МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Пичугин Владислав Игоревич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	0	15

Чистовик   лист № 1

Задача № 1

$$A = \frac{3}{1^2\cdot 2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \ldots + \frac{97}{48^2\cdot 49^2} + \frac{99}{49^2\cdot 50^2} = \frac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot(1+1)^2} + \frac{2\cdot 2+1}{2^2\cdot(2+1)^2} + \ldots + \frac{49\cdot 2+1}{49^2\cdot(49+1)^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{49} \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}$$

Заметим, что $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. Тогда ~~число~~ сумму A можно записать в виде: $\sum_{i=1}^{49}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(i+1)^2}\right) = \frac{1}{1^2}\underbrace{-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}_{=0}\underbrace{-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}}_{=0}\underbrace{-\frac{1}{4^2}+\ldots}_{=0}\ldots\underbrace{+\frac{1}{49^2}}_{=0}-\frac{1}{50^2} =$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{50^2} = 1 - \frac{1}{2500} < 1$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt[6]{4}} = \frac{\sqrt[6]{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}}{\sqrt[6]{4}} = \frac{\sqrt[6]{16-12}}{\sqrt[6]{4}} = 1$$

Т.к. $B=1$, а $A<1$, то $A<B$.

Ответ: число B больше.

Задача № 2

Выпишем все 2-значные числа, кратные 19: 19; 38; 57; 76; 95

кратные 23: 23; 46; 69; 92.

Все вместе: 19; 23; 38; 46; 57; 69; 76; 92 и 95. (#)

Т.к. загаданное число начинается с 1, то возможен всего 1 вариант для второй цифры – это 9. Далее возможны варианты:

$$\begin{tikzcd}
 & & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 8 & & (\alpha) \\
1 \arrow[r] & 9 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
 & & 5 \arrow[r] & 7 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 9 & (\beta)
\end{tikzcd}$$

цифра №1, цифра №2, цифра №3, цифра №4, цифра №5, цифра №6

Все цифры от 1 до 7 однозначно определяют следующую цифру, что видно из (#).

Цепочка α прерывается из-за того, что с цифры 8 ни одно из подходящих 2-зн. чисел не начинается ⇒ цифра 8 может быть только последней в загаданном числе.

Цепочка β зациклилась с периодом в 4 цифры: 9576. Тогда загаданное число имеет вид:

$$\overbrace{1\underbrace{9576\;9576\;\ldots\;9576}_{504\text{ периода}}}^{2017\text{ цифр}} \begin{cases} 9576 \\ 9238 \end{cases}$$

последняя цифра – 6 или 8

Ответ: 6 или 8.

$\boxed{\text{Чистовик}}$ $\boxed{\text{лист №2}}$

Задача №3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-(f(x))^5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}}=-\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-(f(f(x)))^5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(-\frac{1-x^5}{x^5}\right)}}=\frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}}=x$$

Итак, $f(f(f(x)))=x \Rightarrow \underbrace{f(\dots f}_{3k\ \text{раз},\ k\in\mathbb{Z}}(x)\dots)=x$

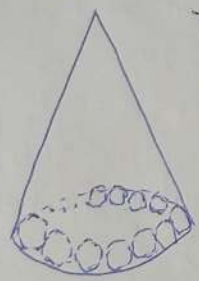
Тогда $\underbrace{f(\dots f}_{1303}(2022)\dots)=\cancel{\underbrace{f(\dots f}_{434\cdot3}(f(x))\dots)=f(x)}=\underbrace{f(\dots f}_{434\cdot3}(f(2022))\dots)=f(2022)=$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$.

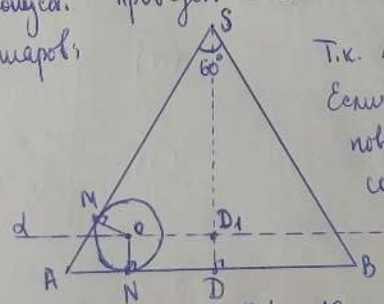
Задача №4

Конструкция, описанная в задаче, выглядит следующим образом:



$r_{шара}=3$

Т.е. шары расположены по кругу вдоль границы основания конуса. Проведём осевое сечение конуса через центр одного из шаров:

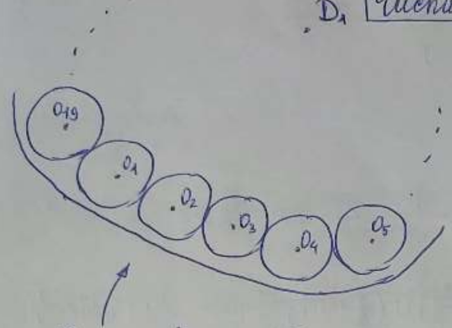


Т.к. $\angle S=60^\circ$, то $\triangle SAB$ – правильный $\Rightarrow \angle A=60^\circ$. Если M и N – (·) касания шара с бок. поверхностью конуса и с его основанием соответственно, то $\angle MAO=\angle OAN=30^\circ$, где O – центр шара. Тогда из $\triangle AON$: $tg\,30^\circ=\frac{ON}{AN} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AN=\frac{ON}{tg\,30^\circ}=\frac{r_{шара}}{\sqrt3/3}=\frac{3}{\sqrt3/3}=3\sqrt3$$

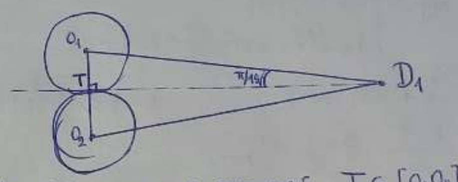
Теперь рассечём конус плоскостью α (см. рисунок). Сечение будет выглядеть следующим образом: (см. лист №3)

D_1 $\boxed{\text{Чистовик}}$ лист № 3



19 одинаковых окр-тей радиуса 3, их центры равноудалены от точки D_1

Рассмотрим две соседние окр-ти:



По св-ву касания окр-тей $T \in [O_1O_2]$, где T – точка касания. $O_1T = O_2T = r_{шара} = 3$

Т.к. $D_1O_1 = D_1O_2 = \ldots D_1O_{19}$, то многоугольник $O_1O_2\ldots O_{19}$ – правильный, D_1 – его центр. Тогда $\angle O_1D_1O_2 = \frac{2\pi}{19} \Rightarrow \angle O_1D_1T = \frac{\pi}{19}$, т.к. $\triangle O_1D_1O_2$ – р/б.

Тогда из $\triangle O_1TD_1$: $\sin\frac{\pi}{19} = \frac{O_1T}{O_1D_1} \Rightarrow O_1D_1 = \frac{O_1T}{\sin\frac{\pi}{19}} = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}}$

По рисунку на листе № 2: $D_1O_1 = D_1O = DN \Rightarrow R_{осн} = DA = DN + AN = D_1O_1 + 3\sqrt{3}$

$$R_{осн} = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}} + 3\sqrt{3}$$

Ответ: $R_{осн} = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}} + 3\sqrt{3}$.

Задача № 5

Среди из трёх чисел положительно тогда и только тогда, когда положительны хотя бы два из них.

(1): $t^3 - 144t > 0$

(2): $2^t - 256 > 0$

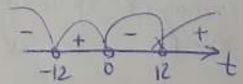
(3): $\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

То есть необходимо выполнение усл-й: $\left[\begin{array}{l} (1) \text{ и } (2) \\ (1) \text{ и } (3) \\ (2) \text{ и } (3) \end{array}\right.$

(1): $t^3 - 144t > 0$

$t(t^2 - 144) > 0$

$t(t-12)(t+12) > 0$



$t \in (-12; 0) \cup (12; +\infty)$

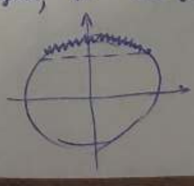
(2): $2^t - 256 > 0$

$2^t > 2^8$

Т.к. ф-ия $y = 2^p$, $p \in \mathbb{R}$, $2 > 1$ возрастающая, то $t \in (8; +\infty)$

(3): $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$



$\boxed{\text{Чистовик}}$ $\boxed{\text{лист № 4}}$

(1) и (2): $\begin{cases} t \in (-12; 0) \cup (12; +\infty) \\ t \in (8; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow t \in (12; +\infty)$

(2) и (3): $\begin{cases} t \in (8; +\infty) \\ t \in (\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$8 < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $n = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} + 2\pi n = \frac{7\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n = \frac{8\pi}{3} > 8$

$n > \frac{8 - \frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{6} = 1,\ldots$

Тогда решение системы таково: $t \in (8; \frac{8\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k), k \in \{2; 3; \ldots\}$

(1) и (3): $\begin{cases} t \in (-12; 0) \cup (12; +\infty) \\ t \in (\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

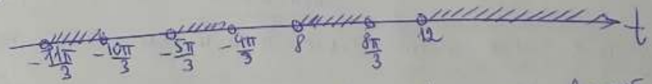
Заметим, что все точки мн-ва $(12; +\infty) \cap (\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$ уже попали в решение системы (1) и (2). Искать это пересечение нет надобности. Найдём только $(-12; 0) \cap (\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$

$-12 < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $n = -3$: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n = -\frac{16\pi}{3} < -12$

$n > \frac{-12 - \frac{\pi}{3}}{2\pi} = -\frac{6}{\pi} - \frac{1}{6} = -2,\ldots$

Тогда искомое пересечение это $(\frac{\pi}{3} - 4\pi; \frac{2\pi}{3} - 4\pi) \cup (\frac{\pi}{3} - 2\pi; \frac{2\pi}{3} - 2\pi)$, то есть $(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}) \cup (-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3})$.

Совместим всё:

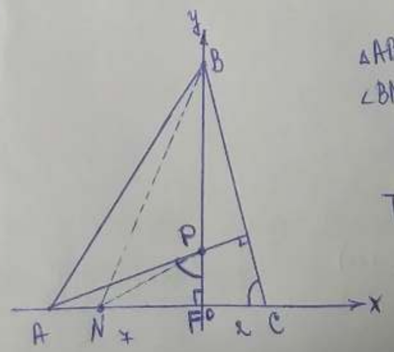


$\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 2 = \frac{13\pi}{3} > 12 \Rightarrow$ серии $(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k), k \in \{2; 3; \ldots\}$ полностью входят в $(12; +\infty)$.

Итак, $t \in (-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}) \cup (-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}) \cup (8; \frac{8\pi}{3}) \cup (12; +\infty)$

Ответ: $(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}) \cup (-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}) \cup (8; \frac{8\pi}{3}) \cup (12; +\infty)$.

Задача № 7



$\triangle ABC$ – остроугольный, P – ортоцентр, $BF \perp AC$, $AF = 7$, $FC = 2$, $\angle BNP \to \max$, $N \in AC$. Найти FN.

Введём систему координат, как показано на рисунке.

Тогда $C(2;0)$, $A(-7;0)$, $F(0;0)$

Пусть $N(a;0) \Rightarrow FN = |a|$, $a \in [-7; 2]$

Пусть $BF = h$. Тогда $\operatorname{tg} \angle BCF = \frac{h}{2}$. $\angle BCF = \angle APF \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle APF = \frac{7}{PF} = \frac{h}{2} \Rightarrow PF = \frac{14}{h} \Rightarrow P(0; \frac{14}{h})$; $B(0; h)$.

$\boxed{\text{Чистовик}}$ $\boxed{\text{Лист N 5}}$

Т.к. $\triangle ABC$ – остроугольный, то $\angle B < 90^\circ \Rightarrow tg\angle B > 0$

$\angle B = \angle ABF + \angle FBC = arctg\frac{7}{h} + arctg\frac{2}{h} \Rightarrow tg\angle B = tg\left(arctg\frac{7}{h} + arctg\frac{2}{h}\right) = \dfrac{\frac{7}{h}+\frac{2}{h}}{1-\frac{14}{h^2}} =$

$= \dfrac{\frac{9}{h}}{\frac{h^2-14}{h^2}} = \dfrac{9h}{h^2-14} > 0$. Т.к. $h>0$, то $h^2-14>0$. (*)

$\vec{NB} = \{-a; h\}$, $\vec{NP} = \{-a; \frac{14}{h}\}$

$\cos\angle BNP = \cos(\widehat{\vec{NB}, \vec{NP}}) = \dfrac{|(-a)(-a) + h\cdot\frac{14}{h}|}{\sqrt{a^2+h^2}\cdot\sqrt{a^2+\frac{196}{h^2}}} = \dfrac{a^2+14}{\sqrt{a^4 + a^2\left(h^2+\frac{196}{h^2}\right)+196}}$

Рассмотрим ф-ю $f(a) = \dfrac{a^2+14}{\sqrt{a^4+a^2t+196}}$, где $a \in [-7;2]$, $t = h^2 + \frac{196}{h^2}$.

Т.к. $\angle BNP \to max$, то $\cos\angle BNP \to min \Rightarrow f(a) \to min$.

$f'(a) = \dfrac{2a\sqrt{a^4+a^2t+196} - (a^2+14)\frac{4a^3+2ta}{2\sqrt{a^4+a^2t+196}}}{a^4+a^2t+196}$

$f'(a)=0 \Rightarrow \cancel{2a\sqrt{a^4+a^2t+196} - (a^2+14)\frac{4a^3+2at}{\sqrt{a^4+a^2t+196}} = 0}$

$\cancel{2a(a^4+a^2t+196) - (a^2+14)(4a^3+2at) = 0}$

$\cancel{2a^5 + 2a^3t + 196\cdot 2a - 4a^5 - 56a^3} - 2a^3t - 28at = 0$

$\Rightarrow 2a\sqrt{a^4+a^2t+196} - (a^2+14)\dfrac{4a^3+2at}{2\sqrt{a^4+a^2t+196}} = 0$

$4a(a^4+a^2t+196) - (a^2+14)(4a^3+2at) = 0$

$4a^5 + 4a^3t + 196\cdot 4a - 4a^5 - 56a^3 - 2a^3t - 28at = 0$

$2a^3t - 56a^3 + 196\cdot 4a - 28at = 0$

$2a^3(t-28) + 28a(28-t) = 0$

$(2a^3-28a)(t-28) = 0$

Сравним: $t - 28 \vee 0$

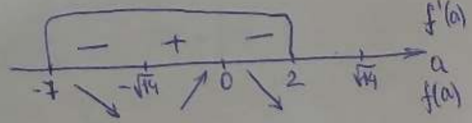
$h^2 + \frac{196}{h^2} - 28 \vee 0 \Leftrightarrow h^4 - 28h^2 + 196 \vee 0 \Leftrightarrow (h^2-14)^2 \vee 0$

Из (*): $h^2-14>0 \Rightarrow (h^2-14)^2 > 0$. Тогда $t-28>0$.

$2a^3 - 28a = 0$

$2a(a^2-14) = 0$

$a=0$ или $a=\sqrt{14}$ или $a=-\sqrt{14}$



$a = -\sqrt{14}$ – точка минимума (то, что надо).

Значит, $N(-\sqrt{14};0) \Rightarrow FN = \sqrt{14}$.

Ответ: $\sqrt{14}$.

$\boxed{\text{Чистовик}}$ $\boxed{\text{лист №6}}$

$a\,ctg^3 x + (a^2-a-3)\,ctg^2 x + (3-3a-a^2)\,ctg\, x + 3a = 0$ $\quad x\in(0;\pi)$

Пусть $ctg\, x = t$, $t\in\mathbb{R}$. Тогда $at^3+(a^2-a-3)t^2+(3-3a-a^2)t+3a=0$.

Заметим, что $a+(a^2-a-3)+(3-3a-a^2)+3a=0 \Rightarrow t=1$ – корень

$$
\begin{array}{l|l}
at^3+(a^2-a-3)t^2+(3-3a-a^2)t+3a & t-1 \\
\cline{2-2}
\underline{at^3-at^2} & at^2+(a^2-3)t-3a \\
\quad (a^2-3)t^2+(3-3a-a^2)t & \\
\quad \underline{(a^2-3)t^2-(a^2-3)t} & \\
\qquad\qquad -3at+3a & \\
\qquad\qquad \underline{-3at+3a} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$at^2+(a^2-3)t-3a=0$

Если $a=0$, то $-3t=0$
$t=0$

Если $a\neq 0$, то $t=-a$ или $t=\frac{3}{a}$

Итак, ур-ие из условия имеет следующие решения:

при $a=0$: $\left[\begin{array}{l} ctg\,x=0 \\ ctg\,x=1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$ $d=\frac{\pi}{4}$ – расстояние между корнями

при $a\neq 0$: $\left[\begin{array}{l} ctg\,x=1 \\ ctg\,x=-a \\ ctg\,x=\frac{3}{a}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4} \\ x=arcctg\,(-a) \\ x=arcctg\,\frac{3}{a}\end{array}\right.$

Черновик

лист № 7

① $A = \frac{3}{2^2} + \frac{5}{6^2} + \frac{7}{12^2} + \frac{9}{20^2} + \ldots + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$

$\cancel{\frac{n+1}{(\frac{n}{2}-1)}}$ $\frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{a}{n^2} + \frac{b}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ $= \frac{2n+1}{}$

$a(n+1)^2 + b(n^2) = 2n+1$

$an^2 + 2an + a + bn^2 = 2n+1$

$a = -b \qquad a = 1$

$A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{49^2} - \frac{1}{50^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{50^2} = 1 - \frac{1}{2500} = \frac{2499}{2500}$

$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{16-12}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{4}} = 1$

$B > A$

② $\vdots 19$ $\underbrace{1\,\_\,\_\,\_\,\_\,\ldots}_{2021}$

$\vdots 23$

19: 19, 38, 57, 76, 95

23: 23, 46, 69, 92

19
23
38
46
57
69
76
92
95

$1 \to 9 \to 5 \to 7 \to 6 \to 9$

$1 \to 9 \to \cancel{2}\,\cancel{3}\,8$ стоп

504 ш. → 4

$1\,\underbrace{9576}_{}\,9576 \ldots\, 957692\,38$

$\underbrace{\quad}_{2016}$

$1\,\underbrace{9576}_{505\text{ штук}}\,9576\ldots\; 9576$

6 или 8

③ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$ $\quad f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}} = -\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x}$

$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = x$

$x=2, \quad f(2) = \frac{1}{\sqrt[5]{-31}} \qquad f(f(2)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1}{31}}} = \frac{\sqrt[5]{31}}{2} \qquad f(f(f(2))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{31}{32}}} = 2$

$f(f(f(\underbrace{f(f(f(x)))}_{x}))) = x$

$f(\underbrace{\ldots f(x))\ldots}_{1303}) = \cancel{f(x)}$ $\quad f(\underbrace{\ldots f}_{3\cdot 434}(f(x))\ldots) = f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

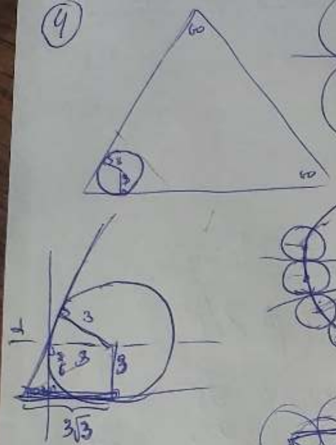
$2016 \,|\, 4$
$\quad\; 504$

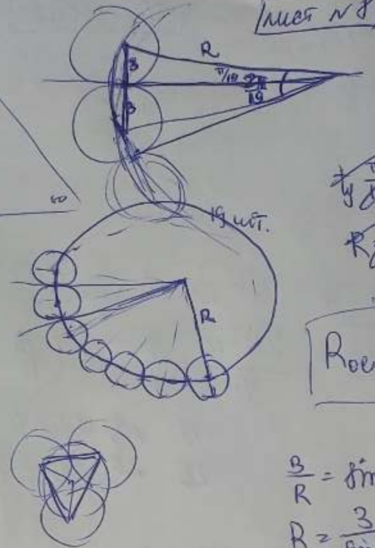
$1302 \,|\, 3$
$12 \quad 434$
$10,2$

④

лист № 8 Черновик $-\frac{\cancel{36}}{3} = -12, ...$

(4)





прав. 19-угольник

сторона 6

$\frac{3}{R} = \sin\frac{\pi}{19}$

$R = \frac{3}{\sin \pi/19}$

$\cancel{R_{осн} = \frac{3}{tg\,\pi/19} + 3\sqrt{3} = 3\left(\sqrt{3} + ctg\frac{\pi}{19}\right)}$

$\boxed{R_{осн} = \frac{3}{\sin \pi/19} + 3\sqrt{3}}$

(5)

$t^3 - 144t > 0$

$2^t - 256 > 0$

$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

(1) и (2)

или

(2) и (3)

или

(1) и (3)

(1): $t(t-12)(t+12) > 0$

$t \in (-12; 0) \cup (12; +\infty)$

(2): $2^t > 2^8$

$t > 8$ $\quad t \in (8; +\infty)$

(3): $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi n > 8$

$\pi + 6\pi n > 24$

$n > \frac{24-\pi}{6\pi} = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{6} > 1, ...$

(1) и (2): $t \in (12; +\infty)$

(2) и (3): $t \in \left(8; \frac{8\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \{2; 3; ...\}$

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < 12$

$2\pi + 6\pi k \le 36$

$k \le \frac{18-\pi}{3\pi} = \frac{6}{\pi} - \frac{1}{3} = 1, ...$

$\frac{13\pi}{3} > 12$

$13\pi \vee 36$

$-36 < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

$n > -\frac{36+\pi}{6\pi} = -\left(\frac{6}{\pi} + \frac{1}{6}\right) < -2$

$-2, ...$

$\frac{6}{\pi} + \frac{1}{6} > 2$

$\frac{6}{\pi} > \frac{11}{6}$

$36 > 11\pi$

$\frac{36}{11} > \pi$

$3\frac{3}{11} > 3,14...$

$3,2727...$

$n = -2; -1$

$n = -3$: $\frac{2\pi}{3} - 6\pi = -\frac{16\pi}{3} < -12$

$12 < \frac{16\pi}{3}$

$36 < 16\pi$

$\frac{9}{4} < \pi$

$3 < \pi$, $\frac{36}{13} < 3$

$-\frac{16\pi}{3} < -12$

$12 < \frac{16\pi}{3}$

$36 < 16\pi$

$\frac{6}{11} + \frac{1}{6} > 2$

$\frac{6}{11} > \frac{18}{...}$

$36 > 11\pi$

$3\frac{3}{11} > \pi$

$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{6} > 1$

$\frac{4}{\pi} \vee \frac{7}{6}$

$24 \vee 7\pi$

$3\frac{3}{7} \vee \pi$

$3,42 \vee 3,14$

$k = 2$:

$\left(\frac{13\pi}{3}; \frac{14\pi}{3}\right)$

$\frac{4}{\pi} > \frac{7}{6}$

$24 > 7\pi$

Черновик | лист №9

⑥ $a\,ctg^3x+(a^2-a-3)ctg^2x+(3-3a-a^2)ctg\,x+3a=0$

$at^3+(a^2-a-3)t^2+(3-3a-a^2)t+3a=0$

$\sum_{коэфф}=0$: $t_1=1$ – корень

~~$t_2t_3=-3$~~

~~$t_2+t_3+1=3-3a-a^2$~~

$at^3+(a^2-a-3)t^2+(3-3a-a^2)t+3a \,\big|\, t-1$

$at^3-at^2 \quad\quad at^2+(a^2-3)t-3a$

$(a^2-3)t^2+(3-3a-a^2)t$

$(a^2-3)t^2-(a^2-3)t$

$-3at+3a$

$at^2+(a^2-3)t-3a=0$

$a=0$: $-3t=0$, $t=0$

$\Pi=-3$

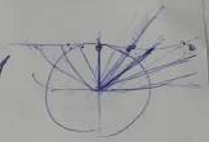
$\Sigma=-a+\frac{3}{a}$

$a=0$: $t=0$ или $t=1$

$ctg\,x=0$ или $ctg\,x=1$

$x=\frac{\pi}{2}$ или $x=\frac{\pi}{4}$

$d=\frac{\pi}{4}$



~~$a\neq0$~~

$\frac{3}{a}$ и $-a$

$t=-a$ или $t=\frac{3}{a}$

$\left[\begin{array}{l} ctg\,x=1 \quad x=\pi/4 \\ ctg\,x=-a \\ ctg\,x=\frac{3}{a} \end{array}\right.$

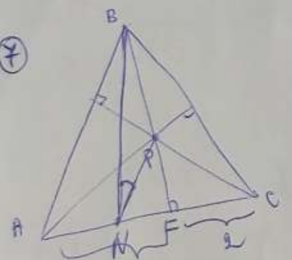
Если $a>0$, $\frac{3}{a}\geq1 \Rightarrow a\in(0;3]$: $d=arcctg\frac{3}{a}-arcctg(-a)=$

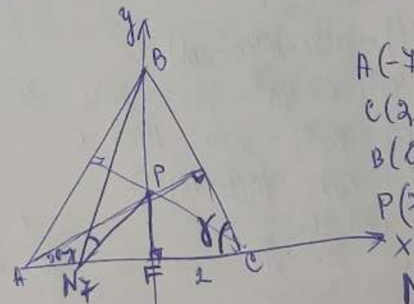
$=arcctg\frac{3}{a}+arcctg\,a$

Если $a>0$, $a>3$: $d=\frac{\pi}{4}+arcctg\,a$

Если $a<0$,

⑦





$A(-7;0)$

$C(2;0)$

$B(0;2tg\gamma)$

$P(0;7ctg\gamma)$

$N(a;0)$

~~$\overrightarrow{BN}=\{a;-2tg\gamma\}$~~

$\overrightarrow{NP}$

$\overrightarrow{NB}=\{-a;2tg\gamma\}$

$\overrightarrow{NP}=\{-a;7ctg\gamma\}$

$f(a)=\cos\angle BNP=\dfrac{a^2+14}{\sqrt{a^2+4tg^2\gamma}\sqrt{a^2+7ctg^2\gamma}}=\dfrac{a^2+14}{\sqrt{a^4+28+4a^2tg^2\gamma+7a^2ctg^2\gamma}}\longrightarrow min$

$f'=\dfrac{2a\sqrt{a^4+a^2(4tg^2\gamma+7ctg^2\gamma)+28}-(a^2+14)\frac{1}{2\sqrt{\dots}}(4a^3+8a\,tg^2\gamma+14a\,ctg^2\gamma)}{\dots}$

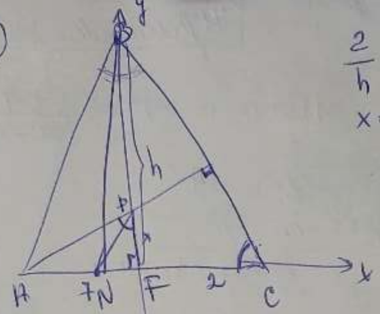
$4a(\dots)-(a^2+14)(4a^3+8a\,tg^2\gamma+14a\,ctg^2\gamma)=$

$=\cancel{4a^5}+16a^3tg^2\gamma+28ctg^2\gamma a^3+112a-\cancel{4a^5}-56a^3-8a^3tg^2\gamma-112a\,tg^2\gamma-14a^3ctg^2\gamma+196ctg^2\gamma$

$8a^3tg^2\gamma+14a^3ctg^2\gamma+112a-56a^3-112a\,tg^2\gamma-196ctg^2\gamma\,a$

Черновик | лист № 10

(7)



$\frac{2}{h} = \frac{x}{7}$

$x = \frac{14}{h}$

$A(-7;0)$ $P(0;\frac{14}{h})$

$C(2;0)$ $N(a;0)$

$B(0;h)$

$\vec{NB} = \{-a; h\}$

$\vec{NP} = \{-a; \frac{14}{h}\}$

$\vec{NB}\cdot\vec{NP} = a^2 + 14$

$|\vec{NB}||\vec{NP}| = \sqrt{a^2+h^2}\sqrt{a^2+\frac{196}{h^2}} = \sqrt{a^4+196+a^2(h^2+\frac{196}{h^2})} =$

$\cos\angle NBP = f(a) = \frac{a^2+14}{\sqrt{a^4+196+a^2\underbrace{(h^2+\frac{196}{h^2})}_{t}}}$

$\angle B = \operatorname{arctg}\frac{7}{h} + \operatorname{arctg}\frac{2}{h}$

$\operatorname{tg}\angle B = \frac{\frac{7}{h}+\frac{2}{h}}{1-\frac{14}{h^2}} = \frac{\frac{9}{h}}{\frac{h^2-14}{h^2}} = \frac{9h}{h^2-14} > 0$

$h^2 - 14 > 0$

$t > 0$

$f'(a) = \frac{2a\sqrt{a^4+196+a^2t} - (a^2+14)\frac{4a^3+2at}{2\sqrt{a^4+196+a^2t}}}{a^4+196+a^2t} = \to \min$

$f'(a) = 0:\ 4a(a^4+196+a^2t) - (a^2+14)(4a^3+2at) = 0$

$4a^5 + 196\cdot 4a + 4a^3t - 4a^5 - 56a^3 - 2a^3t - 28at = 0$

$392a + 2a^3t - 28a^3 - 14at = 0$

$a^3(t-28) - 14a(t-28) = 0$

$h^2+\frac{196}{h^2} \vee 28$

$h^4 - 28h^2 + 196 \vee 0$

$(h^2-14) \vee 0$

$a^3 - 14a = 0$

$a = 0 \quad a = \pm\sqrt{14}$

$a = \sqrt{14}$

$\Rightarrow FN = \sqrt{14}$

$-\quad+\quad-\quad+$; $-\sqrt{14}$, 0, $\sqrt{14}$; a

$\operatorname{ctg} x_1 \operatorname{ctg} x_2 = -3$