МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Полякова Виктория Кирилловна**

Класс: **9 класс**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	15	0	15	0

Чистовик

Задача 3.

Заметим, что $10^{2022} = 1\underbrace{00\ldots0}_{2022 \text{ нуля}}$.

Т.к. $\varphi(1000) = \varphi(2^3)\cdot\varphi(5^3) = (2^3-2^2)(5^3-5^2) = 400$, то по теореме Эйлера:

$9^{\varphi(1000)} \equiv_{1000} 1$, т.е

$9^{400} \equiv_{1000} 1$

$9^{2022} \equiv_{1000} (9^{400})^5 \cdot 9^{22} \equiv_{1000} 9^{22} \equiv_{1000} (9^5)^4 \cdot 81 \equiv_{1000} (59049)^4 \cdot 81 \equiv_{1000}$

$\equiv_{1000} 49^4 \cdot 81 \equiv_{1000} 5764801 \cdot 81 \equiv_{1000} 801 \cdot 81 \equiv_{1000} 64881 \equiv_{1000} 881$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline 441 \\ 196 \\ \hline 2401 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2401 \\ \times 2401 \\ \hline 2401 \\ 9604 \\ 4802 \\ \hline 5764801 \end{array}$$

Значит, 9^{2022} заканчивается на 881. Тогда $10^{2022} - 9^{2022}$ заканчивается на 119.

Ответ: 119.

Задача 2.

(1): 1; 3; 5 ... $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$ - общий член

(2): 1; 4; 7 ... $a_n = 1 + 3(m-1) = 3m-2$ - общий член

Заметим, что в прогрессии (1) содержится 1011, не превосходящих 2022 (т.к. $a_{1011} = 2021$)

В прогрессии (2) содержится 674 числа, не превосходящих 2022. (т.к. $3m - 2 \le 2022 \Leftrightarrow m \le 674{,}6\ldots$)

Найдём кол-во совпадающих членов этих прогрессий:

$2n - 1 = 3m - 2$

$3m - 2n = 1$

$\begin{cases} m = 1 + 2t \\ n = 1 + 3t \end{cases}$, где $t = 0; 1; 2\ldots$

Значит, совпадающие члены имеют вид: $2n - 1 = 2(1+3t) - 1 = 6t + 1 \le 2022$

Т.к. $t = 0; 1; 2\ldots$ то их будет 337 штук. $t \le 336{,}8\ldots$

По формуле включений и исключений кол-во натуральных чисел, не превышающих 2022 и не входящих ни в одну из прогрессий равно:

$2022 - 1011 - 676 + 337 = 674$ числа.

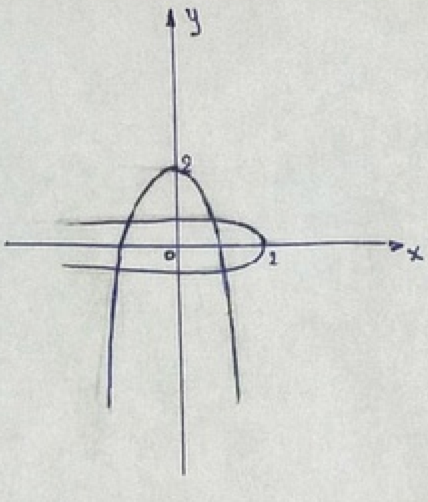
Ответ: 674 числа.

Лист 1.

Чистовик

Задача 6

$y=-3x^2+2;\ x=-4y^2+2$



$\begin{cases} y=-3x^2+2 & |\cdot 4 \\ x=-4y^2+2 & |\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=-12x^2+8, & (1) \\ 3x=-12y^2+6 & (2) \end{cases}$

$(1)+(2):\ 4y+3x=-12x^2-12y^2+14$

$12y^2+4y+12x^2+3x=14,$

$y^2+1/3\,y+x^2+1/4\,x=14$

$(1/6+y)^2-1/64+(x-1/8)^2-1/36=7/6$

$\omega:\ (x+1/8)^2+(y+1/6)^2=697/576$ - ур. опис. окружности.

Значит, точки пересечения парабол лежат на окружности ω.

Тогда точка A - центр этой окружности, а искомое расстояние есть радиус.

$\frac{\sqrt{697}}{24}$.

Ответ: $\sqrt{697}/24$

Задача 7.

Рассмотрим правильную скобочную последовательность длины $2\cdot 10=20$. Она начинается с открывающейся скобки. Найдём к ней закрывающуюся скобку и представим посл-ть в виде (A)B, где A и B тоже правильные посл-ти. Пусть длина A равна 2k, тогда посл-ть можно составить C_k способами, а длина B равна $2(10-k-1)$ и пос-ть B можно составить C_{10-k-1} способами. Тогда

$C_{10}=C_0C_{10-1}+C_1C_{10-2}+\dots+C_{10-1}C_0$, где $C_0=1$

$C_0, C_1, \dots, C_{10}$ - числа Каталана

$C_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$

Тогда $C_{10}=C_9+C_1C_8+C_2C_7+C_3C_6+\dots+C_9C_0=4862+1430+429+\dots+4862=$

$=16796$

Ответ: 16796

Лист 3.

Задание 1 Черновик

Заметим, что произведение чисел кратно 16, когда на видимых гранях будут числа 2; 4; 6 ($16 = 2^4$; $2 \cdot 4 \cdot 6 = 2^4 \cdot 3$). Причём, т.к. сумма чисел на противоположных гранях игрального кубика равна 7, то 2; 4; 6 расположены на 3 смежных гранях.

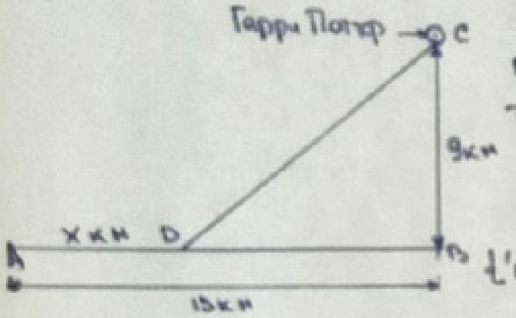
Всего способов кинуть кубик: 6 (одна из 6 граней не видна)

Благоприятные для нас способы: 3 (не видны „5", „1" или „3")

Значит, искомая вероятность: $\frac{3}{6} = 0{,}5$

Ответ: 0,5

Задача 4.



Пусть AD = x км. Тогда DB = 15 − x (км) и по т. Пифагора: $DC = \sqrt{81 + (15-x)^2} = \sqrt{x^2 - 30x + 306}$

Тогда время до острова составит:

$$t = \frac{x}{50} + \frac{\sqrt{x^2 - 30x + 306}}{40}$$

$$t'(x) = \frac{1}{50} + \frac{1}{40} \cdot \frac{2x - 30}{2\sqrt{x^2 - 30x + 306}} = \frac{1}{50} + \frac{x - 15}{40\sqrt{x^2 - 30x + 306}}$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow \frac{15 - x}{4\sqrt{x^2 - 30x + 306}} = \frac{1}{5}$$

$25(225 - 30x + x^2) = 16(x^2 - 30x + 306)$ при $0 \le x \le 15$

$9x^2 - 270x + 729 = 0$

$x = 3$ или $x = 27$

Т.к. $0 \le x \le 15$, то $x = 3$

Значит, $x_{min} = 3$. Т.е. Хагрид должен проехать 3км и затем взлететь и лететь на остров, чтобы время движения было минимальным.

Ответ: 3.

Черновик.

$a = x^3 - 100x$; $b = x^4 - 16$; $c = x + 20 - x^2$

10 пакетов.

1 способ : 2 в 1

2 способ : все в 1

3 сп. : ((()()()()()()()())) и т.д.

((()()(())()()()()))

((((())(())(())(()))))

$C_{10} = C_0 C_{10-1} + C_1 C_{10-2} + \ldots + C_{10-1} C_0$ причём $C_0 = 1$

$C_0; C_1; \ldots; C_{10}$ – числа Каталана.

Тогда $C_{10} = C_9 + C_1 C_8 + C_2 C_7 + C_3 C_6 + \ldots + C_9 C_0 =$

$= 4861 + 1430 + 2 \cdot 429 + \ldots + 4862 = 16796$.

Черновик.

№1.

Разложим 16 на простые множители: $16 = 2^4$

Можно заметить, что числа 3 и 5 - простые, а числа $4(2^2)$; 2; $6(3 \cdot 2)$ содержат 2. Если перемножить $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48 = 2^4 \cdot 3$. Значит, если на гранях есть 4; 2; 6 (обязательно вместе), то число поделится на 16 (независимо от 4 и 5 числа. Теперь найдём вероятность, что все 3 числа выпадут одновременно: $\frac{3}{6} = 0.5 = 50\%$ Ответ: 50%.

№2.

$t \in N$ Вид: $2n - 1 = 2(1+3t) - 1 = 6t+1 \leq 2022$

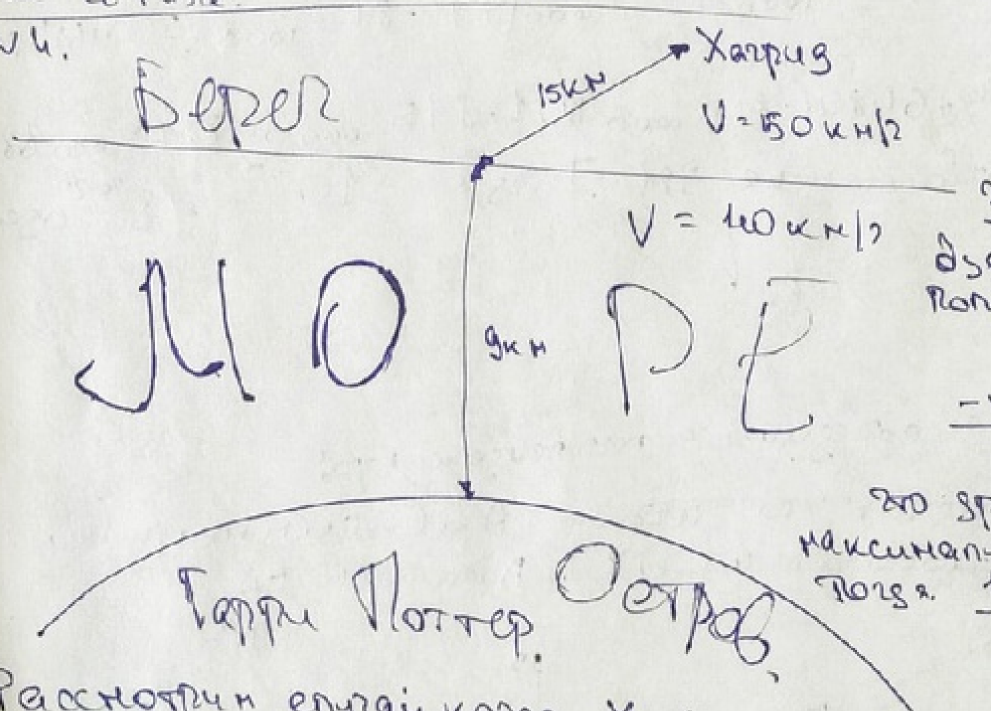
Первая арифм. прогрессия: $a_1 = 1$ $a_2 = 3$ $d = 2$. (все нечётные) $t \leq 3$

Вторая арифм. прогрессия: $a_1 = 1$ $a_2 = 4$ $d = 3$.

Числа, не превышающие 2022. Формула включ. и исключ. $t \leq 336,8..$

Заметим, что во второй прогрессии у членов с нечётными номерами будет нечётное число, а у членов с чётными номерами - чётные.

№4.



$x \leq 15$ км.

Значит, по морю будет: $9 + 15 - x$ км $(24 - x)$.

Получаем: $\frac{x}{50} + \frac{24-x}{40} = \frac{4x + 5(24-x)}{200}$

$\frac{-x+120}{200} = \frac{120-x}{200}$ Заметим, что дробь будет принимать максимальное значение при $x = 0$.

Тогда: $\frac{120-0}{200} = 0.6$ часов

Рассмотрим случай, когда Хагрид проедет 15км по суше и 9 по воде:

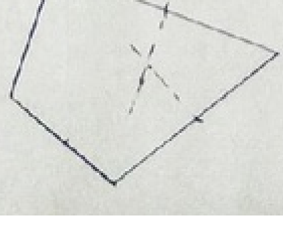
$\frac{15}{50} + \frac{9}{40} = \frac{3}{10} + \frac{9}{40} = \frac{12+9}{40} = \frac{21}{40} = 0.525$ часа. Ответ: 0,6 часов

№7. ~~10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | = 10·9·8·7·6·5·4·3·2 =~~

120

№5. $a = x^3 - 100x$; $b = x^4 - 16$; $c = x + 20 - x$?

$\frac{3}{50} + \frac{21}{40}$



$$\begin{array}{r} 1011 \\ -\,676 \\ \hline 335 \end{array}$$

672

~~1 2 3 4 5 6 7~~

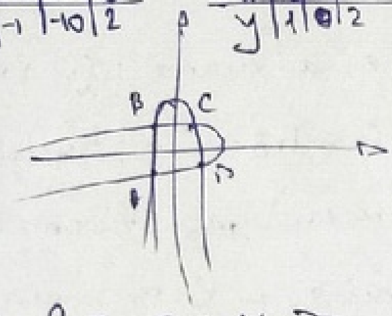
14:15

$y=-3x^2+2$ $\quad x=-4y^2+2$

$y=-3x^2+2$ $\quad y=\pm\sqrt{\frac{2-x}{4}}$

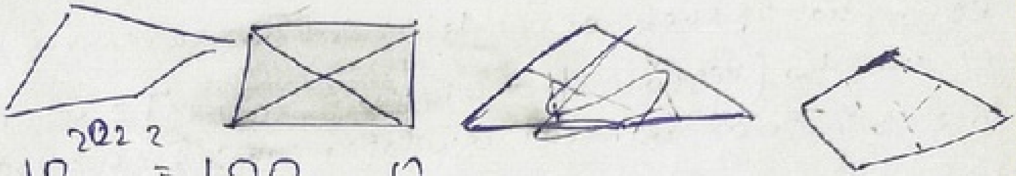
x	1	2	0
y	-1	-10	2

x	-4	0
y	1	2



Черновик

Заметим, что точка, равноудалённая от вершин образовавшегося четырёхугольника — центр описанной вокруг этого четырёхуг. окр.



№3. Заметим, что $10^{2022} = \underbrace{100\ldots0}_{2022 \text{ нуля}}$

Т.к. $\varphi(1000)=\varphi(2^3)\cdot\varphi(5^3)=(2^3-2^2)(5^3-5^2)=400$, то по т. Эйлера: $9^{\varphi(1000)} \equiv_{1000} 1$, т.е.

$9^{400} \equiv_{1000} 1$

$9^{2022} \equiv_{1000} (9^{400})^5 \cdot 9^{22} \equiv_{1000} 9^{22} \equiv_{1000} (9^5)^4 \cdot 81 \equiv_{1000} (59049)^4 \cdot 81 \equiv$

$\equiv_{1000} 49^4 \cdot 81 \equiv_{1000} 5764801 \cdot 81 \equiv_{1000} 801 \cdot 81 \equiv_{1000} 64881 \equiv_{1000} 881$

Значит, 9^{2022} заканчивается на 881. Тогда $10^{2022}-9^{2022}$ обязательно заканчивается на 119.

Ответ: 119.

Точка пересечения серединных перпендикуляров.

~~Заметим, что точки A и C симметричны относительно OX. Аналогично B и D~~

$9x^4-$