МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Покровский Иван Денисович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	15	5	15

N1 Чистовик

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = 1$$

Докажем с помощью метода мат индукции, что для любого $n \geq 1$ верно $\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{n+n+1}{(n\cdot(n+1))^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

База индукции: $n=1$.

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} = 1 - \frac{1}{(1+1)^2} \text{ - верно}$$

Переход: $n-1 \rightarrow n$: $\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{(n-1)+n}{((n-1)\cdot n)^2} +$

Чистовик

Стр 2

$$+\frac{n+(n+1)}{(n\cdot(n+1))^2}=\left(\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\ldots+\frac{(n-1)+n}{((n-1)n)^2}\right)+$$

$$+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=1-\frac{n^2+2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=$$

(по предположению индукции)

$$=1-\frac{n^2}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

Доказано.

Тогда при $n=39$ $B=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\ldots+\frac{79}{(39\cdot40)^2}=$

$=1-\frac{1}{40^2}$

1 больше $1-\frac{1}{40^2}$, а значит $A>B$

N3 чистовик

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[11]{1-(f(x))^{11}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[11]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}\right)^{11}}}=\frac{1}{\sqrt[11]{1-\frac{1}{1-x^{11}}}}=\frac{1}{\sqrt[11]{1+\frac{1}{x^{11}-1}}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt[11]{\frac{x^{11}}{x^{11}-1}}}=\sqrt[11]{1-\frac{1}{x^{11}}}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[11]{1-(f(f(x)))^{11}}}=\frac{1}{\sqrt[11]{1-\left(\sqrt[11]{1-\frac{1}{x^{11}}}\right)^{11}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[11]{1-\left(1-\frac{1}{x^{11}}\right)}}=\frac{1}{\sqrt[11]{\frac{1}{x^{11}}}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

$$f(f(f(x)))=x\Rightarrow x=f(f(f(x)))=$$

$$=f(f(f(f(f(f(x))))))=\ldots=\underbrace{f(\cdots(f}_{3n}(x))))=(*)$$

чистовик

стр 4

$$1306 = (3 \cdot 435) + 1 \Rightarrow f(2022) \overset{*}{=} f(f\underbrace{(\dots(f(2022))\dots)}_{3n}))$$

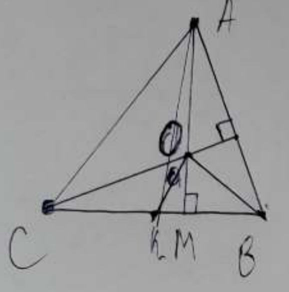
$n = 435$

$$f\underbrace{(f(\dots(f}_{1305}(2022))\dots)) = f\underbrace{(\dots(f}_{1306}(2022))\dots))$$

$$f(\dots(f(2022))\dots)) = f(2022) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$

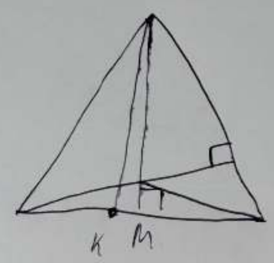
N7 Чистовик



$CM=3$

$MB=5$

$MK=?$



$\triangle CMO$ подобен $\triangle AMB$, отсюда получим, что $CM \cdot MB = OM \cdot AM = 15$

В $\triangle OKA$ по т. синусов $\frac{OK}{\sin\angle OAK} = \frac{AO}{\sin\angle OKA}$

$\sin\angle OKA = \frac{\sin\angle OAK \cdot AO}{OK}$, $\sin\angle OAK = \frac{MK}{AK}$, обозначим $AM = h$ $OM = l$ $MK = x$, тогда можем сказать, что $\frac{AO \cdot MK}{AK \cdot OK}$ должно принимать макс значение

$\sin\angle OKA = \cancel{\frac{x(h-l)}{\sqrt{h^2+x^2}\sqrt{l^2+x^2}}} = \frac{x(h-l)}{\sqrt{h^2+x^2}\sqrt{l^2+x^2}}$, значит $\frac{\sqrt{h^2+x^2} \cdot \sqrt{l^2+x^2}}{x}$ принимает минимум значение,

$\frac{\sqrt{h^2+x^2}\sqrt{l^2+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{h^2 \cdot l^2}{x^2} + x^2 + h^2 + l^2}$, знаем, что

Чистовик

Стр 6

$\frac{h^2 \cdot l^2}{x^2} + x^2 \geq 2hl$ и равенство будет если

$\frac{h^2 \cdot l^2}{x^2} = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{h \cdot l} = \sqrt{15}$

Ответ: $MK = \sqrt{15}$

N 2

Распишем все двухзначные числа которые кратны 19: 19, 38, 57, 76, 95,
дальше уже трехзначные
Аналогично для 23: 23, 46, 69, 92,
дальше уже трехзначные
Распишем все варианты нашего числа,
которая начинается с цифры 4

(стр 7)

Чистовик

$$\begin{tikzcd}
& 4 \arrow[d] & \\
& 6 \arrow[d] & \\
& 9 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
2 \arrow[d] & & 5 \arrow[d] \\
3 \arrow[d] & & 7 \arrow[d] \\
8 & & 6
\end{tikzcd}$$

~~первые цифры 4,6~~

После 8 ничего не идём

Значит такая ветка может быть только в конце

Получим цикл 69576

Если без левой ветки, то 2021 - 2 ← это т.к первые цифры 4,6

2019 даёт остаток 3 при делении на 4

⇒ Последняя цифра - 7

~~Если есть левая~~ ~~Ответ: 7~~

Если есть левая ветка, то последняя цифра будет 3 т.к в конце мы пойдём по лев., а не по правой (не 957..., а 923) Ответ: 7,3

№6 Чистовик (Стр 8)

Пусть $tg\, x = y$

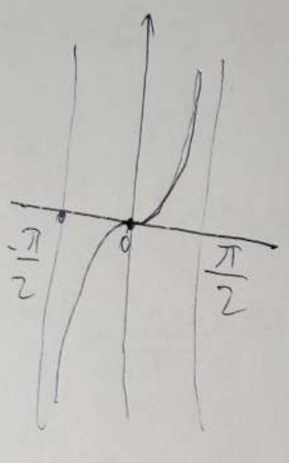
$f(y) = ay^3 + (2-a-a^2)y^2 + (a^2-2a-2)y + 2a = 0$

$f(1) = 0 \Rightarrow f(y) = (y-1)(ay^2 + (2-a^2)y - 2a)$

Решим $ay^2 + (2-a^2)(y-2a)$ от y

$\frac{-(2-a^2) \pm (2+a^2)}{2a} = \frac{-2}{a}$; а или a или $-\frac{3}{a}$

Отрицательное как график $tg(x)$



$\Rightarrow$ наибольшее расстояние между корнями не меньше $|arctg\, 1 - arctg\, 0| = \left|\frac{\pi}{4} - 0\right| = \frac{\pi}{4}$, а если $a = 0$, то расстояние ровно $\frac{\pi}{4}$ Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

$t - tg\,x\, t - \frac{1}{2}$

№5 Чистовик (СТР 9)

Предположим, что только одно из чисел a, b, c, — положительно. Пусть — $a>0$, тогда

$b\le 0$, $c\le 0$; $a>0\ge b\ge c$

Значит среднее либо b либо c, но b и c не положительны. $\Rightarrow$ ~~$|c|>|a|$~~

Значит должно быть хотя бы два положительных числа. Пусть это b и c тогда $a\le 0$

$b\ge c\ge 0\ge a$. Тогда среднее b или c т.к они больше 0 условие выполняется

Значит условие равносильно тому, что 2 числа больше 0

$a=t^3-81t>0$, $t(t-9)(t+9)>0$

$t\in(-9;0)\cup(9;0)$

Чистовик (стр 10)

$b = 11^t - 121 > 0$

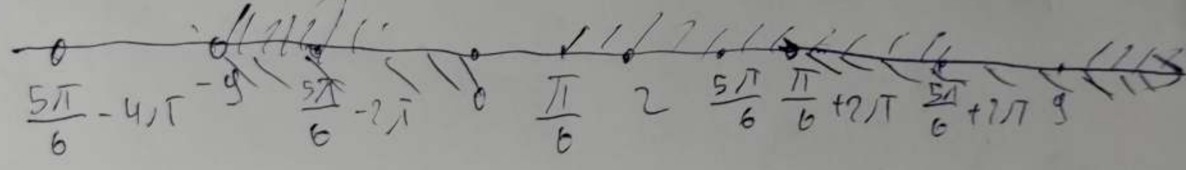
$11^t > 11^2$

$t > 2$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$

$\sin t > \frac{1}{2}$

$t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$



Ответ: $t \in \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \cancel{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi\right)}$

$\cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi\right) \cup (9; +\infty)$

n

2с

№2 Черновик

2021 значное число

первая цифра 4 ⇒ вторая цифра 6

Т.к. только 46 делится либо на 23 либо на 19 в промежутке [40; 49]

По такому же принципу понимаем что третья цифра 9 т.к. 69 : 23

Четвертая цифра 5 т.к. 95 : 19

$19 \times 5 = 95$

Итого получаем первые четыре цифры нашего числа:

$\underbrace{4\ 6\ 9\ 5}$, 7 6 9 5 7 6 9 5 7

Продолжив мы можем заметить повторяющуюся последовательность из 4 цифр 6957

первая цифра – 4 ⇒ 6957 повторяется на протяжении 2020 цифр ⇒ последняя цифра – 7 Ответ: 7

Черновик (СТР 12)

№3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}$$

Вычислить $f(f(f(f(f(\ldots f(2022))))))$

f 1306 раз

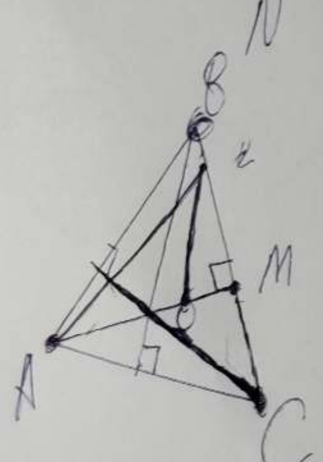
$$\frac{1}{\sqrt[11]{1^{11}-x^{11}}} \qquad f(x)=\left(\sqrt[11]{1^{11}-x^{11}}\right)^{-1}$$

№1

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2}}$$

$$A=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2}}=$$

№7



MK − ?

ВКО искомое?

BM = 5, MC = 3

$\Rightarrow$ BC = 8

Черновик

(СТР 13)

N 3

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[11]{1 - \frac{1}{1-x^{11}}}} = \sqrt[11]{\frac{1}{-\frac{x^{11}}{1-x^{11}}}}$$

$$= -\sqrt[11]{\frac{1-x^{11}}{x^{11}}} = -\sqrt[11]{-1+x^{-11}}$$

$$= -\sqrt[11]{-x^{11}+1} = \sqrt[11]{1-x^{11}}$$

$$\Rightarrow f(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$$

$\Rightarrow$ при чётном кол-ве f; $f(f(f \ldots)) = \frac{1}{f(x)}$

при нечётном кол-ве f; $f(f(f \ldots)) = f(x)$

$\Rightarrow$ при кол-ве f равном 1306

$$f(f(f \ldots f(2022))) = \sqrt[11]{1-2022^{11}}$$

$=$

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников «Ломоносов»
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А. Садовничему

ученика
11-Ф класса школы №2107
г. Москвы
Ивана Денисовича
Покровского

Апелляция

*Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (**80** баллов) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку в сданной работе я решил 6 задач из 7-и, а после опубликования технических баллов повторно проверил свою работу и внимательно прочитал опубликованные официальные решения, и считаю, что мои решения верны, и моя работа могла бы заслуживать оценки 90 баллов (15 баллов x 6 задач).*

27.03.2022

ИвА