МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Попов Роман Вадимович**

Класс: **10 класс**

Технический балл: **50**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	10	15	0	0	0

Чистовик. Задача 1.

Пусть искомое натуральное число при делении на 20 даёт остаток r и частное a, при дел. на 21: ост. $(r+1)$ и частное b; при дел. на 22 — частное c.

$a, b, c \in \mathbb{Z}$
$a, b, c \geq 0$

$$\begin{cases} n = 20a + r \\ n = 21b + (r+1) \\ n = 22c + 2 \end{cases}$$

$$20a + r = 21b + (r+1)$$

$$21 \cdot b + 1 = 20a$$

$$b + 1 = 20(a-b)$$, т.е. $b \equiv -1 \pmod{20}$.

1) Если $b = 19$:

$$a = \frac{21 \cdot 19 + 1}{20} = 20$$

$$\begin{cases} n = 400 + r \\ n = 22c + 2 \end{cases}$$

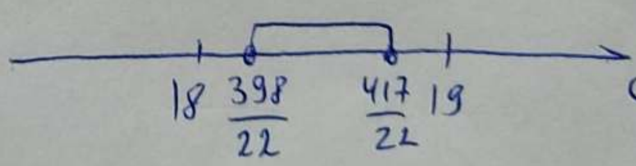
$$400 + r = 22c + 2$$

$$r = 22c - 398$$

Т.к. $0 \leq r \leq 19$: $0 \leq 22c - 398 \leq 19$

$$398 \leq 22c \leq 417$$

$$\frac{398}{22} \leq c \leq \frac{417}{22}$$



Таких c нет

Значит $b \neq 19$ $(b > 19)$

~~2) Если $b = 39$~~

$$\cancel{a = \frac{21 \cdot 39 + 1}{20} = 41}$$

$$\cancel{n = 20 \cdot 41 + r}$$

$$\cancel{n = 22c}$$

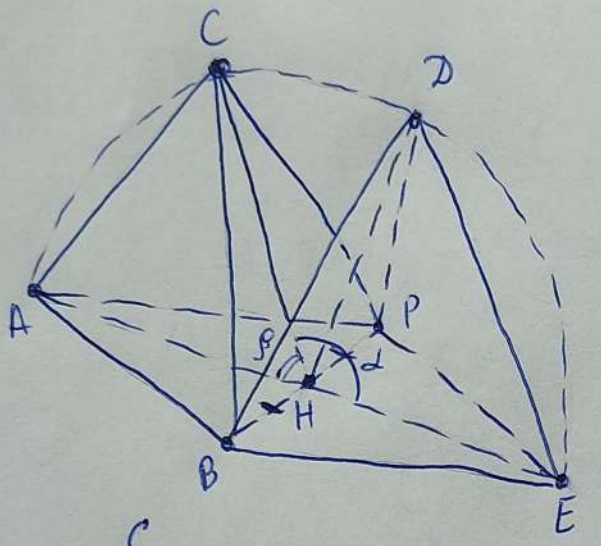
Тогда минимальное $b = 39$.
И действительно: $n = 838$ подходит

$$\begin{cases} 838 = 20 \cdot 41 + 18 \\ 838 = 21 \cdot 39 + 19 \\ 838 = 22 \cdot 38 + 2 \end{cases}$$

Ответ: 838.

Чистовик Задача №2. стр. 2 из 6

При перекатывании одна из „подвижных вершин" остается на месте, а две другие перемещаются в вертикальной плоскости по окружности с центром в середине лежащего во время переката На столе ребра:



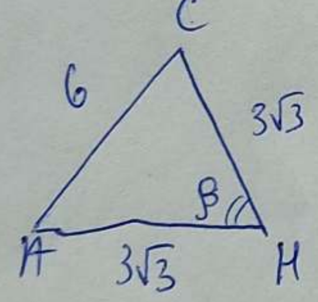
H – середина BP

$R = AH = CH = DH = EH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$ (медиана в прав. $\triangle$)

Т. C перешла в E.

Длина ее траектории $S = \alpha R$.

$\alpha = 180° - \angle CHA = 180° - \beta$



По т. косинусов для $\triangle AHC$:

$6^2 = 2 \cdot (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (3\sqrt{3})^2 \cos\beta$

$36 = 2 \cdot 27 - 2 \cdot 27 \cos\beta$

$54 \cos\beta = 18$; $\cos\beta = \frac{1}{3}$

$\beta = \arccos\frac{1}{3}$

$\alpha = \pi - \arccos\frac{1}{3}$

$S = \left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) \cdot 3\sqrt{3}$

Аналогично и т. $A \to D$: длина траектории S.

За 6 перекатываний подвижная вершина пирамиды будет дважды стоять на месте и 4 раза перемещаться. Суммарная длина траектории равна $4S = 12\sqrt{3}\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right)$ см

Ответ: $12\sqrt{3}\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right)$ см

Чистовик. Задача №3.

9 взаимопросто с 1000 $\Rightarrow$

$9^{\varphi(1000)-1} \equiv 1 \pmod{1000}$

$\varphi(1000) = 1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 400.$

$9^{399} \equiv 1 \pmod{1000}$

$9^{1995} \equiv 1 \pmod{1000}$

$9^{2022} \equiv 9^{1995} \cdot 9^{27} \equiv 9^{27} \pmod{1000}$

$9^{9} \equiv \left(9^{3}\right)^{3} \equiv 729^{3} \equiv (-271)^{3} \equiv -271 \cdot 271^{2} \equiv$

$\equiv -271 \cdot 441 \equiv -511 \pmod{1000}$

$9^{27} \equiv \left(9^{9}\right)^{3} \equiv (-511)^{3} \equiv -511 \cdot 511^{2} \equiv -511 \cdot 121 \equiv$

$\equiv -831 \pmod{1000}$

Итого:

$10^{2022} - 9^{2022} \equiv -9^{27} \equiv 831 \pmod{1000}$

Значит, это число заканчиватся на 3 последние цифры 831.

Ответ: 831

Чистовик Задача №5

Найдем абсциссы точек экстремума функции

$f(t)=t^3+4t^2+4t+a$

$f'(t)=3t^2+8t+4$

$3t^2+8t+4=0$

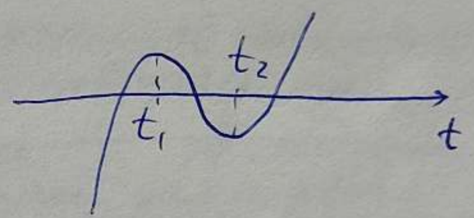
$t_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot3}}{3}$

$\begin{cases} t_1=-2 \\ t_2=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Если есть 3 действ. корня:

$f(t_1)>0$

$f(t_2)<0$



$\begin{cases} (-2)^3+4\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)+a>0 \\ \left(-\frac{2}{3}\right)^3+4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2+4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+a<0 \end{cases}$

$\begin{cases} -8+16-8+a>0 \\ -\frac{8}{27}+4\cdot\frac{4}{9}-\frac{8}{3}+a<0 \end{cases}$ $\begin{cases} a>0 \\ a<\frac{32}{27} \end{cases}$

Чистовик.   Задача №4.

Второй игрок может обеспечить себе победу.
Стратегия второго: после каждого хода ~~в~~ первого игрока он смотрит: если есть соседние числа 1 и 3 или 2 и 2, то он их стирает и получает 4. Если же 4 одним ходом получить нельзя, то он делает то же самое, что и первый, но для симметричных относительно центра окружности чисел (будем считать, что все единицы в начале находились в вершинах правильного 2022-угольника)

Докажем, что стратегия работает: ~~в этом случае~~ (из симметрии картинки, когда второй повторяет ход ~~до конца игры числа, большие 4 не могут быть получены~~ симметрично первому, выигрышной для первого комбинации образоваться не может).
~~Предположим, что впервые (после хода первого) образовалась „5". Она получена из 2 и 3.~~

Если в результате хода первого игрока впервые образовалась „3", то второй точно выиграет. Тройка получена из 1 и 2. Если ~~вокруг~~ среди соседей этой пары есть „1", то второй своим ходом сложит 1 и 3. Если же эта пара (1 и 2) окружена двойками с двух сторон, получается, до хода первого две двойки стояли вместе, чего не может быть (второй на этот момент уже выиграл бы).

~~Т.к. все числа большие 4~~ Т.к. ~~первое~~ число большее 4, которое может образоваться первым будет образовано с участием тройки, получается до победы второго этого произойти не может.

Т.к. сумма всех чисел фиксирована (равна 2022), то во-первых, числа, которые выбирают первый и второй за 1 кон не будут пересекаться. А также первому когда-нибудь придётся сделать ход, в результате которого образуется комбинация 2, 2 или 1, 3.

Ответ: да, второй.

Черновик

$x^3+y^3+a+z^3+a+32= \\ =x^3+y^3+z^3+2a+32$

$$\begin{cases} y_0=2x_0^2-1 \\ x_0=4y_0^2-2 \\ (x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2 \end{cases}$$

$x_0^2-2ax_0+a^2+y_0-2y_0b+b^2=R^2$

$$\begin{cases} 2y_0=4x_0^2-2 \\ x_0=4y_0^2-2 \end{cases}$$

$4x^2-2y=4y^2-x$

$3t^2+8t+4=0$

$t_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot3}}{3}$

$t_{1,2}=\frac{-4\pm2}{3}$

$t=-2$

$t=\frac{-4+2}{3}=-\frac{2}{3}$

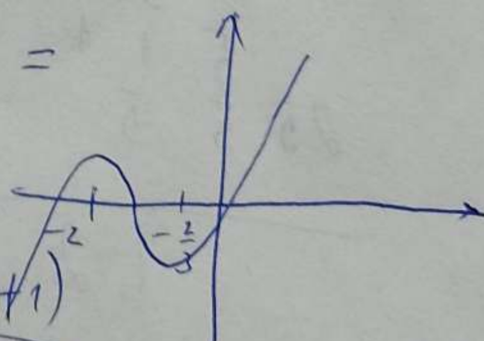
$4x^2+x=4y^2+2y$

$4x^2+x-2y(2y+1)=0$

$D=1+4\cdot2y(2y+1)\cdot4=$

$=1+32y(2y+1)=64y^2+32y+1=$

$=(8y+1)^2+16y$



$x_{1,2}=\frac{-1\pm(4y+1)}{2\cdot4}=\frac{-1\pm(4y+1)}{8}$

$x=\frac{-1+4y+1}{8}=\frac{4y}{8}=\frac{2y}{4}=\frac{y}{2}$

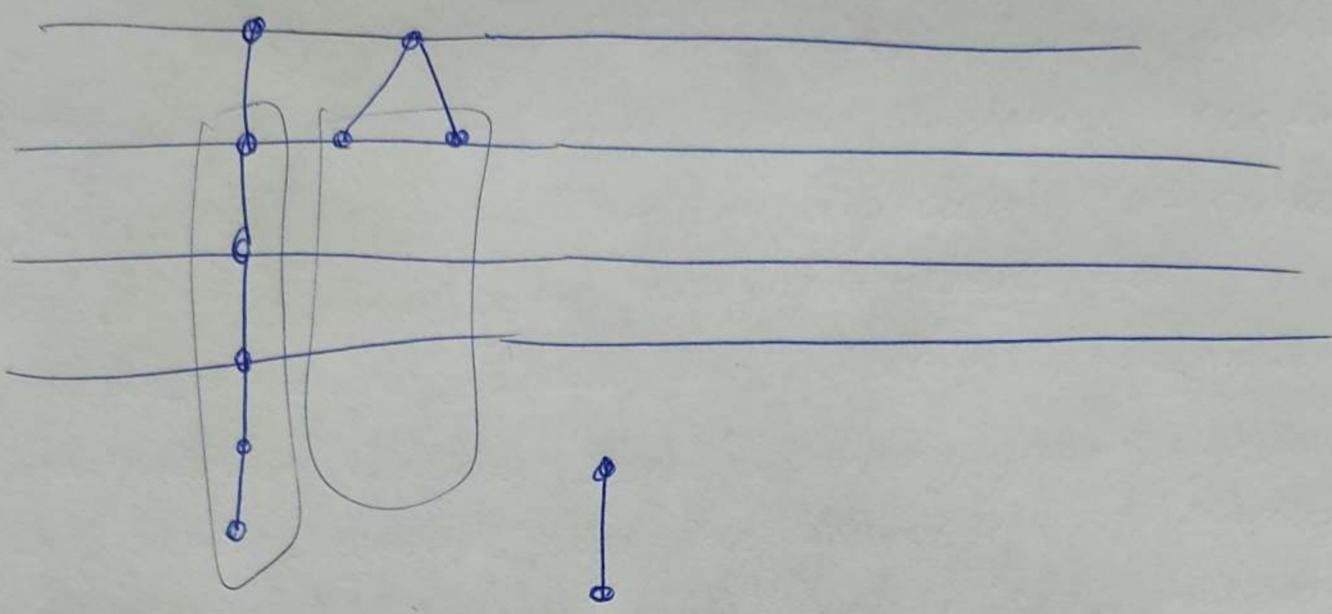
$x=\frac{-1-y-1}{8}=$

Черновик +4 +2 стр. 2 из 3

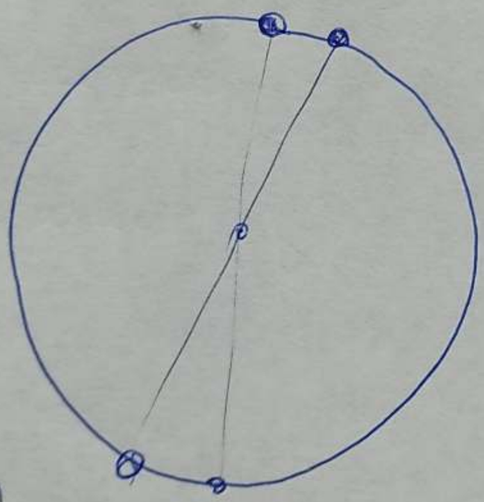
$$\begin{array}{r} 271 \\ \times\ 271 \\ \hline 271 \\ 1897 \\ 2 \\ \hline 441 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 441 \\ \times\ 271 \\ \hline 441 \\ 1687 \\ 2 \\ \hline 511 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 511 \\ \times\ 511 \\ \hline 511 \\ 511 \\ 5 \\ \hline 421 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 121 \\ \times\ 511 \\ \hline 121 \\ 121 \\ 5 \\ \hline 831 \end{array}$$

$n = 6$ Черновик



$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)\cdot f(1) + f(n-3)\cdot f(2)$$



2

2

1

3

2

$80 - 48 = 32$

$$\frac{8}{27} + \frac{8}{3} - \frac{16}{9} = \frac{8}{27} + \frac{72}{27} - \frac{48}{27}$$