МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Полубояринов Иван Михайлович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	10	15	0

№1 | Чистовик №1

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} = \sqrt[6]{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[6]{(4+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3}+1)} = \sqrt[6]{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} =$$

$$= \sqrt[6]{16-12} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2}$$

$$A = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} = \sum_{n=1}^{59} \frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$$

$$\sum_{n=1}^{2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4\cdot 9} = \frac{27+5}{4\cdot 9} = \frac{32}{4\cdot 9} = \frac{8}{9} = \frac{(2+1)^2-1}{(2+1)^2}$$

Докажем по индукции, что $\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = \frac{(N+1)^2-1}{(N+1)^2}$

1) база индукции: для $N=2$ доказано: $\frac{3}{4} + \frac{5}{4\cdot 9} = \frac{8}{9}$.

2) Пусть доказано, что $\sum_{n=1}^{k} \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = \frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}$, докажем из этого для $k+1$: $\sum_{n=1}^{k+1} \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} =$

$$= \frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2} + \frac{2(k+1)+1}{((k+1)(k+2))^2} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2 - (k+2)^2 + 2(k+1) + 1}{((k+1)(k+2))^2}$$

$$-(k+2)^2 + 2(k+1) + 1 = -k^2 - 4k - 4 + 2k + 2 + 1 = -k^2 - 2k - 1 = -(k+1)^2$$

$$\sum_{n=1}^{k+1} \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2 - (k+1)^2}{(k+1)^2(k+2)^2} = \frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2}$$ — ч. т. д.

Вывод: $\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = \frac{(N+1)^2-1}{(N+1)^2}$.

$$B = \sum_{n=1}^{59} \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = \frac{60^2-1}{60^2} = 1 - \frac{1}{60^2}, \quad B < 1. \quad A = 1$$

$A > B$

Ответ: $A > B$.

Чистовик N2

N2

Двузначные числа, кратные 19 и 23:

19	23
38	46
57	69
76	92.
95	

Значит если первая цифра - 4, то вторая - 6 (число 46 единств. начинается на 4 из кратных 19 или 23). Аналогично за 6 идёт 9 (число 69).
После этого возможно разделение (числа 95 и 92)

1) 95:

Продолжая конструировать число, находим, что цифры начинают повторяться.

4 6 9 5 7 6

дальше идёт повторение блока из 4 цифр „6957"

2) 92:

4 6 9 2 3 8

Чисел на 8 нет, значит конструировать число дальше невозможно.

Значит либо блок 69238 стоит на конце загаданного числа, либо отсутствует. Если он стоит на конце, то между первой „4" и последним блоком из 5 цифр „69238" должны находиться 2021-1-5 = 2015 цифр, полностью состоящих из блоков первого типа („6957"). Но 2015 ⋮ 4, а значит такой случай невозможен.

Если всё число состоит из блоков 1 типа: 4 6957 ... 6957 (2020 : 4 = 505 раз „6957")

то на конце числа стоит „7".

Ответ: 7.

Чистовик N3

N3

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

$f(f(\dots f(2022)\dots))$

1304 раза

$f(2022) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-2022^7}}$

$f(f(2022)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-2022^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-2022^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{-2022^7}{1-2022^7}}} =$

$= \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

$f(f(f(2022))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{2022^7-1}{2022^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{2022^7}}} =$

$= \sqrt[7]{2022^7} = 2022.$

То есть 3 применения функции дают опять 2022.

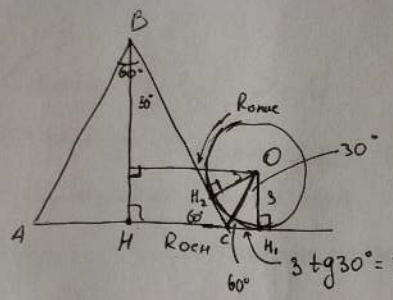
Значит

$\underbrace{f(f(\dots f(2022)\dots))}_{1304\text{ раза}} = f(f(2022))$, т.к. $1304 = 2 + 434 \cdot 3$

$f(f(2022)) = \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

Ответ: $\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

Чистовик N4



$3 \cdot tg30° = 3\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

N4

CO – бисс. $\angle H_2CH_1$

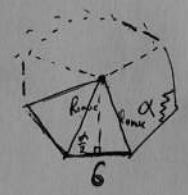
$\angle OCH_1 = \frac{1}{2}\angle H_2CH_1 = \frac{1}{2}(\angle HBC + \angle BHC) = 60°$

$CH_1 = OH_1 \cdot ctg60° = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

Центра шаров образуют правильный 11-ти угольник со стороной $2 \cdot 3 = 6$.

$R_{опис}$ – радиус описанной около этого 11-ти угольника окружности

$R_{осн} = R_{опис} - \sqrt{3}$, т.к. плоскость описанной окружности параллельна плоскости основания ($R_{опис} = HC + CH_1 = R_{осн} + \sqrt{3}$).



Сумма углов 11-ти угольника:

$S = 180°(11-2) = 11 \cdot \alpha$, α – угол между соседними сторонами 11-ти угольника

$\alpha = \frac{180 \cdot 9°}{11}$

$R_{опис} = \frac{\frac{6}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{\cos\frac{90 \cdot 9°}{11}}$

$R_{осн} = \frac{3}{\cos\frac{90 \cdot 9°}{11}} - \sqrt{3} = \frac{3}{\cos\frac{810°}{11}} - \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{3}{\cos\frac{810°}{11}} - \sqrt{3}$.

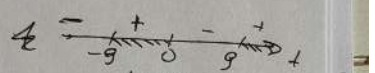
Чистовик N5

N5

Если $x_2 > 0$, то и $x_3 > 0$.

Значит среднее будет положительным тогда и только тогда, когда 2 любые числа из a, b, c будут положительными.

$a > 0$ $\quad t^3 - 81t > 0 \quad t(t-9)(t+9) > 0$



$t \in (-9;0) \cup (9;+\infty)$.

$b > 0$ $\quad 11^t - 121 > 0 \quad 11^t > 11^2$

$t > 2$, $t \in (2;+\infty)$

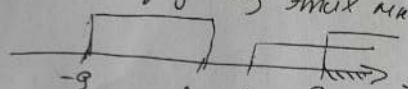
$c > 0$ $\quad \sin t - \frac{1}{2} > 0 \quad \sin t > \frac{1}{2}$

$t \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$

Нужно объединить пересечения хотя бы двух из этих множеств:

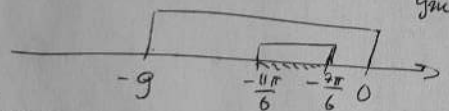
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} a>0 \\ c>0 \end{cases} \quad (2) \\ \begin{cases} b>0 \\ c>0 \end{cases} \quad (3) \end{array}\right.$$

(1):



$t > 9$

(2): Имеет смысл рассматривать только $t \in (-9;0)$, т.к. все $t > 9$ уже удовлетв.



$-9 < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$-\frac{9}{2\pi} - \frac{1}{12} < n$

$-1 \leqslant n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < 0, n \in \mathbb{Z}$

$n < -\frac{5}{12}$

$n \leqslant -1, n \in \mathbb{Z}$

$n = -1$, $t \in (-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6})$.

(3): Имеет смысл рассматривать только $t \in (2;9)$, т.к. все $t > 9$ удовл.

$2 < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{12} < n$

$1 \leqslant n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < 9, n \in \mathbb{Z}$

$n < \frac{9}{2\pi} - \frac{5}{12}$, $\frac{9}{2\pi} > \frac{9}{2 \cdot 3{,}15} = 1{,}42$

$n \leqslant 1, n \in \mathbb{Z}$ $\Leftarrow$ $1{,}41 < \frac{5}{12} < 1{,}42$

$n = 1$, $t \in (\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6})$

Ответ: при $t \in (-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}) \cup (\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}) \cup (9; +\infty)$.

Чистовик N6

N6

$a\,ctg^3x + (2a^2-a-2)\,ctg^2x + (2-4a-2a^2)\,ctgx + 4a = 0$

наиб. расст. между корн. $\in (0;\pi)$ минимально

Пусть $ctgx = y$:

$ay^3 + (2a^2-a-2)y^2 + (2-4a-2a^2)y + 4a = 0$

1) $a = 0$

$0y^3 - 2y^2 + 2y + 0 = 0$

$y(y-1) = 0$

$y = 0$ $\quad$ $y = 1$

$ctgx = 0$ $\quad$ $ctgx = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Расст. между корнями: $\Delta x = \frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

2) $a \neq 0$

	a	$2a^2-a-2$	$2-4a-2a^2$	$4a$
1	a	$2a^2-2$	$-4a$	0

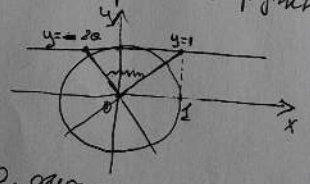
$(y-1)(ay^2 + 2a(a^2-1)y - 4a) = 0$

$\frac{D}{4} = (a^2-1)^2 + 4a \cdot a = a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2+1)^2$

$y = \frac{-a^2+1 \pm (a^2+1)}{a}$

$y = 1$ $\quad$ $y = \frac{-a^2+1+a^2+1}{a} = \frac{2}{a}$ $\quad$ $y = \frac{-a^2+1-a^2-1}{a} = -2a$

Выйдем на триг. окружность:



а) если $a > 0$, то $-2a < 0$.
Значит расстояние между корнями $y = 1$ и $y = -2a$ будет больше $\frac{\pi}{4}$, т.к. расстояние $\frac{\pi}{4}$ от $y=1$ до $y=0$.

б) $a < 0$, $\frac{2}{a} < 0$, аналогично расст. между $y = 1$ и $y = \frac{2}{a}$ больше $\frac{\pi}{4}$.
Значит наименьшее расст. $= \frac{\pi}{4}$, достигается при $a = 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ при $a = 0$.

№1 | Черновик. №7

$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$

$B = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \ldots + \frac{117}{(58\cdot59)^2} + \frac{119}{(59\cdot60)^2}$

№2

4 | 6 9 5 7 6 <

. . - 2 - 3 8 такого нет. ×

5

2021

⋮19	⋮23
19	23
38	46
57	69
76	92
95	

6 один блок из пяти

4 | 6 9 2 3 8

4 | 6 9 5 7 | 6 ..

Повт. блоки по 4.

Значит должен состоять из 2015 цифр из блоков 4

Но 2015 ⋮̸ 4, значит 8 не реализуется, в отличии от блоков по 4.

Зап. число

4 6957 6957 ... 695|7|

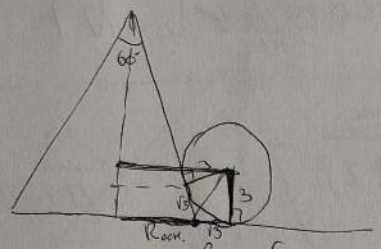
505 блоков по 4 цифры

$2020 : 4 = 505$

Отв: 7.

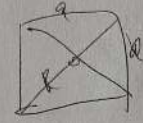
Черновик №8

№4.



Центры шаров образуют правильный 11-ти угольник.

810 | 11
-77 | 73(6)°
40
-33
70
-66
40
-33
70



$R = \frac{\frac{a}{2}}{\cos\frac{90}{2}} = \frac{a}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$\alpha = \frac{180\cdot 4}{6} = 120$.

$R = \frac{a}{2\cdot\cos 60^\circ} = \frac{a}{2\cdot\frac{1}{2}} = a$.

17 · 3,15 | 3
17
3,15
2205
+ 315
53,55

9·6 = 54.

Черновик №9

$f(f(f(f(f(f(f(f(x)))))))) = f(f(f(f(f(f(f(x)))))))^{x}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

$f(f(x))^{\wedge 3}$

$(2022-1)(2022^6+2022^5+\dots+2022+1)$

$2021.$

$f(f(\dots f(2022))\dots)$

1304 раз

$1304 \mid 3$

$12 \quad 434$

10

9

14

12

2

$f(2022) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-2022^7}}$

$f(f(2022)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-2022^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-2022^7}}} =$

$= \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-2022^7-1}{1-2022^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{2022^7}{2022^7-1}}} = \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

$f(f(f(2022))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{2022^7-1}{2022^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{2022^7-2022^7+1}{2022^7}}} = \frac{2022}{1} = 2022$

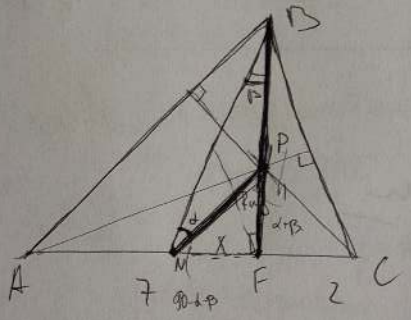
Цикл из 3 f обрайно делая число 2022.

$f(f(\dots\dots))$

434 блока из 3 f, дающих 2022

$= \left(\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}\right)^2$

Черновик N10



№7

α - макс.

Опишем около $\triangle BNP$ окружность

$\frac{BP}{\sin\alpha} = 2R \quad \sin\alpha = \frac{BP}{2R}$

При α - макс, sinα - макс.

⇓

R - минимум.

$R_{ug} = \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{2}$

$\frac{x}{\sin\beta} = 2R_{ug} = \sqrt{x^2+h^2}$. $\quad \sin\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} \quad \cos\beta = \frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}}$.

$PF = x\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) \qquad NP = \frac{x}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\frac{BP}{\sin\alpha} = \frac{PN}{\sin\beta} = \frac{x}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}}$. $\quad BP = h - x\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$.

$\sin\alpha = \frac{(h - x\operatorname{ctg}(\alpha+\beta))\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{x} = \frac{h\sin(\alpha+\beta)\sin\beta - x\cos(\alpha+\beta)\sin\beta}{x} =$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

$= \frac{h(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin^2\beta) - x(\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\sin^2\beta)}{x}$

$x\sin\alpha = h\sin\alpha\sin\beta\cos\beta + h\cos\alpha\sin^2\beta - x\cos\alpha\sin\beta\cos\beta + x\sin\alpha\sin^2\beta$.

$x\sin\alpha = h\sin\alpha\frac{xh}{x^2+h^2} + h\cos\alpha\frac{x^2}{x^2+h^2} - x\cos\alpha\frac{xh}{x^2+h^2} + x\sin\alpha\frac{x^2}{x^2+h^2}$

$x(x^2+h^2)\sin\alpha = h\sin\alpha xh + h\cos\alpha x^2 - x^2h\cos\alpha + x^3\sin\alpha$.

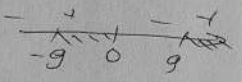
$(x^2+h^2)\sin\alpha = h^2\sin\alpha + xh\cos\alpha - xh\cos\alpha + x^2\sin\alpha$.

Черновик №11

№5

Если положительно среднее, то положительно и ещё одно число. Значит нужно найти такие t, при которых решения как минимум 2 из 3 следующих уравнений положительны.

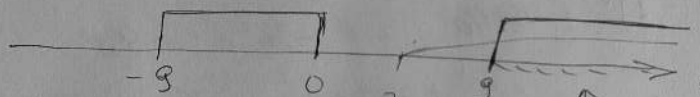
$a = t^3 - 81t > 0$ $\quad t(t-9)(t+9) > 0$



$b = 11^t - 121 > 0$ $\quad 11^t > 11^2$ $\quad t > 2$.

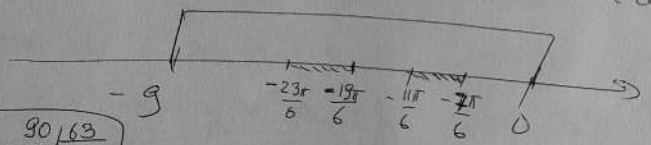
$c = \sin t - \frac{1}{2} > 0$ $\quad \sin t > \frac{1}{2}$ $\quad t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$.

1)



↑ a и b > 0, подходят. $t > 9$.

2)



$-9 < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$-9 - \frac{\pi}{6} < 2\pi n$

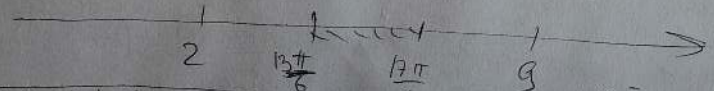
$\frac{54 + \pi}{12\pi} < n$ $\quad -\frac{4,5}{\pi} - \frac{1}{12} < n$

$-1,1 - \frac{1}{12}$

$-1,1 < n$, $n = -2$ — уже мало

подходят только $\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)$ — a и c > 0

3)



$2 < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{12} < n$, $1 < n$.

$t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$

$\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$ — b и c > 0, подходят

Черновик №12

№6

$a\operatorname{ctg}^3 x + (2a^2 - a - 2)\operatorname{ctg}^2 x + (2 - 4a - 2a^2)\operatorname{ctg} x + 4a = 0.$

$\operatorname{ctg} x = y$ | наиб. расст. между корнями $(0; \pi)$.

$ay^3 + (2a^2 - a - 2)y^2 + (2 - 4a - 2a^2)y + 4a = 0.$ | ~~наиб.~~ минимальн.

По сумме коэф. один из корней $y = 1$.

1) $a \neq 0$.

	a	$2a^2 - a - 2$	$2 - 4a - 2a^2$	$4a$
1	a	$2a^2 - 2$	$-4a$	0

$(y-1)(ay^2 + (2a^2 - 2)y - 4a) = 0.$

$\frac{D}{4} = (a^2 - 1)^2 + 4a \cdot a = a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2 =$

$= a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2.$

$y = \frac{-a^2 + 1 \pm (a^2 + 1)}{a}$

$y = \frac{-a^2 + 1 + a^2 + 1}{a} = \frac{2}{a}$ $\qquad y = \frac{-a^2 + 1 - a^2 - 1}{a} = -2a.$

$\operatorname{ctg} x = \frac{2}{a}$, $\operatorname{ctg} x = -2a$, $\operatorname{ctg} x = 1$. $\quad x = \frac{\pi}{4}$.

$a > 0$, т.к. если $a < 0$, то расст. между $\frac{2}{a}$, которое < 0 и 1 будет больше $\frac{\pi}{4}$.

Но тогда $-2a < 0$, и расст. между $-2a$ и 1 больше $\frac{\pi}{4}$.

Следовательно мин. расст. равно $\frac{\pi}{4}$ и достигается при $a = 0$

2) $a = 0$

$0y^3 + (-2)y^2 + 2y = 0$

$-2y^2 + 2y = 0$

$y^2 - y = 0$

$y(y - 1) = 0$

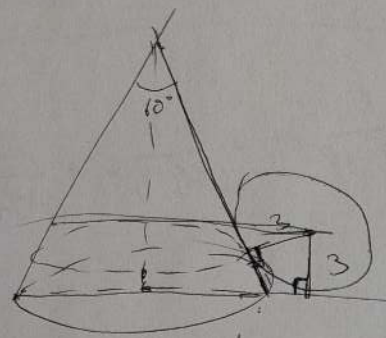
$y = 0$ $\quad y = 1$.

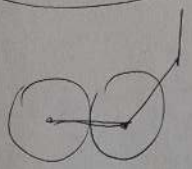
$\operatorname{ctg} x = 0$ $\quad \operatorname{ctg} x = 1$

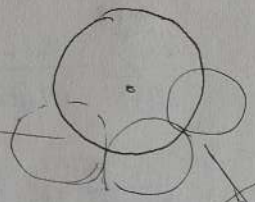
$x = \frac{\pi}{2}$ $\quad x = \frac{\pi}{4}$

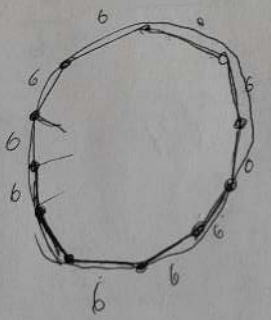
Черновик N13

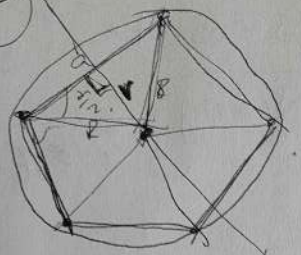
N4









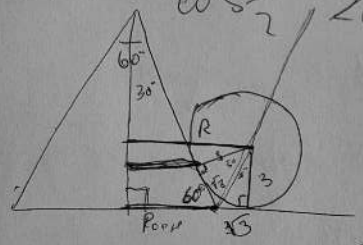


$180(11-2) = \alpha \cdot 11$

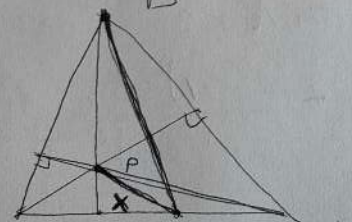
$180 \cdot 9 = \alpha \cdot 11$

$\alpha = \frac{180 \cdot 9}{11} = \frac{90 \cdot 2 \cdot 9}{11}$

~~R~~ $R = \frac{\frac{a}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{~~6~~ 3}{2\cos\frac{810^\circ}{11}}$



N7.



Черновик N14.

N1

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\sqrt[6]{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)^2} =$$

$$= \sqrt[6]{(4+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3}+1)} =$$

$$= \sqrt[6]{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} = \sqrt[6]{16-12} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2}$$

$A = 1$.

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{59} \frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$$

$$\frac{3}{1\cdot 4} + \frac{5}{4\cdot 9} + \frac{7}{9\cdot 16} + \frac{9}{16\cdot 25} + \ldots + \frac{119}{59^2\cdot 60^2}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4\cdot 9} = \frac{3\cdot 9+5}{4\cdot 9} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9} + \frac{7}{9\cdot 16} = \frac{8\cdot 16+7}{9\cdot 16} =$$

$$= \frac{128+7}{9\cdot 16} = \frac{135}{9\cdot 16} = \frac{3^3\cdot 5}{3^2\cdot 16} = \frac{15}{16}$$

135 | 5
27 | 33

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{(n\cdot(n+1))^2} = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$$ - предпол.

Док-во для $N=2$ посчитано вручную (база индукции).

$$\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2} + \frac{2(k+1)+1}{((k+1)(k+2))^2} = \frac{((k+1)^2-1)(k+2)^2+2(k+1)+1}{((k+1)(k+2))^2} = \frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2}$$

$$((k+2)^2-1)(k+1)^2$$

$$-(k+1)^2 = -k^2-2k-1$$

$$((k+1)^2-1)(k+2)^2+2(k+1)+1 =$$

$$= (k+1)^2(k+2)^2 - (k+2)^2 + 2(k+1) + 1 =$$

$$= -k^2 - 4k - 4 + 2k + 2 + 1 =$$

$$= -k^2 - 2k - 1 = -(k+1)^2$$

По индукции доказано.

$B = \frac{60^2-1}{60^2}$, это меньше 1, а значит $A > B$