МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Подолянская Юлия Андреевна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	10	0	15	15

Черновик Черновик

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt3-1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$B=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\dots+\frac{77}{(38\cdot39)^2}+\frac{79}{(39\cdot40)^2}$$

$$B=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{38^2}-\frac{1}{39^2}+\frac{1}{39^2}-\frac{1}{40^2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{40^2}=1-\frac{1}{1600}=\boxed{\frac{1599}{1600}}$$

$$39^2-38^2=(39+38)(39-38)$$

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt3}\cdot\sqrt[6]{4-2\sqrt3}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{16-12}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=1.$$

$3+1$

$4\cdot3=12$

№2.

2022 - зн. две цифры сосед. :19 ; 23

23	19
46	38
69	57 +19
+23	+19
92	76 +19
	95

469 ↗ 238 ← тупик. ↘ 5769

№3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$23\times4=92$$

$$19\times5=95$$

$$f(f(f\dots f(2022))))$$

1305 раз

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}}$$

лист 1

Задача 1.

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{16-12}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{77}{(38\cdot 39)^2} + \frac{79}{(39\cdot 40)^2} = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{39^2} - \frac{1}{40^2}\right) =$$

$$\left(\text{т.к. } \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{(n^2\cdot(n+1))^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{40^2} = \frac{1599}{1600}$$

$$\Downarrow$$

$$A = 1 > B = \frac{1599}{1600}$$

Ответ: число A больше

Задача 2.

Найдем все ~~двузначные~~ числа из двух знаков, кратные 19 или 23. Это числа:

00, 19, 23, 38, 46, 57, 69, 76, 92, 95.

Посмотрим, какая цифра может идти после 9.

$$9 \begin{cases} 2-3-8 & (1) \\ 5-7-6-9 & (2) \end{cases}$$

Заметим, что все последующие цифры, ~~от~~ кроме той, которая идёт за „9", определяются однозначно. Заметим, что в варианте (1) должно быть число, начинающееся с 8. Такого нет. => После „9" может идти только 5, ~~а цифры за~~ ~~нее~~ этого и все цифры определяются однозначно. Т.к. наше число начинается с „4", то оно имеет вид:

$$46\underbrace{9576}\underbrace{9576}\ldots\ldots$$

Чистовик.

То есть ~~сначала~~ идут цифры 46, а потом 9576 повторения.
Т.к. число 2022-значное, то для повтора 9576 будет отведено 2020 знаков. $2020 \vdots 4$ => комбинаций 9576 будет целое число => последняя цифра – 6

Ответ: 6.

Задача 3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}}=\frac{1}{\sqrt[9]{\frac{-x^9}{1-x^9}}}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{x^9}}}=\frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1}{x^9}}}=\sqrt[9]{x^9}=x$$

$\Downarrow$

При применении функции f 3 раза получаем исходное значение, т.е $f(f(f(x)))\equiv x$. Т.е. мы можем убирать по 3 повторения $f(x)$, не изменяя $\underbrace{\text{итогового}}\ \underbrace{\text{значения.}}_{\text{выражения}}$ Т.к. всего повторений 1305, а $1305 \vdots 3$, то мы можем убрать все повторения f => В итоге останется 2022.

Ответ: 2022.

Задача 5

Чтобы среднее из чисел a, b, c было положительным, необходимо и достаточно, чтобы 2 из них были положительными. Т.е. нужно найти такие t, при которых по крайней мере 2 числа из a, b, c будут >0.
Так же t, при которых больше нуля эти числа:
~~a>0~~ Рассмотрим, при каких t больше нуля эти числа:

1) $a>0$:

$t^3-121t>0$

$t(t-11)(t+11)>0$ => $\left[\begin{array}{l}-11<t<0\\ t>11\end{array}\right.$

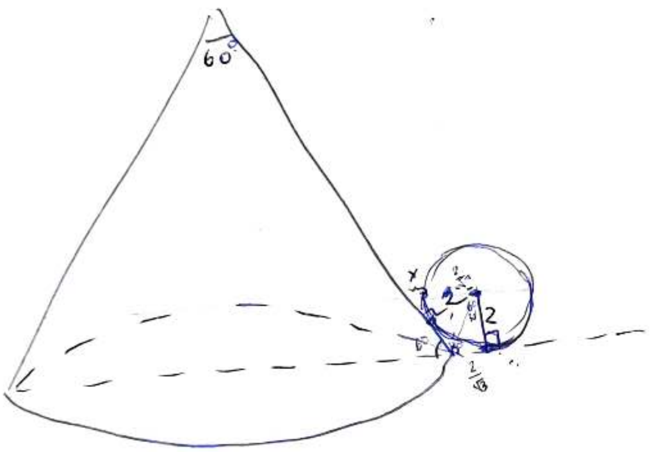
Черновик.

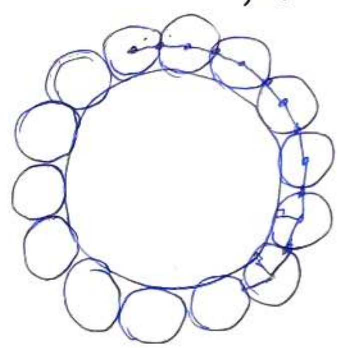
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1-x^9-1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{-\frac{x^9}{1-x^9}}} = \frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{\sqrt[9]{-x^9}}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1}{x^9}}} = x$$

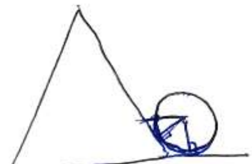
34 уголков со стороны





$\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$



$x_1 \le x_2 \le x_3$

$\boxed{t > 5}$

$a = t^3 - 121t$ $\quad b = 2^t - 32$ $\quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Чтобы всё было ок, нужно, чтобы 2 были положительно, т. е. t был на промеж. 2 ...

$\frac{2\pi}{3} < 5$ $\quad \pi \approx 3{,}14$

$2\pi \approx 6{,}28$

$t(t^2-121)$ $\quad 12$ $\quad 13$ $\quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi$ $\quad 2\pi(1+3k) > 15$

-10π $\quad -18$ $\quad 8 \times 3{,}14 = 25{,}12$ $\quad k=1$

Лист 4

Чистовик.

2) $b>0$:

$2^t-32>0$

$2^t>32$

$t>5$.

3) $c>0$:

$\sin t-\frac{\sqrt3}{2}>0$

$$\begin{cases}\frac{\pi}{3}+2\pi k\ \cancel{\frac{\pi}{6}}<t<\frac{2\pi}{3}+2\pi k\\ k\in Z.\end{cases}$$

Пусть положительны a и b. Тогда:

$$\begin{cases}t>5\\ \left[\begin{array}{l}-11<t<0\\ t>11\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow t>11$$

Пусть положительны b и c. Тогда:

$$\begin{cases}t>5\\ \frac{\pi}{3}+2\pi k<t<\frac{2\pi}{3}+2\pi k\\ k\in Z.\end{cases}$$

~~Ес~~ $\frac{2\pi}{3}+2\pi k>t>5 \Rightarrow$

$\cancel{\frac{\pi}{3}+2\pi k>5}$

$\frac{2\pi}{3}+2\pi k>5$

$2\pi+6\pi k>15$

При $k=0$:

$2\pi<15$

При $k=1$

$2\pi+6\pi=8\pi>8\cdot3{,}14=25{,}12>15$.

подходит.

При $k>1$

$\frac{2\pi}{3}+2\pi k>\frac{2\pi}{3}+2\pi>5$ - подходит.

Проверим ~~при $k=1$~~ нижнюю границу при $k=1$:

$\frac{\pi}{3}+2\pi k=\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}>\frac{7\cdot3{,}14}{3}>$

$7>5$.

$$\begin{cases}t>5\\ \frac{\pi}{3}+2\pi k<t<\frac{2\pi}{3}+2\pi k\\ k\in Z\end{cases} \Leftarrow$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases}\frac{\pi}{3}+2\pi k<t<\frac{2\pi}{3}+2\pi k\\ k\geq1.\end{cases}$$

Если положительные a и c, то:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-11<t<0\\ t>11\end{array}\right.\\ \frac{\pi}{3}+2\pi k<t<\frac{2\pi}{3}+2\pi k\\ k\in Z\end{cases}$$

Заметим, что случай $t>11$ уже рассмотрен, т.к. $t>11$ всё входит в $t>5 \Rightarrow$

$$\begin{cases}-11<t<0\\ \frac{\pi}{3}+2\pi k<t<\frac{2\pi}{3}+2\pi k\\ k\in Z.\end{cases}$$ - для новых значений t.

~~Т.к.~~ $\Downarrow$

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{3}+2\pi k > t > -11 \quad * \\ \frac{\pi}{3}+2\pi k < t < 0 \\ \quad\Downarrow \\ \quad k<0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$

~~$\pi < t$~~

условие $a>0$ $c>0$ дает:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3}+2\pi k < t < \frac{2\pi}{3}+2\pi k \\ \left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=-2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Чистовик.

$* \quad \frac{2\pi}{3}+2\pi k > -11$

$2\pi+6\pi k > -33$

при $k=-1$

$2\pi+6\pi k = -4\pi > -4\cdot 3,15 > -33$ - подходит.

при $k=-2$

$2\pi+6\pi k = -10\pi > -10\cdot 3,15 = -31,5 > -33$

подходит.

При $k \geq -3$

$2\pi+6\pi k \leq -16\pi < -16\cdot 3,14 < -33$

~~не подходит~~ не подходит.

~~При~~

Объединим все полученные значения t:

$$\left[\begin{array}{l} t>11 \\ \frac{\pi}{3}+2\pi k < t < \frac{2\pi}{3}+2\pi k \\ \left[\begin{array}{l} k \geq 1 \\ k=-1 \\ k=-2. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Найдем, при каких k

Если $\frac{\pi}{3}+2\pi k > 11$, то $t>11$

$\frac{\pi}{3}+2\pi k > 11$

~~При~~

$\pi+6\pi k > 33$

При $k=1$

$\pi+6\pi k = 7\pi < 7\cdot 3,15 < 33$ - не подходит

При $k \geq 2$.

$\pi+6\pi k \geq 13\pi > 13\cdot 3,14 > 39 > 33$ - подходит.

При $k=1$

$\frac{2\pi}{3}+2\pi k \gtrless 11$

$\frac{2\pi}{3}+2\pi \gtrless 11$

$8\pi \gtrless 11$

Объединяя все значения t, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}-2\pi k < t < \frac{2\pi}{3}-2\pi k \\ \frac{\pi}{3}-4\pi k < t < \frac{2\pi}{3}-4\pi k. \\ t > \frac{\pi}{3}+2\pi. \end{array}\right.$$

$\Leftarrow$

Ответ: ~~$(\frac{\pi}{3}-4\pi k)$~~ $(\frac{\pi}{3}-4\pi k; \frac{2\pi}{3}-4\pi k) \cup (\frac{\pi}{3}-2\pi k; \frac{2\pi}{3}-2\pi k) \cup (\frac{\pi}{3}+2\pi; +\infty)$

Черновик.

$0;\pi$ ctg [illegible]

$a\,ctg^3 x + (2a^2-a-2)\,ctg^2 x + (2-4a-2a^2)\,ctg\, x + 4a = 0$

Пусть $ctg\, x = t$

$a + 2a^2 - a - 2 + 2 - 4a - 2a^2 + 4a$

$a t^3 + (2a^2-a-2)t^2 + (2-4a-2a^2)t + 4a = 0$

$(t-1)(a t^2 + (2a^2-2)t - 4a) = 0$ (1)

	a	$2a^2-a-2$	$2-4a-2a^2$	$4a$
1	a	$2a^2-2$	$-4a$	0

При $a=0$

$(t-1)(-2t)=0$

$t=1$ — корни. $\Rightarrow$ $x=\frac{\pi}{4}$

$t=0$ $x=\frac{\pi}{2}$ — корни $\Rightarrow$ расстояние $=\frac{\pi}{4}$

При $a\neq 0$

a^2-1

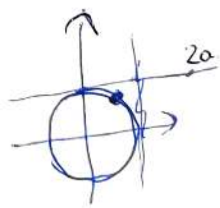
(1) $\frac{D}{4} = a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2 = (a^2+1)^2$

$t = \frac{a^2-1 \pm a^2+1}{a}$

$\left[\begin{array}{l} t = 2a \\ t = -\frac{2}{a} \end{array}\right.$

$\frac{1-\frac{1}{2a}}{1+\frac{1}{2a}} = \frac{2a-1}{2a+1}$

$\frac{2a-1-2a-1}{2a+1} < 0$



$ctg\, x_1 = 2a$ $tg\, x_1 = \frac{1}{2a}$

$ctg\, x_2 = -\frac{2}{a}$ $tg\, x_2 = -\frac{a}{2}$

Корни $x=\frac{\pi}{4}$

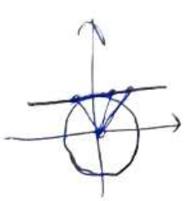
$x = arcctg(2a)$

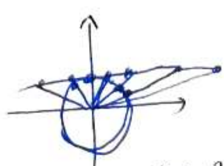
$x = arcctg(-\frac{2}{a})$

$tg(x_1 - x_2)$

$2a-1+2a+1$

$\frac{\frac{1}{2a}+\frac{a}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1+a}{2a\cdot\frac{3}{4}} = \frac{1+a}{\frac{3a}{2}}$





$2+a-2+a$

$\frac{2a}{2+a+2-a}$

Черновик. Лист 7.

Задача 6 Чистовик.

$a\,ctg^3x+(2a^2-a-2)\,ctg^2x+(2-4a-2a^2)\,ctg\,x+4a=0$

Пусть $ctg\,x=t$:

$at^3+(2a-a-2)\,t^2+(2-4a-2a^2)\,t+4a=0$

$t=1$ - корень. Схема Горнера:

	a	$2a^2-a-2$	$2-4a-2a^2$	$4a$
1	a	$2a^2-2$	$-4a$	0

$$(t-1)\,(\overset{(1)}{at^2+(2a^2-2)t-4a})=0$$

(1) $at^2+(2a^2-2)t-4a=0$

При $a=0$
$-2t=0$
$t=0$ - корень.

(2). при $a\neq0$

$\frac{D}{4}=a^4-2a^2+1+4a^2=(a^2+1)^2$

$t=\frac{a^2-1\pm a^2+1}{a}$

$\left[\begin{array}{l} t=2a \\ t=-\frac{2}{a}\end{array}\right.$

Вернемся к изн. переменной:

при $a=0$: ~~корни~~

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} ctg\,x=0 \\ ctg\,x=1\end{array}\right. \\ 0<x<\pi\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$ - разница между двумя корнями $=\frac{\pi}{4}$

при $a\neq0$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} ctg\,x=2a \\ ctg\,x=-\frac{2}{a} \\ ctg\,x=1\end{array}\right. \\ 0<x<\pi.\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4} \\ x=arcctg(2a) \\ x=arcctg(-\frac{2}{a})\end{array}\right.$ (*)

Чистовик.

* $x_1 = \frac{\pi}{4}$ $\qquad tg\, x_1 = 1$

$x_2 = arcctg(2a)$ $\qquad tg\, x_2 = \frac{1}{2a}$

$x_3 = arcctg(-\frac{2}{a})$ $\qquad tg\, x_3 = -\frac{a}{2}$

Заметим, что ~~тем меньше~~ $f(x) = tg(x) \uparrow [0; \frac{\pi}{2})$. => Если ~~тангенс максимальный~~ тангенс модуля разности углов $x_1\ x_2\ x_3$, ~~при условии, что они по модулю не превышают $\frac{\pi}{4}$ (а если превышают, то условие выполняться не будет, т.к. существует $a=0$, при которой разница $\frac{\pi}{4}$)~~, будет меньше, либо равна, чем 1, то максимальная разница между ~~углами~~ корнями будет меньше, либо равна, чем $\frac{\pi}{4}$. Т.е. нам могут подойти только такие значения a. Иначе это будет работать только при условии, что все разности по модулю не превышают $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{cases} |tg(x_1 - x_2)| = \left|\frac{tg x_1 - tg x_2}{1 + tg x_1 tg x_2}\right| = \left|\frac{1 - \frac{1}{2a}}{1 + \frac{1}{2a}}\right| = \left|\frac{2a-1}{2a+1}\right| \le 1 \quad (1) \\ |tg(x_1 - x_3)| = \left|\frac{tg x_1 - tg x_3}{1 + tg x_1 tg x_3}\right| = \left|\frac{1 + \frac{a}{2}}{1 - \frac{a}{2}}\right| = \left|\frac{2+a}{2-a}\right| \le 1 \quad (2) \\ |tg(x_2 - x_3)| = \left|\frac{tg x_2 - tg x_3}{1 + tg x_2 tg x_3}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2a} + \frac{a}{2}}{1 - \frac{1}{4}}\right| = \left|\frac{2+2a^2}{3a}\right| \le 1 \end{cases}$$

Решим эти нер-ва

(1) $\left|\frac{2a-1}{2a+1}\right| \le 1$

$$\begin{cases} \frac{2a-1}{2a+1} \le 1 \\ \frac{2a-1}{2a+1} \ge -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2}{2a+1} \le 0 \\ \frac{4a}{2a+1} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow a \ge 0$$

(2) $\left|\frac{2+a}{2-a}\right| \le 1$

$$\begin{cases} \frac{2+a}{2-a} \le 1 \\ \frac{2+a}{2-a} \ge -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2a}{2-a} \le 0 \\ \frac{4}{2-a} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow a \le 0$$

$\Rightarrow a = 0$

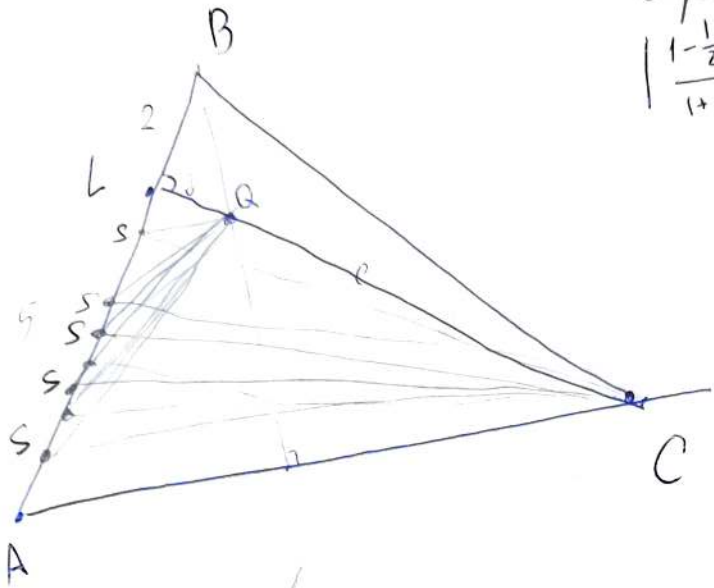
(3) ~~Получаем, что разница между корнями меньше, либо равна $\frac{\pi}{4}$ только при $a=0$ (случай уже разобран)~~ a не равно 0 по условию данного пункта => ~~в этом пункте~~ * не имеет искомых решений => Разница между корнями $\le \frac{\pi}{4}$ только при $a=0$ мат.

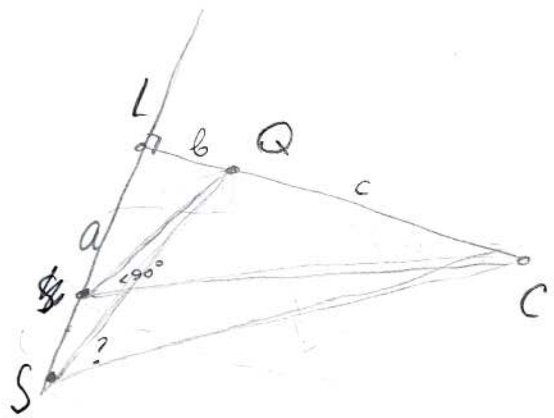
Ответ: $a=0$; наименьшее значение $= \frac{\pi}{4}$.

Чистовик Лит 9

Черновик.

$\left|\frac{1-\frac{1}{2a}}{1+\frac{1}{2a}}\right| = \left|\frac{2a-1}{2a+1}\right| \le 1$





$tg\,x \uparrow$

мон. уол.-им. пошк.

~~arcsin~~

$\operatorname{arctg}\frac{b+c}{a} - \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$

$AL = 2$

$LB = 5$

$\frac{b+c}{a} - \frac{b}{a} = \frac{c}{a}$

$\frac{ac}{a^2-b^2-bc}\uparrow$

быстрее возраст

им

$tg\uparrow$

$b\,,\ c$

$\frac{ac}{a^2-b^2-bc} = 1$

$ac = a^2-b^2-bc$

$a^2-ac-b^2-bc=0$

$a^2 = b^2+bc$

$D = c^2+$

$\operatorname{arctg}\frac{b+c}{a} - \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$

производная по a

$tg(\alpha) = \frac{\frac{b+c}{a}-\frac{b}{a}}{1+\frac{(b+c)b}{a^2}} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{a^2+b^2+bc}{a^2}} = \frac{ac}{a^2+b^2+bc}$

$(tg\alpha)' =$

~~$(tg(\alpha))' = \frac{a(a^2-b^2-bc)-ac(-b)}{(a^2-b^2-bc)^2} = \frac{a^3-ab^2}{(a^2-b^2-bc)}$~~

по c

$\frac{c(a^2-b^2-bc)-ac(2a)}{(a^2-b^2-bc)^2} =$

$= \frac{a^2c-b^2c-bc^2-2a^2c}{(a^2-b^2-bc)^2} = -a^2c-bc \;\; \frac{-a^2-b^2-bc<0}{(a^2-b^2-bc)^2>0} < 0$

$-abc+abc$

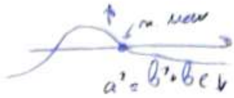
– ~~возраст~~ убывание

Черновик лист 10

Черновик

$$tg(\alpha) = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{a^2+b^2+bc}{a^2}} = \frac{ac}{a^2+b^2+bc}$$

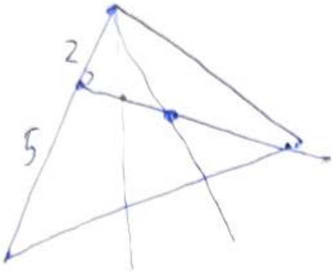
$$(tg\alpha)' = \frac{c(a^2+b^2+bc) - ac(2a)}{(a^2+b^2+bc)^2} = \cancel{a^2c+cb^2+bc^2} = \frac{a^2+b^2+bc-2a^2}{(a^2+b^2+bc)}$$



$a^2 = b^2+bc$

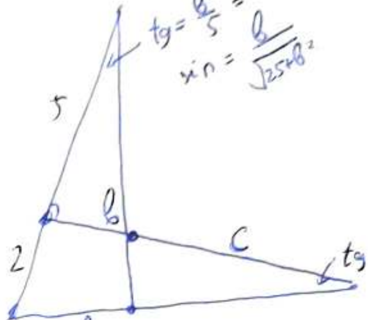
$1+\frac{b^2}{25} = \frac{1}{\cos^2}$ $\quad \cos^2 = \frac{25}{25+b^2}$

$\frac{25+b^2}{25} = \frac{1}{\cos^2}$ $\quad \sin^2 = \frac{b^2}{25}$



$tg = \frac{b}{5} = \sin =$

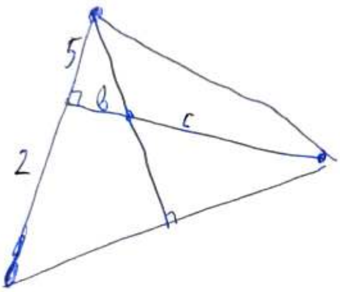
$\sin = \frac{b}{\sqrt{25+b^2}}$



$tg = \frac{2}{b+c}$

$\frac{7b}{\sqrt{25+b^2}}$

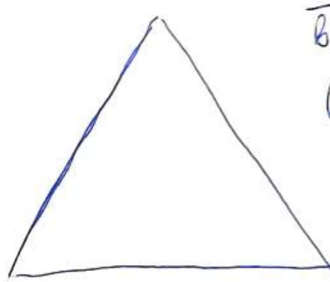
$b(b+c)$

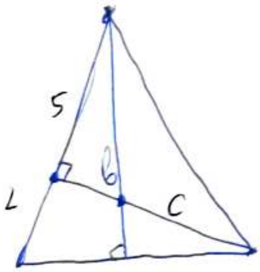


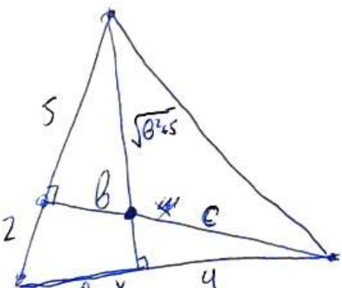
$$\frac{2}{b+c} = \frac{b}{5}$$

$b(b+c) = 10$

$\sqrt{10} \gtrless 5$







$\frac{7b}{\sqrt{b^2+5}}$

$$\frac{m}{7} = \frac{b}{\sqrt{b^2+5}}$$

$$m = \frac{7b}{\sqrt{b^2+5}}$$

$$\frac{x}{7} = \frac{2}{(x+y)}$$

$(x+y) = 14$

$$\frac{c}{y} = \frac{x+y}{c+b}$$

$c(c+b) = 14$

$$\frac{x}{7} = \frac{2}{x+y}$$

$b+c$

$$\frac{c}{y} = \frac{x+y}{b+c}$$

$\frac{b}{5}$ 7

$4+(b+c)^2 = (x+y)^2$

$x(x+y) = 14$

$c(b+c) = y(x+y)$

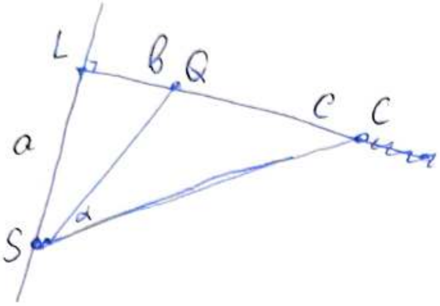
$b(b+c) = ?$

$b+c$

Черновик
Лист 11

Задача 7 Чистовик.

Рассмотрим конфигурацию, в которой известны $CQ = c$ и $LQ = b$. и нужно найти $LS = a$, в которой $\angle CSQ$ — максимальный



$\angle CSQ < \angle CSL < 90^\circ$

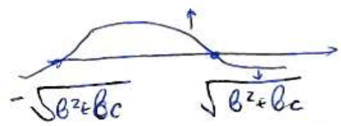
$\angle CSQ = \angle CSL - \angle QSL = \operatorname{arctg}\frac{b+c}{a} - \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$

Т.к. $\angle CSQ < 90^\circ$, он максимальный, когда его тангенс максимальный, т.к. $f(x) = tg\,x \uparrow [0; \frac{\pi}{2})$

$tg\angle CSQ = \dfrac{\frac{b+c}{a} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b+c}{a}\cdot\frac{b}{a}}$ (по ф-ле тангенса разности) $= \dfrac{\frac{c}{a}}{\frac{a^2+b^2+bc}{a^2}} = \dfrac{ac}{a^2+b^2+bc}$

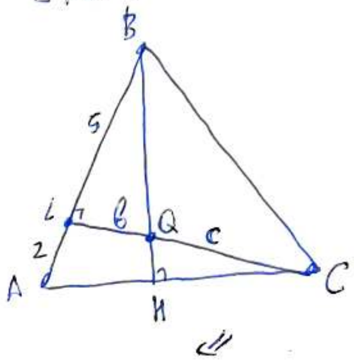
Рассмотрим функцию $g(a) = \dfrac{ac}{a^2+b^2+bc}$

$g'(a) = \dfrac{c(a^2+b^2+bc) - ac(2a)}{(a^2+b^2+bc)^2} = \dfrac{a^2+b^2+bc-2a^2}{(a^2+b^2+bc)^2} = \dfrac{b^2+bc-a^2}{\underbrace{(a^2+b^2+bc)^2}_{>0}}$



~~$a=\sqrt{b}$~~ т.к. $a>0$, то от $[0$ до $\sqrt{b^2+bc}$ $g(a)\uparrow$, от $\sqrt{b^2+bc}$ до $+\infty$ $g(a)\downarrow$ $\Rightarrow a = \sqrt{b^2+bc}$ — точка максимума, т.е. при $a = \sqrt{b^2+bc}$ $\angle CSQ$ — максимальный.

Рассмотрим $\triangle ABC$:



BH — высота.

$\angle ABH = 90^\circ - \angle BAH = \angle LCH$

$tg\angle ABH = \frac{LQ}{LB} = \frac{b}{5}$

$tg\angle LCH = \frac{AL}{LC} = \frac{2}{b+c}$

$\frac{b}{5} = \frac{2}{b+c} \Rightarrow b^2+bc = 10$

$\Downarrow$

~~$a=\sqrt{10}$~~ Если $a=\sqrt{10}$, $\angle CSQ$ — максимальный. $\sqrt{10} < 5 \Rightarrow$ S лежит на AB $\Rightarrow$ условие выполнено.

Чистовик лист 12

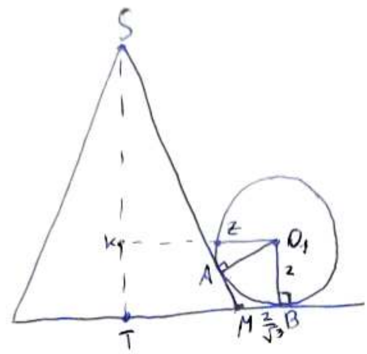
Ответ: $LS = \sqrt{10}$.

Чистовик.

Задача 4

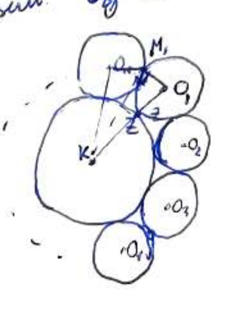
Дано:
конус
$\angle$ при верш $= 60^\circ$
17 шаров
r(шаров) $= 2$.
Все касан.

Найти:
$r_{осн}$.



Рассмотрим картину для одного шара. Пусть он касается
боковой поверхности конуса в точке, а ~~основ~~ плоскости основания в т. B
~~Через~~ Проведем плоскость α ~~А плоскости основания и проходящую через~~
~~образующую~~ конуса, содержащую в себе точку A. Из
~~соображений симметрии т. B~~ и центр шара ~~также~~ будет принадлежать этой
~~плоскости. ⇒ прямы~~
проходящую через вершину конуса S, ~~вершину~~ центр шара O и
перпендикулярную основанию. ⇒ точка B будет ~~лежать~~ в этой
плоскости, образующая, содержащая т. A. будет ~~лежать в~~
этой ~~плоскостью~~.
содержащую в себе прямые SA и прямую MB, где M - т.
пересечения SA и основания. Эта плоскость $\perp$ основанию ⇒
~~$B, O_1 \in \alpha$~~. прямая $O_1B \in \alpha$, где O_1 - ц. шара. Получим
на проекцию на плоскость α. Проведем $O_1Z \parallel MB$, $Z \in$ ~~ко~~
окружности. (проек. шара) ~~А~~ $\angle SMT = 60^\circ$, где T - ц. основания
конуса. $\Rightarrow \angle AO_1B = \cancel{120}60^\circ \Rightarrow \angle MOB = 30^\circ \Rightarrow MB = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $O_1Z = 2$.

Проведем плоскость $\beta \parallel$ плоскости основания. $O_1Z \in \beta$. Для
каждого шара картинка будет идентична ⇒ ~~проекция~~ сечение всей
конструкции ~~β~~ ~~на~~ плоскостью β будет выглядеть так; при этом
маленьких окружностей 17.



$O_1O_2O_3 \ldots O_{17}$ - правильный 17-ти
угольник. (из соображений центральной
симметрии) ~~⇒~~

Найдем KO_1. ~~R~~ (R радиус описанной около
17 уг. окружности). M_1 - т. кас. окружностей
с центрами O_1 и O_{17}.

Чистовик лист 13

$\angle M_1KO_1 = \frac{1}{34} \cdot 360^\circ$ (из соображений симметрии)

$\Downarrow$

~~$KO_1 = M_1O_1 \cdot ctg\left(\frac{360^\circ}{34}\right) = 2 \cdot ctg\left(\frac{360^\circ}{34}\right)$ (из прямоугольного~~

~~Заметим, что $KO_1 = TM + MB$~~

~~$\triangle$ $\angle O_1M_1K = \frac{1}{2}\angle O_1 M_1 O_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{180(15)}{17} = \frac{180^\circ \cdot 15}{34}$~~

~~По т. синусов $\triangle KM_1O_1$~~

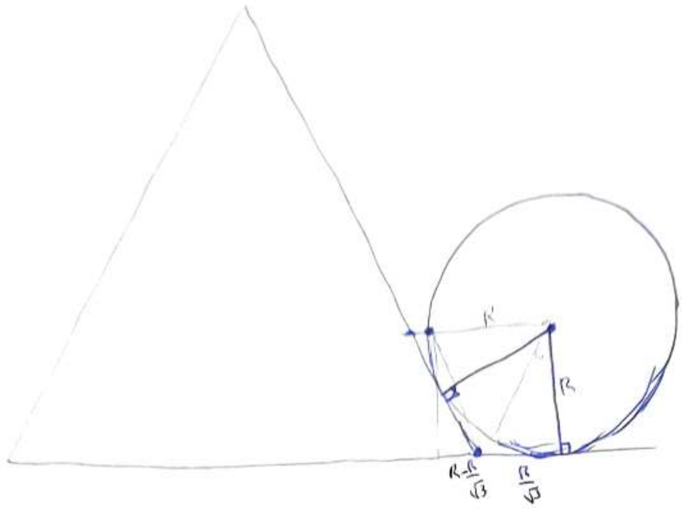
~~$\frac{KO_1}{\sin\angle KM_1O_1} = \frac{M_1O_1}{\sin\angle M_1KO_1} \Rightarrow \frac{KO_1}{\sin\left(\frac{180^\circ \cdot 15}{34}\right)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{180 \cdot 2}{34}\right)} \Rightarrow KO_1 = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{180^\circ \cdot 15}{34}\right)}{\sin\left(\frac{180 \cdot 2}{34}\right)}$~~

KO_1 $\angle O_1MK = 90^\circ$ (т.к. MKM_1 - общ. кас. окр с центрами O_1 и O_1 из соображений симметрии) $\Rightarrow KO_1 = MO_1 \cdot ctg\left(\frac{360^\circ}{34}\right) = 2 \cdot ctg\left(\frac{360^\circ}{34}\right)$.

Заметим, что $KO_1 = TM + MB \Rightarrow TM$ - радиус ~~конуса~~ $= 2 \cdot ctg\left(\frac{360^\circ}{34}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}$

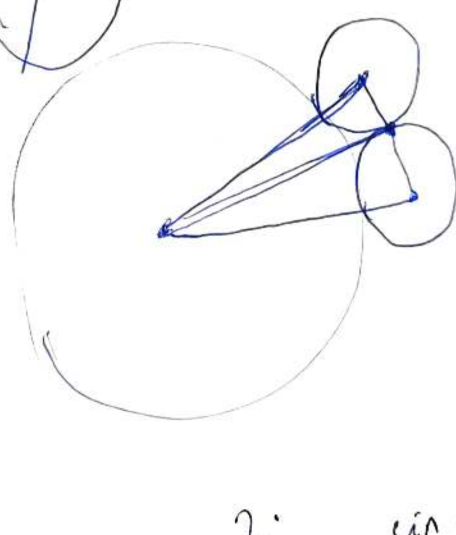
Ответ $2 \cdot ctg\left(\frac{360^\circ}{34}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Черновик



$360 \,\underline{|17}$

$\frac{360}{17}$



2. $\sin \frac{15}{34}\pi$

$\sin \frac{2}{34}\pi$

$180(n-2)$

$\frac{180 \cdot 15}{17} = \frac{180 \cdot 15}{34}$

Черновик лист 15