МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Прозорова Варвара Владиславовна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	0	15

№1

Поймем, что A имеет вид $1-\frac{1}{(1+n)^2}$, где n - минимальное число из чисел в знаменателе крайней правой дроби

для $n=1$: $A=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{3}{4}$ - База

пусть для n верно, покажем для n+1. A1 - A для n = 1

$$A_{n+1}=A_n+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(1+n)^2}$$

$$+\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=$$

$$A_{n+1}=1-\left(\frac{n^2+4n+4-2n-3}{(n+1)^2(n+2)^2}\right)=1-\left(\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{(n+2)^2}$$

$$B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(1-\sqrt{3})^2}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{3-1}{2}}=1$$

$$\Downarrow$$

$$A\ ?\ B \Leftrightarrow 1-\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{>0}\ ?\ 1$$

$$\Downarrow$$

$$A<B$$

ЧИСТОВИК 1

№2

Посмотрим на двузначные числа, кратные 19 или 23:

19, 23, 38, 46, 57, 69, 76, 92, 95

~~Если первое~~

Первые числа задаются однозначно

469 — 2 или 5 — если 2, тогда следующим идет 3, т.к 23, далее 38, а на 8 ничего не начинается ⇒ 2 стоять не может ⇒ 5

$\underbrace{4\,6\,9\,5\,7}\,6\,9$

снова 2 быть не может

понимаем, что получается 4 и да нет цикл длины 4.

длина числа 2022 ⇒ 2021 : 4 ост 1 или 5.

если не брать конец, т.к. там может быть те числа, которые мы исключили.

Рассмотрим концовку:

4	6	9	5	7	...	6	9	5	7	6	9
1	2	3	4	5				2016	2017	2018	2019

1) пусть идет 2, тогда

6	9	2	3	8
2018	2019	2020	2021	2022

— подходит

2) пусть идет 5

6	9	5	7	6
2018	2019	2020	2021	2022

— подходит

⇓

либо 8, либо 6

ЧИСТОВИК 2

N3 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}} = \frac{1\cdot\sqrt[5]{1-x^5}}{\sqrt[5]{-x^5}} = \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1-x^5}{-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = x$$

$$f(f(f(x))) = x$$

$$\underbrace{f(f(f\ldots f}_{1302\ f}(x))) = x \Rightarrow$$

$$\underbrace{f(\underbrace{f\ldots f}_{1302}(x)))}_{1303} = f(x)$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{f\ldots f}_{1303}(x) = f(x) = f(2022) =$$

x по усл 2022

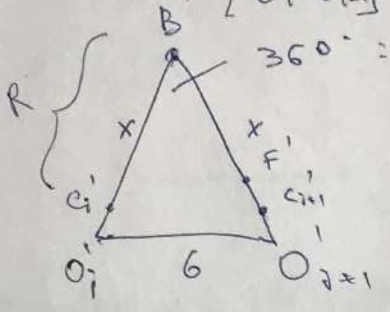
$$= \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$$

чистовик 3

Продолжение № 4

рассмотрим все такие $O_i' O_{i+1}'$, где O_i' и O_{i+1}' — проекции центров соседних шаров ⇒

$[O_i' O_{i+1}'] = r + r = 3+3 = 6$



$360° : 11$, т.к. треугольников 11 и они делят всю плоскость на равные части

по т cos: $B'O_i' = X$

$\cancel{\cos\frac{360}{11}}$

$$\cos\frac{2\pi}{11} = \frac{x^2+x^2-6^2}{2x\cdot x} =$$

$$= \frac{2x^2-36}{2x^2} = 1-\frac{36}{2x^2} =$$

$$= 1-\frac{18}{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{18}{x^2} = 1-\cos\frac{2\pi}{11}$$

$$x^2 = \frac{18}{1-\cos\frac{2\pi}{11}}$$

$$x = \sqrt{\frac{18}{1-\cos\frac{2\pi}{11}}} \Rightarrow$$

радиус основания равен

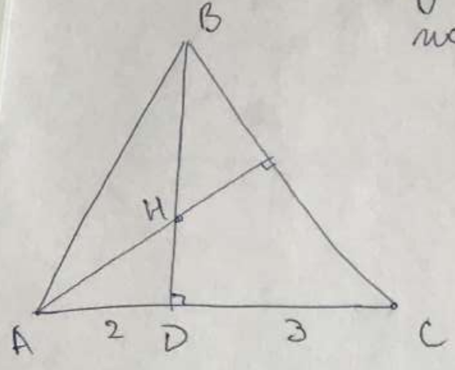
$$R = B_i'C_i' = B'O_i' - O_i'C_i' = X - \sqrt{3} =$$

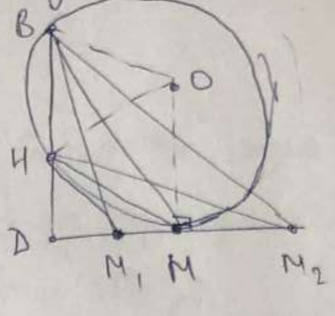
$$= \sqrt{\frac{18}{1-\cos\frac{2\pi}{11}}} - \sqrt{3}$$

чистовик

№7

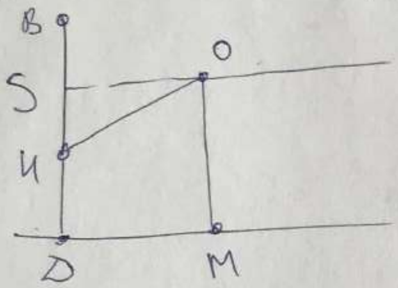
Поймём, где лежит K. Построим окружность, проходящую через BH и касается AC в M. ⇒

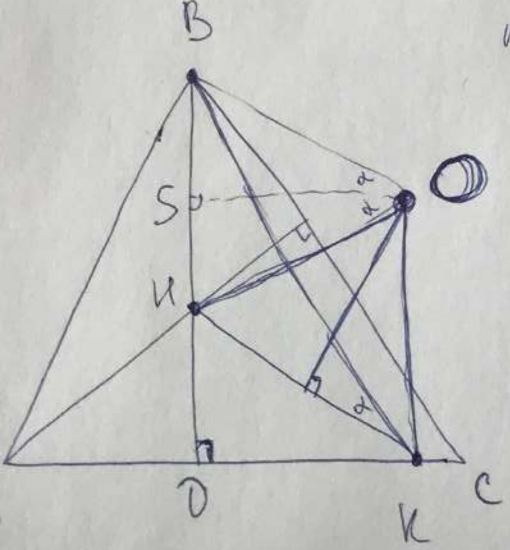




$\angle BMH > \angle BM_1H$ и $\angle BMH > \angle BM_2H$, где $M_1 \in [DM]$ и $M_2 \in [DM)$ за M, т.к. угол BM_iH равен полуразности ~~дуг~~ дуг, которые он ~~отр~~ вырезает на окружности, что явно меньше, чем половина дуги BH (т.к. у нее на том ведь что-то вычитают), что равно $\angle BMH$. ⇒ M = K т.к. мы доказали, почему угол максимален.

Покажем, что окружность единственна. Её центр лежит на сер. пер. к BH, а радиус равен SD, где S – сер BH ⇒ он фиксирован ⇒ ~~[illegible]~~ OH = BO тоже фиксированы ⇓ точка касания M – фиксирована. ⇒ DM = DK – фиксировано ⇒ единств. значение

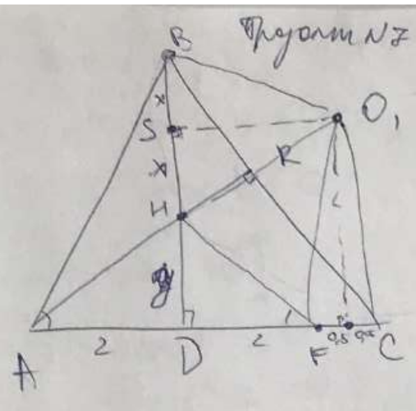




$DK^2 = DH \cdot DB$

2

3



Другой №7

$\omega(BHC) \cap DC = F \Rightarrow$

$\angle HFA = \angle HBC = \angle HAC$ (т.к. $\triangle BDC \sim \triangle AHC$ по 2 углам — общ. и 90°)

$\Downarrow$

$\triangle AHF$ — р/б

O_1 — центр этой окружности

O_1 на ср. пер. к BH и к FC

$SH = x$, $HD = y$

$O_1B^2 = O_1C^2 \Rightarrow 2{,}5^2 + x^2 = 0{,}5^2 + (x+y)^2 \Rightarrow$

$0{,}5^2 + \cancel{x^2} + 2xy + y^2 = 2{,}5^2 + \cancel{x^2}$

$2xy + y^2 = 6$

$DH \cdot DB = y \cdot (y + 2x) = 6 \Rightarrow DK^2 = 6$

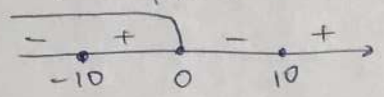
$\Downarrow$

$DK = \sqrt{6}$

t №5

1) $t \le 0 \Rightarrow \quad 2^t - 16 < 0 \Rightarrow$ все остальные > 0

$t^3 - 100t \geq 0 \Leftrightarrow t(t-10)(t+10) > 0$

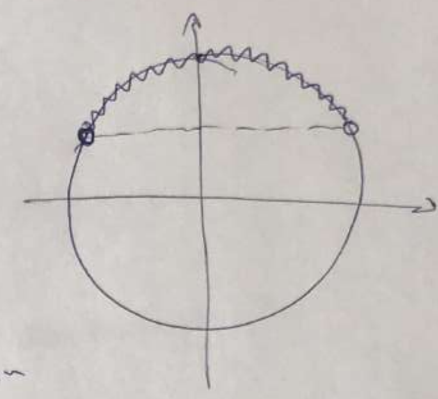


$\Downarrow$

$t \in (-10; 0)$

$\sin t - \frac{1}{2} > 0$

$\sin t > \frac{1}{2}$



$\Downarrow$

$t \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$

Объединяем полученные промежутки:

$-7 < \left(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}\right) < 0$

$-\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{19\pi}{6}$ и -10 - сравнить

-19π и -60

$\underset{-3{,}15 \cdot 19}{-59{,}85} > -19\pi > \underset{-3{,}14 \cdot 19}{-59{,}66} > -60$

$\Downarrow$

$t \in \cancel{\left(-\frac{19\pi}{6}; -10\right)}$ $\left(-10; -\frac{19\pi}{6}\right)$

чистовик 8

2) $t \in (0; 4]$ продолжение №5

$2^t - 16 \le 0$ ⇓ т.к. должно быть два числа, больших 0.

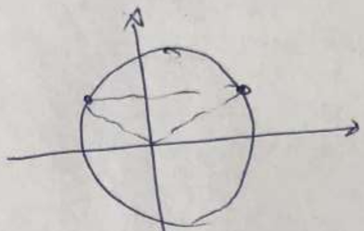
$t^3 - 100t \le 0$

3) $t \in (4; 10]$

$t^3 - 100t \le 0$

$2^t - 16 > 0$

⇓



$\sin t - \frac{1}{2} > 0$

$\sin t > \frac{1}{2}$

$4 > \pi \Rightarrow$ смотрим числа, большие 2π

⇓

$t \in \left(2\pi + \frac{\pi}{6} ; 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$

$t \in \left(\frac{13\pi}{6} ; \frac{17\pi}{6}\right)$

$59{,}85 < 19\pi < 59{,}66 < 60$

⇓

$\cancel{\frac{13\pi}{6}}$ $\frac{17\pi}{6} < 10$

$t \in \left(\frac{13\pi}{6} ; \frac{17\pi}{6}\right)$

4) $t > 10$

$t^3 - 100t > 0$ (4) $\Rightarrow t > 10$

$2^t - 16 > 0$ — третье число неважно

⇓

$t \in \left(-\frac{11\pi}{6} ; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(-10 ; -\frac{19\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6} ; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (10; +\infty)$

Чистовик 9

№ 6 $\quad tg\,x = k$

$$ak^3 + (2-a-a^2)k^2 + (a^2-2a-2)k + 2a = 0$$

если корень $k = 1$

$$\begin{array}{l|l} ak^3 + (2-a-a^2)k^2 + (a^2-2a-2)k + 2a & k-1 \\ \hline \underline{ak^3 - ak^2} & ak^2 + (2-a^2)k - 2a \\ \quad (2-a^2)k^2 & \\ \quad \underline{(2-a^2)k^2 - (2-a^2)k} & \\ \qquad\qquad -2ak + 2a & \\ \qquad\qquad \underline{-2ak + 2a} & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$(ak^2 + (2-a^2)k - 2a)(k-1) = 0$$

ЧЕРНОВИК

$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots +$

черновик

$1 - \frac{1}{(1+n)^2}$

$\frac{n^2-2n-1}{n^2(n+1)^2} = \frac{}{(n+2)^2}$

$A = 1 - \frac{1}{4}$

$2n+$

$\sqrt{7+3-2\sqrt{2}}$

19 × 3 = 57; 57 + 19 = 76

76 + 19 = 95

69 + 23 = 92

2020

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}} =$

$-\pi$

$-\pi - \frac{5\pi}{6}$

$-6\pi - \delta$

$f(f$

$t^3 - 100t =$

$t < 0$

$t(t^2-100)$

$t(t-10)(t+10) < 0$

0,55 · 6 = 3,30

$2^t - 16 < 0$

$- \quad + \quad - \quad +$ (−10, 0, 10)

$t \in (-10; 0)$

$\sin t - \frac{1}{2}$

$\frac{3,15}{6} > \frac{1}{2}$

9,45

$\boxed{0,55}$

3,15 × 19 = 59,85

$\sin t - \frac{1}{2} > 0$

$\sin t > \frac{1}{2}$

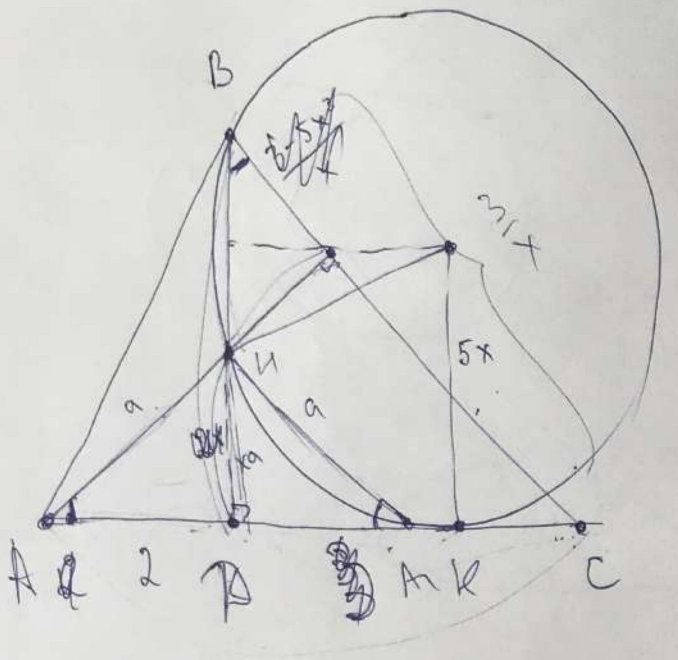
$\frac{3,15}{6} < 0,55$

$3,15 \cdot \frac{7}{6}$

3,3

3,15

3,14 × 19 = 59,66



$DK^2 = DH \cdot DB$

$BD = \sqrt{\frac{9}{x^2} - 9} = 3\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$

$\frac{2}{2x} = \frac{y}{3}$

$y = \frac{6}{2x} = \frac{3}{x}$

$BD = \boxed{\frac{3}{x}}$

$\frac{5x}{5} = \frac{3}{3}$

$\frac{5x}{5} = \frac{3}{y}$

$y =$

$a^2 = 4 + x^2a^2$

$a^2 = \frac{4}{1-x^2}$

$\boxed{\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}$

$-\frac{5x}{3} = \frac{5}{y}$

$y = \frac{15}{5x} = \frac{3}{x}$

$\frac{3}{x} - 5x = \frac{3-5x^2}{x}$

Черновик

N3

$A_1 = f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

$A_2 = f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}} = \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}$

$f(A_1)$

$A_3 = f(A_2) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}\right)^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{x^5+1-x^5}{x^5}}} =$

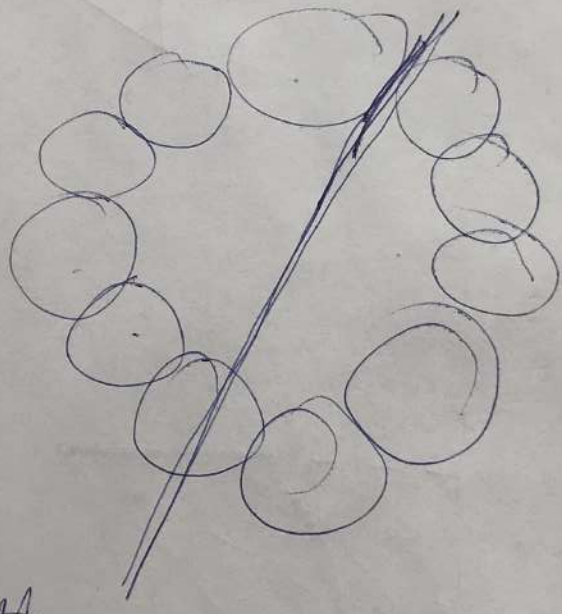
0 -15

-60

$f(t-10)(t+10)$

− + − +

-10 0 10



360

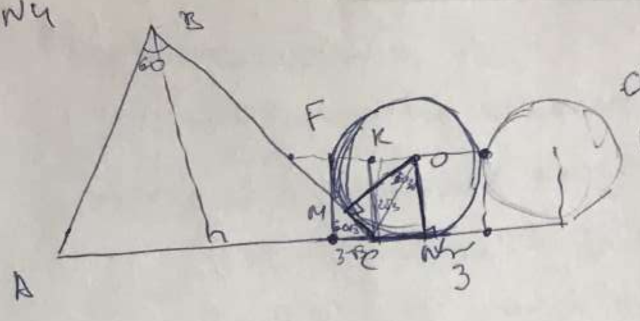
-33

4

3

Черновик

№4



сечение конуса – равнобедренный треугольник с углом 60° => тр-к равносторонний

⇓

$\angle BCA = 60° \Rightarrow \angle MCN = 120°$

⇓

$\angle MON = 360° - 90° \cdot 2 - 120° = 60°$

углы, образованные касательными и диаметром

⇓

90°

⇓

$\angle MOC = 30°$

$MO = 3 = \sqrt{3}\,MC$ (как катет в тр-о с углом 30°)

⇓

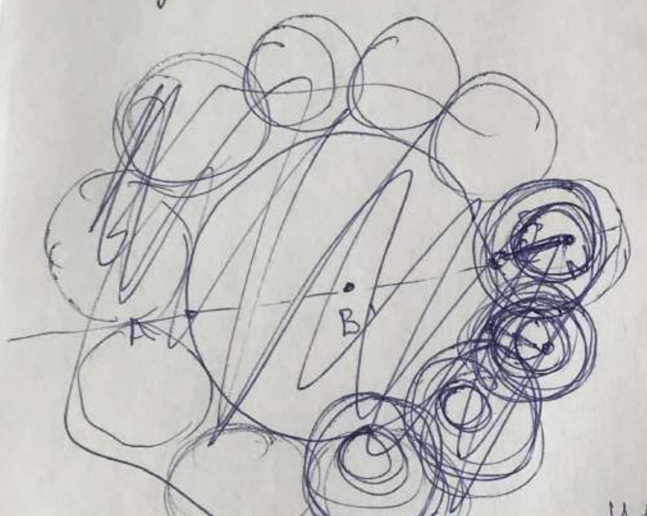
$MC = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

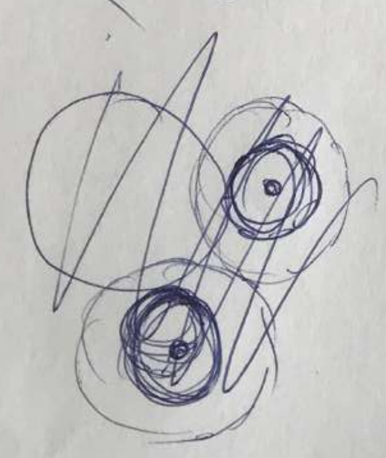
$MC = CN$, как отрезки касательных

CN – отрезок проекции KO

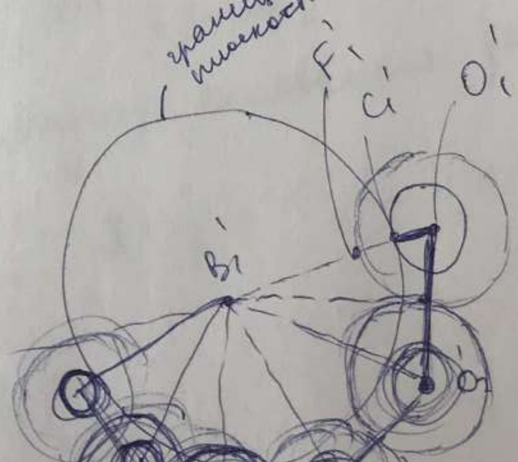
~~ходящего шара~~

посмотрим проекцию всего на плоскость основания конуса.





шары равны => окружности на проекции тоже равны и их радиусы по доказанному равны $\sqrt{3} = O_1C_1$



чистовик 4

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников «Ломоносов»
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему
ученицы 11 класса КОГОАУ КФМЛ г. Киров
Прозорова Варвара Владиславовна

апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (50) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что мои решения оценены некорректно. Ответы, полученные мной на задачи 1, 2, 3, 4, 5, 7, полностью совпадают с ответами в критериях. Так, мой ответ в №4, выраженный через косинус, равен критериальному ответу, который записан через синус (это доказывается с помощью преобразований: пусть $\pi/11 = x$, *тогда* $\sqrt{(2/(1-\cos(2x)))} = \sqrt{(2/(1-(1-2\sin^2(x)))} = \sqrt{(2/(2\sin^2(x))} = 1/\sin(x)$, *что и получается в критериях), и так получилось, что первая часть решения этой задачи попала в конец файла, поэтому есть вероятность того, что она была не замечена. В №5 найденный промежуток совпадает с тем, что в критериях, правда все дроби записаны в сократимом виде. В №1 я получила, что B>A, из чего следует, что ответ B. Также я прошу пересмотреть и другие номера, так как мои решения схожи с критериальными.*

Дата: 27.03.2022

Прозорова В.В