МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Полосин Павел Ильич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	10	15	0

Задача №1 Чистовик

а) Заметим, что $B = \dfrac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$$= \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1)}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}, \text{ причем } \sqrt{3}-1>0$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

б) Рассмотрим A:

1) $\dfrac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2} = \dfrac{k+k+1}{k^2\cdot(k+1)^2} = \left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)^2\cdot(2k+1),$

Ведь $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$

2) $\left(\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{2}{k(k+1)}+\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)\cdot(2k+1) =$

$$= \left(\frac{1}{k^2}-2\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}\right)(2k+1) =$$

$$= \left(\frac{1}{k^2}-\frac{2}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2}{k+1}\right)(2k+1) =$$

$$= \left(\frac{1-2k}{k^2}+\frac{1+2k+2}{(k+1)^2}\right)(2k+1) =$$

Задача № 1 чистовик

$$\left(\frac{1-2k}{k^2}+\frac{3+2k}{(k+1)^2}\right)(2k+1)=$$

$$=\frac{-4k^2+1}{k^2}+\frac{4k^2+8k+3}{(k+1)^2}=$$

$$=-4+\frac{1}{k^2}+\frac{4(k^2+2k+1)-1}{(k+1)^2}=$$

$$=-4+\frac{1}{k^2}+\frac{4(k+1)^2-1}{(k+1)^2}=$$

$$=-4+\frac{1}{k^2}+4-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$$

Таким образом;

$$A=\frac{1}{1}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{48^2}-\frac{1}{49^2}+\frac{1}{49^2}-\frac{1}{50^2}$$

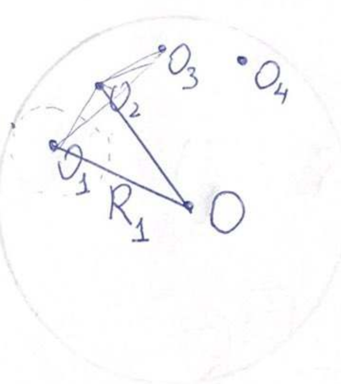
$$=1-\frac{1}{50^2}$$

Тогда очевидно, что $\underline{A<B}$

Задача №4 Чистовик

1) Из условия: Шары расположены по кругу, причем их центры расположены так, что они образуют правильный 19-ти угольник.

Введем обозначения, пусть O — это центр конуса. $O_1 \dots O_{19}$ — проекции центров шаров на основания.



2) $\angle O_1OO_2 = \frac{360^\circ}{19}$

$O_1O_2 = 6 = 2r$ (шары касаются)

Тогда $R_1 = $

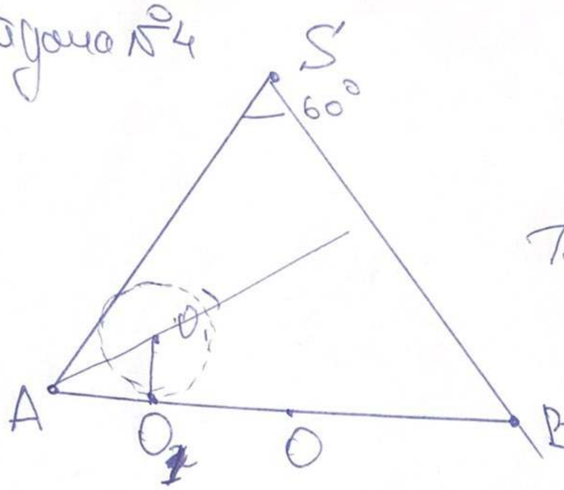
$= \frac{O_1O_2}{\sin(\angle O_1O_3O_2)\cdot 2} =$

$= \frac{6}{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{19}\right)\cdot 2} = \frac{3}{\sin\left(\frac{180^\circ}{19}\right)}$,

где $\angle O_1O_3O_2 = \frac{1}{2}\angle O_1OO_2$ (вписанный)

3) Рассмотрим осевое сечение конуса:

Задача №4



$\triangle ASB$ — р/с ($AS = SB$, и $\angle ASB = 60°$)

Тогда сечением шара, который касается AS и AB является окружность с центром O_1', где O_1 — проекция O_1'.

Поэтому $O_1O_1' = 3 = r$. $\angle O_1AO = \frac{1}{2}\angle SAB = 30°$
(AO_1' — бис $\angle SAB$)

$$AO_1 = \frac{O_1O'}{tg\frac{\angle SAB}{2}} = \frac{O_1O'}{tg\,30°} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3\sqrt{3}$$

Найдем $R_{осн}$:

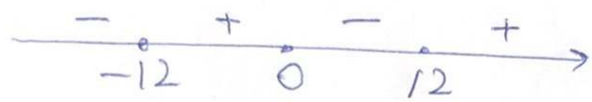
$$\boxed{R_{осн} = R_1 + AO_1 = \frac{3}{\sin\left(\frac{180°}{19}\right)} + 3\sqrt{3}}$$

Задача №5 Чистовик

$a = t^3 - 144t$; $b = 2^t - 256$; $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Исследуем, когда каждое из чисел больше нуля.

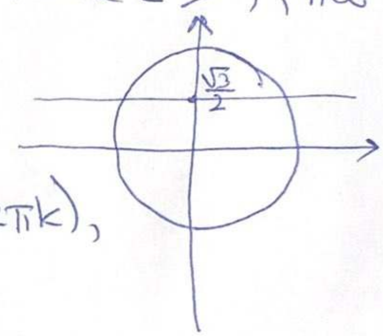
1) $a > 0$: $t(t-12)(t+12) > 0$



$t \in (-12; 0) \cup (12; +\infty)$

2) $b > 0$: $2^t - 2^8 > 0$ (т.к. $2^x \nearrow$), то $t > 8$

3) $c > 0$: $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$:



при $t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Если "среднее" из чисел > 0, то хотя бы два числа больше нуля: Возможны три случая:

I $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \end{cases}$ а) $\begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi k > -12 \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > -\frac{6}{\pi} - \frac{1}{6} \\ k < -\frac{1}{3} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Нетрудно убедиться, что этому удовлетворяет $k \in \{-1, -2\}$

б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k > 12 \Rightarrow k \in [2; +\infty)$.

5

$\Rightarrow t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $k \in \{-1; -2\} \cup [2; +\infty)$

Задача № 5.

(II) $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t \in (-12; 0) \cup (12; +\infty). \\ \left[t > 8 \right. \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow t \in (12; +\infty).$

(III) $\begin{cases} b>0 \\ c>0 \end{cases}$ $\begin{cases} t > 8 \\ t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi k > 8 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k > \frac{4}{\pi} - \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \boxed{k \in [2; +\infty) \text{ и } k \in \mathbb{Z}}$

$t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$

~~Ответ: это объединение случаев…~~

~~Пересечение…~~ при $k=2$ $\frac{13\pi}{3} > 12$

Ответ: $t \in \left(-\frac{11\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup$
$\cup (12; +\infty).$

* Данный ответ (объединение трёх) включает и тот случай, когда все $a, b, c > 0$.

Задача №2

Заметим, что "возможные" двузначные числа, кратные 23 — это:

$\underline{\underline{23}}$, $23 \cdot 2 = \underline{\underline{46}}$; $23 \cdot 3 = \underline{\underline{69}}$; $23 \cdot 4 = \underline{\underline{92}}$

19-ти: $\underline{\underline{19}}$; $19 \cdot 2 = \underline{\underline{38}}$; $19 \cdot 3 = \underline{\underline{57}}$; $19 \cdot 4 = \underline{\underline{76}}$, $19 \cdot 5 = \underline{\underline{95}}$

Начнем строить число:

~~1)~~ 1) На второй позиции может находиться только 9-ка, т.к из "возможных" только 19 начинается на 1 $\Rightarrow$
$\overline{19\ldots}$

2) $\overline{19x\ldots}$ на месте x два варианта: 2 или 5

а) Если 2: $\overline{192y\ldots}$ $\Rightarrow$ ~~вместо~~ на месте y только 3
~~всему~~ если $y=3$, то следующая за ней цифра — это 8 (38), но на 8 не начинается ни одно число $\Rightarrow x \neq 3$

б) ~~Если~~ $\Rightarrow x=5 \Rightarrow \overline{195y\ldots}$, тогда $y=7$ (57)
~~195y~~. $\Rightarrow \overline{19572\ldots} \Rightarrow z=6$ (только 76)
$\overline{19576\ldots}$, н/а на 6 начинается лишь ~~3~~ 69

Таким образом $\overline{1{,}\underline{95769}{,}k\ldots}$

Задача №2.

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что на месте k может стоять только 5.

Поэтому число выглядит так:

$$\overset{1}{1}\ \underbrace{\overset{2}{9}\ \overset{3}{5}\ \overset{4}{7}\ \overset{5}{6}}\ \underbrace{\overset{6}{9}\ \overset{7}{5}\ \overset{8}{7}\ \overset{9}{6}}\ \underbrace{\overset{10}{9}\ 5\ 7\ 6}\ 9\ldots$$

Тогда на позициях 2, 6, 10 ... стоят 9

3, 7, и т.д стоит 5

4, 8.. и т.д стоят 7

5, 9... и т.д стоят ~~9~~6

Заметим

$$5+4k=2021 \Rightarrow 4k=2020+1-1-4=2016$$

$$k=\frac{2016}{4}\in\mathbb{Z} \Rightarrow$$ на 2021 позиции стоит 6.

Ответ: 6.

Задача № 3. Чистовик

1) пусть $f^{(n)}(x)$ – означает, что функцию f применили n раз

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1 - \frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{1-x^5}}{\sqrt[5]{\cancel{1}-x^5-\cancel{1}}} =$

$= -\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x} = f^{(2)}(x)$

$f(f(f(x))) = f^{(3)}(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1 + \frac{1-x^5}{x^5}}} =$

$= \frac{1 \cdot \sqrt[5]{x^5}}{\sqrt[5]{\cancel{x^5}+1-\cancel{x^5}}} = x$

Таким образом $f^{(4)}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

$f^{(5)}(x) = f^{(2)}(x) =$, $f^{(6)}(x) = f^{(3)}(x)$; $f^{(7)} = f^{(4)}(x)$

$= -\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x}$ и т.д

Т.е при $n \vdots 3$: $f^{(n)}(x) = f^{(3)}(x) = x$

при $n \overset{3}{\equiv} 1$: $f^{(n)}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

при $n \overset{3}{\equiv} 2$: $f^{(n)}(x) = f(f(x)) = -\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x}$

$1303 = 3 \cdot 434 + 1 \overset{3}{\equiv} 1$

$\Rightarrow f^{1303}(2022) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

9

Задача №6 Чистовик

$$a\,ctg^3x + (a^2-a-3)\,ctg^2x + (3-3a-a^2)\,ctg\,x + 3a = 0$$

Пусть $ctg\,x = m$,

$$am^3 + (a^2-a-3)m^2 + (3-3a-a^2)m + 3a = 0$$

① При $a=0$: $-3m^2+3m=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right. \Rightarrow$

Обратная замена, $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} ctg\,x=0 \\ ctg\,x=1 \end{array}\right. \\ x\in(0;\pi) \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{4};\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

② $a\neq0$: $m=1$ корень уравнения

$$\cancel{a + a^2 - a - 3 + 3 - 3a - a^2 + 3a} = 0$$

Поделим на $(m-1)$ по схеме Горнера:

	a	a^2-a-3	$3-3a-a^2$	$3a$
1	a	a^2-3	$-3a$	0

~~Квад~~ Тогда: $am^2+(a^2-3)m-3a=0$

При $a\neq0$, по т. Виета: $\left\{\begin{array}{l} m_1+m_2=\frac{3-a^2}{a} \\ m_1m_2=\frac{-3a}{a} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} m_2=-a \\ m_3=\frac{3}{a} \\ m_1=1 \end{array}\right.$ – корни многочлена

~~[illegible]~~ Черновик

Тогда обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} ctg\,x=1, \\ ctg\,x=a \ \cancel{(-1)} \\ ctg\,x=-\frac{3}{a} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4} \\ x=\cancel{\pi}\ arcctg(a) \\ x=\cancel{\pi}\ arcctg(-\frac{3}{a}) \end{array}\right.$$

Рассмотрим нахождение наибольшего расстояния графически: $b(a;t)$

~~Наш~~ Минимально при $\min(AA_1; BB_1)=4$

при $a=-1$ или $a=3$

Тогда при $a\in\{-3;1\}$ $t=1$, $t=-3$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} ctg\,x=1 \\ ctg\,x=-3 \end{array}\right. \\ x\in(0;\pi) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4} \\ x=\pi-arcctg(3) \end{array}\right.$$

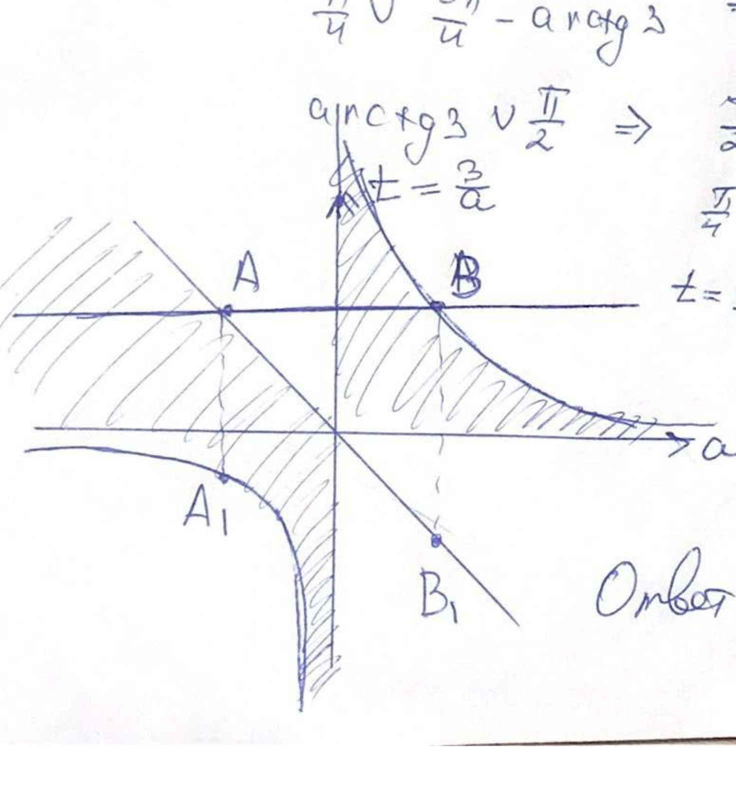
$\Rightarrow$ растание $\left(\frac{3\pi}{4}-arcctg\,3\right)$

при $a=-3;1$

Сравнивая I и II:

$\frac{\pi}{4} \vee \frac{3\pi}{4}-arcctg\,3 \Rightarrow$ [illegible]

$arcctg\,3 \vee \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}>arcctg\,3$, тогда $\frac{\pi}{4}$ - наименьшее расстояние.



~~т.А~~

т. $A(-1;1)$ т. $B(3;-1)$

т. $A_1(-1;-3)$ т. $B(3;-3)$

Ответ: при $a=0$; $\rho=\frac{\pi}{4}$

Черновик

Задача №1

$$A = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot49)^2} + \frac{99}{(49\cdot50)^2}$$

z:

$$\frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4\cdot9} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{27+5}{9}\right) = \frac{32}{4\cdot9} = \frac{32}{36}$$

$$\frac{32}{4\cdot9} + \frac{7}{(3\cdot4)^2} = \frac{32}{4\cdot9} + \frac{7}{9\cdot4\cdot4} =$$

$$= \frac{1}{4\cdot9}\left(32 + \frac{7}{4}\right) = \frac{1}{4\cdot9}\left(\frac{128+7}{4}\right) =$$

$$= \frac{135}{4^2\cdot9}$$

$10 + 4k = 10$

$2 + 4k = 2021$

$\frac{2021}{2}$

$2020 + 1 - 1 =$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\left(\left(3^{\frac{1}{2}}+1\right)^2\right)\left(4-2\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}+1\right)^2\left((\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}+1\right) =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(3-1)^2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{(2^2)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

Черновик

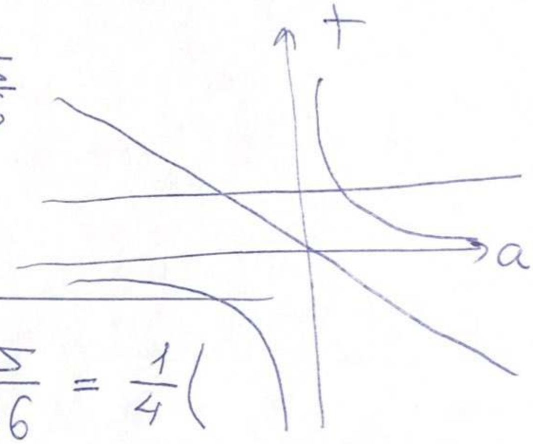
19 или на

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2} + \frac{99}{49^2\cdot 50^2} = \frac{3\cdot 49^2\cdot 50^2 + 99\cdot 2^2}{}$$

$$\frac{3}{1\cdot 2} + \frac{99}{49\cdot 50} = \frac{3\cdot 49\cdot 50 + 99\cdot 2}{49\cdot 50\cdot 2}$$

$$\frac{3}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3} = \frac{3}{2} + \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{2} - \frac{5}{3} = \frac{15-10}{6} = \frac{5}{6}$$



$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} = \frac{1}{4}($$

$$\times\begin{array}{r}16\\9\end{array}$$

$$90+54 = 90+10+44 = 144$$

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{3}{8}$$

$$k(k+1) = k^2+k$$

$$(k+1)(k+2) =$$

$$= k^2+2k+k+2 =$$

$$= k^2+3k+2 =$$

$$= k^2+k+2k+2$$

$$\frac{k+2}{k^2+k} + \frac{k+4}{k^2+k} - \frac{k+4}{2k+2}$$

$$\frac{1}{k^2+k} - \frac{1}{2(k+1)} =$$

$$= \frac{2 -}{k(k+1)}$$

Черновик

№1

$$\frac{3}{1\cdot 2} > \frac{3}{(1\cdot 2)^2}$$

$360 \,|\, 19$

~~2K+1~~ $\quad \frac{k+2}{k(k+1)} + \frac{k+4}{(k+1)(k+2)}$

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} =$$

$$\frac{k+4}{k+1} - \frac{k+4}{k+2} = (k+4)\left(\frac{\cancel{k}+2-\cancel{k}-1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{k+4}{}$$

$$(k+2)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + (k+4)\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= \frac{k+2}{k} - \frac{k+2}{k+1} + \frac{k+4}{k+1} - \frac{k+4}{k+2} =$$

$$= \frac{k+2}{k} - \frac{k+4}{k+2} + \frac{1}{k+1}(\cancel{k}+4-\cancel{k}-2)$$

$$\frac{k}{(k-1)^2(k-2)^2} + \frac{k+2}{(k-1)(}$$

$$\frac{(k-2)}{(k-3)^2(k-4)^2} + \frac{k}{(k-2)^2(k-3)^2}$$