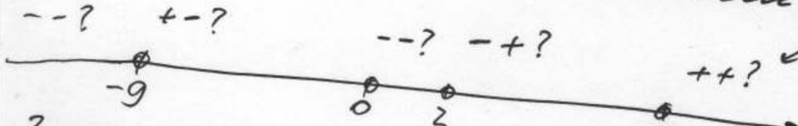
не получается преобразовать в более красивый $\Rightarrow$ оставляю таким.

Ответ: $\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}} = \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

Задача 5 Заметим, что $a = t^3-81t = t(t^2-81) = t(t-9)(t+9)$, т.е. $t>0$ при $t>9$ или $-9<t<0$; $b = 11^t - 121 = \underset{>0}{11^2}(11^{t-2}-11^0) > 0$ при $t>2$ (по св-ву показат. функции)

$c = \sin t - \frac{1}{2} > 0$ при $t \in \left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$. Заметим, что если среднее из 3-х чисел положительно, то и наибольшее из 3-х чисел положительно, а нам неважно, + или - $\Rightarrow$ нам нужны такие значения t, где хотя бы 2 из 3х чисел будут положительными

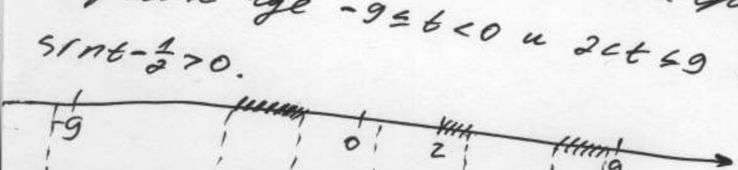




знаки чисел a, b и c соотв, ? значит, что знак может изменяться

Заметим, что при $0\le t\le 2$ и при $t\le -9$ числа a и b оба неположительные $\Rightarrow$ и среднее число неположительно $\Rightarrow$ эти t нам не подходят. А $t>9$ нам подходят, т.к. там и a, и $b>0 \Rightarrow$ и среднее число гарантированно >0.

Вариант где $-9\le t<0$ и $2<t\le 9$ нам будут подходить те t, при которых $\sin t - \frac{1}{2}>0$.



$\frac{13\pi}{6} < 9$, т.к. $\pi < \frac{54}{17}$, т.к. $54 : 17 = 3{,}17\ldots > 3{,}14\ldots$

$-\frac{19\pi}{6} < -9$, т.к. $\pi > \frac{54}{19}$, т.к. $54 : 19 = 2{,}\ldots < 3{,}14$

$\frac{5\pi}{6} > 2$, т.к. $5\pi > 15 > 12$

$\Rightarrow$ нам подходят области где $-\frac{11\pi}{6} < t < -\frac{7\pi}{6}$; $2<t<\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{13\pi}{6}<t<\frac{17\pi}{6}$

Объединяя с $t>9$ получаем Ответ: при $t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$

Чистовик

Задача 6 Пусть $\operatorname{tg} x = y$. Тогда уравнение принимает вид:

$ay^3 + (1-a-2a^2)y^2 + (2a^2-2a-1)y + 2a = 0$; заметим, что если $a=0$, то уравнение будет таким: $y^2 - y = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x=0 \\ \operatorname{tg} x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k, k\in \mathbb{Z} \\ x=\frac{\pi}{4}+\pi m, m\in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ у уравнения будет 2 корня: 0 и $\frac{\pi}{4} \Rightarrow$ расстояние между корнями равно $\frac{\pi}{4}$;

Если $a \neq 0$, то у уравнения при любом a есть корень $y=1$, т.к. подставляя получим: $a + (1-a-2a^2) + (2a^2-2a-1) + 2a = 0 \Rightarrow$ поделим уравнение на $y-1$ схемой горнера:

	a	$1-a-2a^2$	$2a^2-2a-1$	$2a$
1	a	$1-2a^2$	$-2a$	0

$\Rightarrow ay^3 + (1-a-2a^2)y^2 + (2a^2-2a-1)y + 2a = (y-1)(ay^2 + (1-2a^2)y - 2a) = 0$

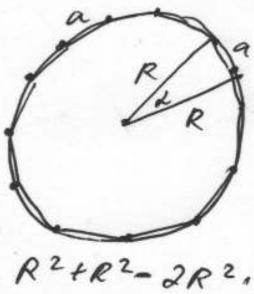
Найдём корни 2 уравнения. $y_{1,2} = \frac{2a^2-1 \pm \sqrt{(1-2a^2)^2+8a^2}}{2a} = \frac{2a^2-1 \pm \sqrt{(1+2a^2)^2}}{2a} = 2a; -\frac{1}{a}$

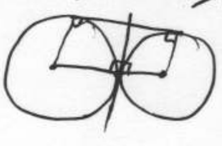
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x=1 \\ \operatorname{tg} x=2a \\ \operatorname{tg} x=-\frac{1}{a} \end{array}\right. \Rightarrow$ у нас опять на ~~отрезке~~ интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ есть корень $x=\frac{\pi}{4}$, но есть ещё и корни $\operatorname{arctg} 2a$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{a}\right)$ (т.к. arctg принимает значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ попадает в интервал), один из которых обязательно положительный, а другой отрицательный (т.к $a \neq 0$, а у $2a$ и $-\frac{1}{a}$ разные знаки $\Rightarrow$ и у их арктангенсов тоже будут разные знаки) $\Rightarrow$ расстояние от $\frac{\pi}{4}$ до отрицательного корня с одной стороны больше $\frac{\pi}{4}$, т.к $\frac{\pi}{4} - 0 > \frac{\pi}{4} - x_1$ при $x_1 < 0$, а с другой стороны не ~~меньше~~ больше наибольшего расстояния между корнями $\Rightarrow$ при $a \neq 0$ наибольшее расстояние между корнями в любом случае будет больше $\frac{\pi}{4} \Rightarrow$ это уже будет не минимальное значение наибольшего расстояния между корнями, равного $\frac{\pi}{4}$ и достигаемого при $a=0$.

Ответ: наименьшее значение равно $\frac{\pi}{4}$ и достигается при $a=0$

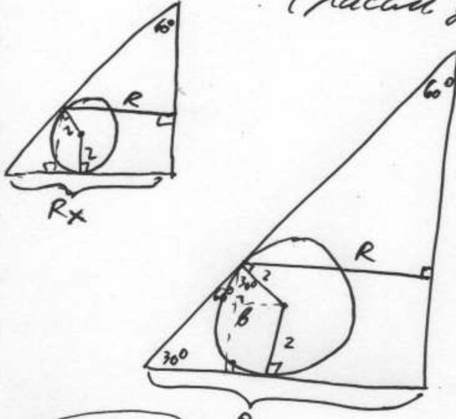
Чистовик

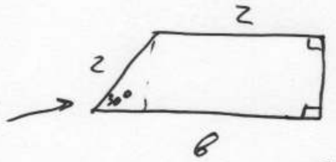
Задача 4) Заметим, что т.к. все шары одинаковые и касаются соседних шаров, боковой поверхности и основания, то точки касания каждого шара с боковой поверхностью конуса находятся в одной плоскости, причём параллельной основанию конуса (ввиду ~~симметричности картинки~~ ~~отн. поворота~~ того, что при винтовом повороте отн. оси конуса таком, что ~~один~~ шар переходит в соседа справа, картинка переходит сама в себя) $\Rightarrow$ эти точки образуют правильный 13-угольник, вписанный в окружность. Угол α очевидно равен $\frac{360°}{13}$, а сторона a равна 4, т.к. это отрезок общей касательной 2-х касающихся шаров, а он равен ~~...~~ $2+2=4$, т.к. эта касательная параллельна линии центров, ведь у нас все шары одинаковые. $\Rightarrow$ можем найти R через т. cos:





$R^2+R^2-2R^2\cdot\cos\alpha=4^2 \Rightarrow 2R^2\left(1-\cos\frac{360°}{13}\right)=16 \Rightarrow R=\frac{2\sqrt2}{\sqrt{1-\cos\frac{360°}{13}}}$; при этом в сечении, $\perp$ плоскости основания, наша картинка выглядит так: (рассм. для одного шара, т.к. с другими аналогично)



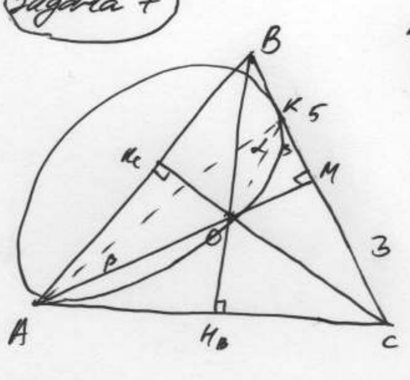


$\Rightarrow b=2+2\cdot\cos30°=2\left(1+\frac{\sqrt3}{2}\right)=2+\sqrt3$

$\Rightarrow R_x=R+\frac{b}{\operatorname{tg}30°}=R+b\cdot\frac{\cos30°}{\sin30°}=R+b\cdot\frac{\sqrt3}{2}:\frac12=\frac{2\sqrt2}{\sqrt{1-\cos\frac{360°}{13}}}+(2+\sqrt3)\sqrt3$

$\Rightarrow$ Ответ: $R_{осн}=\frac{2\sqrt2}{\sqrt{1-\cos\frac{360°}{13}}}+2\sqrt3+3$

Задача 7)



по т. sin: $\frac{AO}{\sin\alpha}=\frac{AK}{\sin\angle AOK}=\frac{AK}{\sin\angle KOM}=\frac{AK}{\cos\angle OKM}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{AO\cdot\cos\angle OKM}{AK}$

$\sin\alpha\uparrow$, $AO=const\Rightarrow\frac{\cos\angle OKM}{AK}\uparrow\Rightarrow$ т.к. $\sin\alpha=\frac{AO\cdot\sin\angle AOK}{AK}\Rightarrow\frac{\sin\angle AOK}{AK}\uparrow$

$\Rightarrow\frac{1}{2R}\uparrow$, где R – R опис. окр. $\triangle AOK\Rightarrow R\downarrow\Rightarrow$ надо найти такую $K\in BC$, что BC касается опис. окр. $\triangle AOK\Rightarrow$

$\Rightarrow\angle KAO=\angle OKM\Rightarrow\alpha+2\beta=90°\Rightarrow\beta=\frac{90-\alpha}{2}$;